Corrigé DS 2

EXERCICE 1 Des inégalités ; les parties A, B et C sont indépendantes.

Soit n un entier supérieur à 2 et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels strictement positifs.

A . Une première comparaison

1. Montrer grâce à une fameuse inégalité du cours que :

$$1 \leq |1-a_1| + |a_1-a_2| + |a_2-a_3| + |a_3-a_4| + \cdots + |a_{n-1}-a_n| + |a_n|.$$

$$1 = 1 - a_1 + a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{n-1} - a_n + a_n = (1-a_1) + (a_1-a_2) + (a_3-a_4) + \cdots + (a_{n-1}-a_n) + a_n$$

Donc l'inégalité triangulaire généralisée assure que :

$$|1| = |(1-a_1) + (a_1-a_2) + (a_3-a_4) + \cdots + (a_{n-1}-a_n) + a_n| \leq |1-a_1| + |a_1-a_2| + |a_3-a_4| + \cdots + |a_{n-1}-a_n| + |a_n|.$$

B. Comparaison de moyennes

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(x) \leq x - 1$.
3. On pose :

   $m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ la moyenne arithmétique des réels $a_1, a_2, \dots, a_n$

   $g = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}$ la moyenne géométrique des réels $a_1, a_2, \dots, a_n$

   $h = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}$ la moyenne harmonique des réels $a_1, a_2, \dots, a_n$.

   a. En appliquant l'inégalité obtenue au 2. à chaque réel $\frac{a_k}{m}$, montrer que $g \leq m$.

   b. En appliquant l'inégalité obtenue au 3. a. aux réels $\frac{1}{a_k}$, montrer que $h \leq g$.

2. Posons $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = \ln(x) - x + 1$.

   f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$			0		

D'après les variations et valeurs de f, $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f'(x) \leq 0$.

J'en conclus que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(x) \leq x - 1$.

3. $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{a_k}{m} \in \mathbb{R}^{+*}$ donc $\ln\left(\frac{a_k}{m}\right) \leq \frac{a_k}{m} - 1$. Donc, $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{a_k}{m}\right) \underbrace{\leq}_{(*)} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{m} - 1\right) = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{m}\right) - n$.

Or, $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{a_k}{m}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k}{m}\right)$ et $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{m}\right) = \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = \frac{1}{m}nm = n$. Donc l'inégalité $(*)$ s'écrit :

$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k}{m}\right) \leq 0$. Et par conséquent, $\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k}{m} \leq 1$. Donc $\frac{1}{m^n}\left[\prod_{k=1}^{n} a_k\right] \leq 1$ puis $\prod_{k=1}^{n} a_k \leq m^n$. Alors, par croissance de la fonction racine nième, $g = \left[\prod_{k=1}^{n} a_k\right]^{\frac{1}{n}} \leq m = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$.

4. L'inégalité précédente est vraie pour tous réels a_k strictement positifs. On peut donc l'appliquer à $\frac{1}{a_k}$.

Alors, $\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right]^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)$. Or, $\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{1}{\prod_{k=1}^{n} a_k}\right]^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\left[\prod_{k=1}^{n} a_k\right]^{\frac{1}{n}}}$. Donc,

$0 < \frac{1}{\left[\prod_{k=1}^{n} a_k\right]^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)$. Par conséquent, $\frac{1}{\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)} \leq \left[\prod_{k=1}^{n} a_k\right]^{\frac{1}{n}}$. Ainsi, $h \leq g$.

B . Autre comparaison

4. Montrer que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \geq 2$.
5. En déduire que $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right) \geq n^2$.
6. Redémontrer cette dernière inégalité à l'aide d'une autre fameuse inégalité de cours.

5. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. $\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} - 2 = \frac{a_i^2 + a_j^2 - 2a_ia_j}{a_ja_i} = \frac{(a_i - a_j)^2}{a_ja_i} \geq 0$. Donc $\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \geq 2$.
6. $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}\right)$

$$= (a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

$$= \left[\left(1+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_1}{a_3}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}\right)+\left(\frac{a_2}{a_1}+1+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_2}{a_n}\right)+\left(\frac{a_3}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}+1+\frac{a_3}{a_4}\ldots+\frac{a_3}{a_n}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots..+\left(\frac{a_n}{a_1}+\frac{a_n}{a_2}+\cdots++\frac{a_n}{a_{n-1}}+1\right)\right]$$

$$= n + \sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i}\right) \ge n + \sum_{1\le i<j\le n} 2.$$

Or, $\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i} \ge 2$ $donc$ $\sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i}\right) \ge \sum_{1\le i<j\le n} 2$.

Et, $\sum_{1\le i<j\le n} 2 = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} 2 = \sum_{i=1}^{n-1} 2(n-i) = 2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) \underbrace{=}_{\substack{k=n-i\\ i=1\Leftrightarrow i=n-1\\ i=n-1\Leftrightarrow k=1}} 2\sum_{k=1}^{n-1} k$. Donc,

$\sum_{1\le i<j\le n} 2 = 2\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) = n(n-1)$. Et par suite, $\sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i}\right) \ge n(n-1) = n^2-n$. Donc,

$$n + \sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i}\right) \ge n+n^2-n = n^2.$$

Ainsi, $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right) \ge n^2$.

7. Appliquons l'inégalité de Cauchy-schwarz aux réels $x_k = \sqrt{a_k}$ et $y_k = \frac{1}{\sqrt{a_k}}$. Alors

$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$ s'écrit : $\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)^2\right)$

autrement dit, $\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)$ i.e. $n^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)$.

EXERCICE 2 Partie entière et FBN

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Notons $u_n = (\sqrt{3}+1)^{2n} = \overbrace{\left((\sqrt{3}+1)^2\right)^n}^{**}$ et $v_n = (\sqrt{3}-1)^{2n} = \overbrace{\left((\sqrt{3}-1)^2\right)^n}^{**}$.
   a. Montrer que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair.
   b. En déduire que 2^{n+1} divise u_n+v_n . (on utilisera les expressions ** de u_n et v_n)
2. En déduire que 2^{n+1} divise $\lfloor(\sqrt{3}+1)^{2n}\rfloor + 1$. En déduire la parité de $\lfloor(\sqrt{3}+1)^{2n}\rfloor$.

1. a. $\left[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right] = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}\sqrt{3}^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}(-\sqrt{3})^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}\sqrt{3}^k(1+(-1)^k)$

$= \sum_{\substack{0\le k\le n\\ k\ pair}}\binom{n}{k}2^{n-k}\sqrt{3}^k 2 = 2\sum_{p=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2p}2^{n-2p}\sqrt{3}^{2p} = 2\underbrace{\left[\sum_{p=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2p}2^{n-2p}3^p\right]}_{=a\in\mathbb{N}.}$.

J'en conclus que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair.

b. $u_n+v_n = (\sqrt{3}+1)^{2n} + (\sqrt{3}-1)^{2n} =$

$$= \left((\sqrt{3}+1)^2\right)^n + \left((\sqrt{3}-1)^2\right)^n = (4+2\sqrt{3})^n + (4-2\sqrt{3})^n = 2^n(2+\sqrt{3})^n + 2^n(2-\sqrt{3})^n$$
$$= 2^n\left[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right] = 2^n\left[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right] = 2^{n+1}a.$$

Ainsi, 2^{n+1} divise u_n+v_n .

2. $u_n+v_n = 2^{n+1}a$ donc, $u_n+1 = \underbrace{2^{n+1}a}_{\in\mathbb{N}} + (1-v_n)$. Comme $0<\sqrt{3}-1<1$, $0<v_n<1$ et alors $0<1-v_n<1$.

Par conséquent, $\lfloor u_n+1\rfloor = 2^{n+1}a$. Ainsi, $\lfloor u_n\rfloor + 1 = 2^{n+1}a$ avec $a\in\mathbb{N}$. J'en conclus que : 2^{n+1}divise $\lfloor(\sqrt{3}+1)^{2n}\rfloor + 1$ et , $\lfloor u_n\rfloor = 2^{n+1}a - 1$ est donc impair.

EXERCICE 3 Une somme et un produit trigonométriques ; les parties A et B sont indépendantes.

A. Le produit

Soit $x\in\,]0,\pi[$. Pour tout entier naturel n , on pose $P_n(x) = \prod_{k=0}^{n} cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

1. On pose $u_n = sin\left(\frac{x}{2^n}\right)P_n(x)$. Montrer que la suite (u_n) est géométrique.

2. En déduire une autre expression de $P_n(x)$ (sans $\prod$).

1. Soit n un entier naturel.

$u_{n+1} = sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) P_{n+1}(x) = sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=0}^{n+1} cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=0}^{n} cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$

$\underbrace{=}_{formule\ d'angle\ double} \frac{1}{2} sin\left(2\frac{x}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=0}^{n} cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{2} sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \prod_{k=0}^{n} cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{2} u_n$. Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

2. Alors, $sin\left(\frac{x}{2^n}\right) P_n(x) = u_n = \frac{1}{2^n} u_0 = \frac{1}{2^n} sin(x) P_0(x) = \frac{1}{2^n} sin(x)\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2^{n+1}}$. Or $x \in]0, \pi[$, $\frac{x}{2^n} \in]0, \pi[$ donc $sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \neq 0$ et par conséquent, $P_n(x) = \frac{\sin(2x)}{2^{n+1} sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$.

B. Une somme

3. Rappeler la formule de factorisation de $\cos(p) + \cos(q)$.

4. Soit m un entier naturel non nul.

Résoudre l'équation (e_m) : $\cos(x) + \cos\big((2m+1)x\big) = 0$ d'inconnue x réelle.

On note D l'ensemble des réels qui <u>ne sont</u> solutions <u>d'aucune</u> équation (e_m).

Autrement dit, $D = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{m \in \mathbb{N}} Sol(e_m)$.

Soit $a \in D$. On pose $S_n(a) = \frac{1}{\cos(a)+\cos(3a)} + \frac{1}{\cos(a)+\cos(5a)} + \cdots + \frac{1}{\cos(a)+\cos((2n+1)a)}$.

5. Compléter $S_n(a) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\cos(a)+\cdots\ldots}$

6. Soit x et y deux réels tels que $\tan(x)$ et $\tan(y)$existent.

Montrer que : $\tan(x) - tan(y) = \frac{\sin(x-y)}{\cos(x)\cos(y)}$.

7. Déduire de tout ce qui précède, une expression (sans $\sum$) de $S_n(a)$ (attention à ne pas diviser par 0).

3. Soit p et q deux réels. On pose $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$. Alors $p = a + b$ et $q = a - b$. Donc,

$$\cos(p) + \cos(q) = \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

4. Soit x un réel.

x est solution de $(e_m) \Leftrightarrow \cos(x) + \cos\big((2m+1)x\big) = 0 \Leftrightarrow 2\cos\big((m+1)x\big)\cos(mx) = 0$

$$\Leftrightarrow \cos\big((m+1)x\big) = 0 \ ou \ \cos(mx) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / (m+1)x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ \ ou \ \ mx = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x = \frac{\pi}{2(m+1)} + \frac{k\pi}{(m+1)} \ \ ou \ \ x = \frac{\pi}{2m} + \frac{k\pi}{m}.$$

Car m et $m+1$ sont non nuls.

Donc $sol(e_m) = \{\frac{\pi}{2(m+1)} + \frac{k\pi}{(m+1)} \ ; \frac{\pi}{2m} + \frac{k\pi}{m} / k \in \mathbb{Z}\}$.

Alors $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2m} + \frac{k\pi}{m}; \frac{\pi}{2(m+1)} + \frac{k\pi}{(m+1)} / k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}^*\right\} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2m} + \frac{k\pi}{m} / k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}^*\}$.

5. $S_n(a) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\cos(a)+\cos((2m+1)a)}$.

6. Soit x et y deux réels tels que $\tan(x)$ et $\tan(y)$existent. Alors $\cos(x) \neq 0$ et $\cos(y) \neq 0$.

$$(\tan(x) - \tan(y))\cos(x)\cos(y) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{sin(y)}{cos(y)}\right)\cos(x)\cos(y)$$
$$= (\sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)) = \sin(x-y).$$

Donc, $\tan(x) - tan(y) = \frac{\sin(x-y)}{\cos(x)\cos(y)}$.

7. Comme $a \in D, \forall m \in \mathbb{N}^*, \cos(a) + \cos\big((2m+1)a\big) = 2\cos((m+1)a)\cos(ma) \neq 0$ donc $\cos((m+1)a) \neq 0$ et $\cos(ma) \neq 0$ et par conséquent, $\tan((m+1)a)$ et $\tan(ma)$ existent. Par conséquent, $\tan((m+1)a) - \tan(ma) = \frac{\sin(a)}{\cos((m+1)a)\cos(ma)}$.

<u>**Ou bien $\sin(a) = 0$**</u> i.e. $\exists p \in \mathbb{Z} / a = p\pi$.

Alors $\forall m \in \mathbb{N}^*, \cos(a) + \cos\big((2m+1)a\big) = 2(-1)^p$; donc, $S_n(a) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2(-1)^p} = \frac{m}{2(-1)^p} = \frac{m}{2}(-1)^p$.

<u>**Ou bien $\sin(a) \neq 0$.**</u>

Alors, $\tan((m+1)a) - \tan(ma) \neq 0$ et $\cos\big((m+1)a\big)\cos(ma) = \frac{\sin(a)}{\tan((m+1)a) - \tan(ma)}$.

Donc, $\frac{1}{\cos(a)+\cos((2m+1)a)} = \frac{1}{2\cos((m+1)a)\cos(ma)} = \frac{1}{2\sin(a)}[\tan((m+1)a) - \tan(ma)]$

$S_n(a) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{2\sin(a)}[\tan((m+1)\,a) - \tan(ma)] = \frac{1}{2\sin(a)} \underbrace{\sum_{m=0}^{n}[\tan((m+1)\,a) - \tan(ma)]}_{somme\ télescopique}$

$S_n(a) = \frac{1}{2\sin(a)}\left[\tan\left((n+1)a\right) - \tan(0)\right]$. Ainsi, $S_n(a) = \frac{\tan\left((n+1)a\right)}{2\sin(a)}$.

EXERCIE 4 Une fonction périodique

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$, telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 3\ et\ f(x+1) = \frac{f(x)-5}{f(x)-3}$.

1. Calculer $f(x+2)$ en fonction de $f(x)$.
2. En déduire que f est 4-périodique.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x+2 \in \mathbb{R}\ et\ x+4 \in \mathbb{R}\ et\ f(x+2) = \frac{f(x+1)-5}{f(x+1)-3} = \frac{\frac{f(x)-5}{f(x)-3}-5}{\frac{f(x)-5}{f(x)-3}-3} = \frac{f(x)-5-5f(x)+15}{f(x)-5-3f(x)+9} = \frac{10-4f(x)}{4-2f(x)} = \frac{5-2f(x)}{2-f(x)}$.
2. Par conséquent, $f(x+4) = \frac{5-2f(x+2)}{2-f(x+2)} = \frac{5-2\frac{5-2f(x)}{2-f(x)}}{2-\frac{5-2f(x)}{2-f(x)}} = \frac{10-5f(x)-10+4f(x)}{4-2f(x)-5+2f(x)} = -\frac{f(x)}{-1} = f(x)$. Ainsi, f est 4-périodique.

EXERCICE 5 Un peu des complexes de module 1.

Soient a, b, c trois nombres complexes de module 1 tous distincts.

1. Montrer que : $Re(3+4a+a^2) \geq 0$.
2. Montrer que : $\frac{a(c-b)^2}{b(c-a)^2} \in \mathbb{R}^+$.

Posons $a = e^{i\alpha}, b = e^{i\beta}\ et\ c = e^{i\gamma}$.

1. Alors $3+4a+a^2 = 3+4e^{i\alpha} + e^{i2\alpha} = 3+4\cos(\alpha)+\cos(2\alpha)+i[4\sin(\alpha)+\sin(2\alpha)]$. Donc,
2. $Re(3+4a+a^2) = 3+4\cos(\alpha)+\cos(2\alpha) = 3+4\cos(\alpha)+2\cos^2(\alpha)-1$

   $= 2+4\cos(\alpha)+2\cos^2(\alpha) = 2(1+2\cos(\alpha)+\cos^2(\alpha)) = 2(1+\cos(\alpha))^2 \geq 0.$

   Donc, $Re(3+4a+a^2) \geq 0$.

2. $\frac{a(c-b)^2}{b(c-a)^2} = \frac{e^{i\alpha}\left(e^{i\gamma}-e^{i\beta}\right)^2}{e^{i\beta}\left(e^{i\gamma}-e^{i\alpha}\right)^2} = \frac{e^{i\alpha}e^{i2\gamma}\left(1-e^{i(\beta-\gamma)}\right)^2}{e^{i\beta}e^{i2\gamma}\left(1-e^{i(\alpha-\gamma)}\right)^2} = \frac{e^{i\alpha}\left(-2isin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)e^{\frac{i(\beta+\gamma)}{2}}\right)^2}{e^{i\beta}\left(-2isin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)e^{\frac{i(\alpha+\gamma)}{2}}\right)^2} = \frac{e^{i\alpha}\,(-2i)^2sin^2\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)e^{i(\beta+\gamma)}}{e^{i\beta}(-2i)^2sin^2\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)e^{i(\alpha+\gamma)}}$

   $\frac{a(c-b)^2}{b(c-a)^2} = \frac{sin^2\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{sin^2\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}e^{i(\alpha-\beta+\beta+\gamma-\alpha-\gamma)} = \frac{sin^2\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{sin^2\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}e^{i0} = \frac{sin^2\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{sin^2\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}$. Donc, $\frac{a(c-b)^2}{b(c-a)^2}$ est un réel positif.

Fin.