

DS 2

CALCULATRICE et AUTRE OUTILS NUMERIQUE NON AUTORISES. DUREE 4 HEURES.
INTERDICTION DE SORTIR DE LA SALLE LA PREMIERE HEURE

Le sujet comporte 2 pages (1 feuille recto-verso). Les exercices sont indépendants.

QUELQUES CONSIGNES :

- Bien lire tout le sujet avant de commencer.
 - Traiter les exercices dans l'ordre que vous souhaitez.
 - Justifier toutes vos réponses. Bien relire chaque raisonnement et s'assurer que :
 - Vous n'avez pas d'emblée affirmé que la propriété à démontrer est vraie (sans justifier). Posez - vous les bonnes questions : je sais que ? ou je cherche quand ou qui ? ou je veux montrer que ?
 - Le raisonnement est clairement exposé : avec une syntaxe correcte en maths et en français.
- Relisez-vous pour vous assurer que vous avez bien écrit ce que vous vouliez dire (en maths comme en français).
- Les liens logiques (donc, si et seulement si, car, alors, si, par conséquent, je sais que, en conclusion, ..., $\Leftrightarrow, \Rightarrow$) sont utilisés et utilisés à bon escient.
 - La phrase réponse, attendue et soulignée (ou encadrée ou surlignée) répond clairement à la question posée.

Si vous avez un doute sur l'énoncé (erreur d'énoncé ??), n'hésitez pas à demander au professeur-surveillant.

EXERCICE 1 Des inégalités ; les parties A, B et C sont indépendantes.

Soit n un entier supérieur à 2 et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels strictement positifs.

A . Une première comparaison

1. Montrer grâce à une fameuse inégalité du cours que :

$$1 \leq |1 - a_1| + |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + |a_3 - a_4| + \dots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n|.$$

B. Comparaison de moyennes

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(x) \leq x - 1$.
3. On pose :

$$m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \text{ la moyenne arithmétique des réels } a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$g = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \text{ la moyenne géométrique des réels } a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$h = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}} \text{ la moyenne harmonique des réels } a_1, a_2, \dots, a_n .$$

- a. En appliquant l'inégalité obtenue au 2. à chaque réel $\frac{a_k}{m}$, montrer que $g \leq m$.
- b. En appliquant l'inégalité obtenue au 3. a. aux réels $\frac{1}{a_k}$, montrer que $h \leq g$.

C . Autre comparaison

4. Montrer que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \geq 2$.
5. En déduire que $(\sum_{k=1}^n a_k)(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}) \geq n^2$.
6. Redémontrer cette dernière inégalité à l'aide d'une autre fameuse inégalité de cours.

EXERCICE 2 Formule du binôme de Newton-Partie entière.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Notons $u_n = (\sqrt{3} + 1)^{2n} = \overbrace{((\sqrt{3} + 1)^2)^n}^{**}$ et $v_n = (\sqrt{3} - 1)^{2n} = \overbrace{((\sqrt{3} - 1)^2)^n}^{**}$.
 - Montrer que $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ est un entier pair.
 - En déduire que 2^{n+1} divise $u_n + v_n$. (on utilisera les expressions ** de u_n et v_n)
- En déduire que 2^{n+1} divise $\lfloor (\sqrt{3} + 1)^{2n} \rfloor + 1$. En déduire la parité de $\lfloor (\sqrt{3} + 1)^{2n} \rfloor$.

EXERCICE 3 Une somme et un produit trigonométriques ; les parties A et B sont indépendantes.

A. Le produit

Soit $x \in]0, \pi[$. Pour tout entier naturel n , on pose $P_n(x) = \prod_{k=0}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

- On pose $u_n = \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) P_n(x)$. Montrer que la suite (u_n) est géométrique.
- En déduire une autre expression de $P_n(x)$ (sans $\prod$).

B. Une somme

- Rappeler la formule de factorisation de $\cos(p) + \cos(q)$.
- Soit m un entier naturel non nul.

Résoudre l'équation (e_m) : $\cos(x) + \cos((2m+1)x) = 0$ d'inconnue x réelle.

On note D l'ensemble des réels qui ne sont solutions d'aucune équation (e_m) .

Autrement dit, $D = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \text{Sol}(e_m)$.

Soit $a \in D$. On pose $S_n(a) = \frac{1}{\cos(a) + \cos(3a)} + \frac{1}{\cos(a) + \cos(5a)} + \dots + \frac{1}{\cos(a) + \cos((2n+1)a)}$.

- Compléter $S_n(a) = \sum_{m=1}^n \frac{1}{\cos(a) + \dots}$
- Soit x et y deux réels tels que $\tan(x)$ et $\tan(y)$ existent.

Montrer que : $\tan(x) - \tan(y) = \frac{\sin(x-y)}{\cos(x)\cos(y)}$.

- Déduire de tout ce qui précède, une expression (sans $\sum$) de $S_n(a)$ (attention à ne pas diviser par 0).

EXERCICE 4 Un peu des complexes de module 1.

Soient a, b, c trois nombres complexes de module 1 tous distincts.

- Montrer que : $\frac{a(c-b)^2}{b(c-a)^2} \in \mathbb{R}^+$.
- Montrer que : $\text{Re}(3 + 4a + a^2) \geq 0$.

EXERCICE 5 Une fonction périodique.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$, telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 3$ et $f(x+1) = \frac{f(x)-5}{f(x)-3}$.

- Calculer $f(x+2)$ en fonction de $f(x)$.
- En déduire que f est 4-périodique.

Fin.

*Bonnes vacances à tous ! Reposez-vous, ressourcez-vous.
Organisez-vous pour travailler régulièrement !*