

Pendant les vacances

- Apprendre votre cours sur les nombres complexes. Cf Résumés.
- Chaque jour, faire :
 - Un exercice sur les complexes
 - Un calcul de dérivée (se référer au formulaire de dérivation)
 - Un calcul de limite (s'exercer d'abord sur l'exemple de la fiche de méthode du calcul de limite)
- Colle à préparer et DL à chercher et rédiger

Les corrigés seront mis sur cahier de prépa

JOUR 1

Ex 1 Complexes et géométrie.

Trouver tous les points M d'affixe z tels que $|z| = |1 - z| = \left| \frac{1}{z} \right|$ (même question avec $\operatorname{Re}\left(\frac{i-z}{2z+3-i}\right) = 0$).

Ex 2 Dérivée d'un produit et dérivée d'une combinaison linéaire.

Soit $f(x) = 5 \tan(x) \cos(x) - 3\sqrt[5]{x} \ln(x)$. Déterminer le domaine de définition D de f . Justifier que f est dérivable sur D et calculer $f'(x)$ pour $x \in D$.

Ex 3 Calcul de limite par mise en facteur des termes dominants

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-7x+3e^x}{\ln(x)-4e^x+2x}$.

JOUR 2

Ex 1 Sommes trigonométriques.

Soit n un entier naturel non nul. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n \sin^2(kx)$, $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{\cos^k(x)}$ et $V_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(2kx)$.

Ex 2 Dérivée d'un quotient et d'une composée simple

Soit $f(x) = \frac{e^{5x} - \sin(4x)}{\sqrt{1+5x}}$. Déterminer le domaine de définition D de f . Justifier que f est dérivable sur D et calculer $f'(x)$ pour $x \in D$.

Ex 3 Calcul de limite en a par factorisation et simplification par $(x - a)$

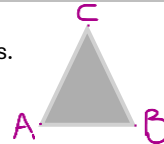
Déterminer $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^3 + x^2 + x - 1}{\sqrt[3]{1-8x^3}}$.

JOUR 3

Ex 1 j l'une des trois racines troisièmes de l'unité.

Soit a, b et c trois complexes distincts et A, B et C leurs images ponctuelles respectives.

Montrer que : le triangle ABC est équilatère direct (Cf dessin) si et ssi $a + bj + cj^2 = 0$.



Ex 2 Dérivée d'une composée

Soit $f(x) = \sqrt{3 - 2 \sin(5x)}$. Déterminer le domaine de définition D de f . Justifier que f est dérivable sur D et calculer $f'(x)$ pour $x \in D$.

Soit $f(x) = \sqrt[6]{\ln(x)} - \ln(\sqrt[6]{x})$. Déterminer le domaine de définition D de f . Justifier que f est dérivable au moins sur $D \setminus \{1\}$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in D \setminus \{1\}$.

Ex 3 Utiliser la quantité conjuguée

Soit $f: \left(x \mapsto \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}} \right)$. Déterminer le domaine de définition de f et étudier la limite en 0 de $\tau(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. Qu'en déduit-on ?

JOUR 4

Ex 1 Racines carrées complexe. Equation du second degré. Exponentielle complexe.

1. Donner les racines carrées complexes des nombres complexes a suivants $a = -3$ puis $a = -2i$ puis $a = -12 + 16i$ puis $a = \frac{-1-\sqrt{3}i}{i-1}$.

2. Résoudre les équations suivantes

- a. $e^{2z} + e^z + 1 = 0$ d'inconnue z complexe
- b. $(-4 - 2i)z^2 + (7 - i)z + 1 + 3i = 0$ d'inconnue z complexe
- c. $\begin{cases} z + \bar{w} = -1 + 2i \\ \bar{z}w = 1 + 7i \end{cases}$ d'inconnue $(z, w) \in \mathbb{C}^2$.

Ex 2 Dérivée de Arcsin , Arctan et Arccos

1. Soit $f(x) = 2\operatorname{Arcsin}(x) \times \operatorname{Arccos}(x) - 5\operatorname{Arctan}(x)$. Déterminer le domaine de définition D de f . Justifier que f est dérivable au moins sur $D' = D \setminus \{-1, 1\}$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in D'$.

2. Soit $f(x) = \operatorname{Arcsin}(x^2 - 1)$. Déterminer le domaine de définition D de f . Justifier que f est dérivable au moins sur $D' = D \setminus \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in D'$.

Ex 3 Fonction bornée \times Fonction de limite nulle

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)(x - \lfloor x \rfloor)$.

JOUR 5

Ex 1 Racines nièmes complexes-Equations polynomiales.

- Donner les racines $n^{\text{ièmes}}$ complexes des nombres complexes a suivants : $a = 1$ et $n = 7$ puis $a = j$ et $n = 5$ puis $a = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2-2i}$ et $n = 4$.
- Résoudre les équations suivantes :
 - $1 - i(1 - z)^4 = 0$
 - $z^n = 3^n$
 - $64(z - 1)^6 + (z + 1)^6 = 0$
 - $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$
 - $(z - i)^n = (z + i)^n$ où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Ex 2 Dérivée

Soit $f(x) = \tan^3(4x + 1)$. Déterminer le domaine de définition D de f . Justifier que f est dérivable sur D et calculer $f'(x)$ pour $x \in D$.

Ex 3 Faire apparaître une limite usuelle

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sqrt{144x})}{\sin(\sqrt[3]{8x})}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(5x^2 + 2x)\sqrt{4x^2 - x + 1}$

JOUR 6

Ex 1 Racines 4ièmes complexes

Calculer de deux manières les racines quatrièmes de $1 + i\sqrt{3}$. En déduire les valeurs de $\cos \frac{13\pi}{12}$ et $\sin \frac{13\pi}{12}$.

Ex 2 Dérivée d'un produit et d'une composée

Soit $f(x) = xe^{\frac{x}{x^2-1}}$. Déterminer le domaine de définition D de f . Justifier que f est dérivable sur D et calculer $f'(x)$ pour $x \in D$.

Ex 3 Se ramener à une limite en 0

Calculer $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

JOUR 7

Ex 1 Linéarisation

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(7t) dt$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(2t) \cos^2(5t) dt$.

Ex 2 Dérivée d'un produit et d'une composée

Soit $f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$. Déterminer le domaine de définition D de f . Justifier que f est dérivable au moins sur $D \setminus \{0\}$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in D \setminus \{0\}$.

Ex 3 SE PLACER PROCHE DU POINT OU DE L'INFINI où l'on calcule la limite -Limite à Droite et limite à gauche

Soit $p \in \mathbb{Z}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow p} [x] + \sqrt[6]{x - [x]}$