coquille dans l'énoncé

CORRIGE JOUR 3

Ex 1 j **l'une des trois racines troisièmes de l'unité.** Soit a, b et c trois complexes distincts et A, B et C leurs images ponctuelles respectives. Montrer que : le triangle ABC est équilatère direct (Cf dessin) si et ssi $a + bj + cj^2 = 0$.

RESOLUTION

ABC est équilatère direct

sietssi $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $AB = AC$

sietssi $arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $|b-a| = |c-a|$

sietssi $arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $\left|\frac{b-a}{c-a}\right| = 1$

sietssi $\frac{c-a}{b-a} = 1e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\underbrace{\textbf{sietssi}}_{\text{car } 1+j=1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ $\frac{c-a}{b-a} = 1 + j$

sietssi $(c-a) - (1+j)(b-a) = 0$

sietssi $ja - (1+j)b + c = 0$

sietssi $a - \left(\frac{1}{j} + 1\right)b + \frac{1}{j}c = 0$ On divise par $j \neq 0$.

sietssi $a - (j^2+1)b + j^2c = 0$

$\underbrace{\textbf{sietssi}}_{\text{car } 1+j+j^2=1 \text{ donc} -j^2-1=j}$ $a + jb + j^2c = 0$.

COURS

Si $A \neq B$ et $C \neq D$ alors

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

$AB = |z_B - z_A|$.

$\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}^*, \frac{|z|}{|z'|} = \left|\frac{z}{z'}\right|$.

$\forall z \in \mathbb{C}, \forall r \in \mathbb{R}^*, \forall \theta \in \mathbb{R}$,

$\begin{cases} |z| = r \\ arg(z) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow z = re^{i\theta}$.

Quand je connais le module et un argument d'un complexe, je connais la forme trigonométrique de ce complexe.

$j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc, $1 + j = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$j^3 = 1$ donc $j^2 = \frac{1}{j}$

$1 + j + j^2 = 0$.

Ex 2 Dérivée d'une composée

- Soit $f(x) = \sqrt{3 - 2\sin(5x)}$. Déterminer le domaine de définition D de f. Justifier que f est dérivable sur D et calculer $f'(x)$ pour $x \in D$.
- Soit $f(x) = \sqrt[6]{\ln(x)} - \ln(\sqrt[6]{x})$. Déterminer le domaine de définition D de f. Justifier que f est dérivable au moins sur $D\backslash\{1\}$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in D\backslash\{1\}$.

$f(x) = \sqrt{3 - 2\sin(5x)}$ existe sietssi $3 - 2\sin(5x) \geq 0$ sietssi $\sin(5x) \leq \frac{3}{2}$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(5x) \leq 1 < \frac{3}{2}$. Donc, $Df = D = \mathbb{R}$.

Dans l'expression de f ,seule la fonction racine carrée n'est pas dérivable sur tout son domaine de définition, cette fonction racine carrée n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $3 - 2\sin(5x) \in \mathbb{R}^{+*}$. Par conséquent, f est dérivable sur tout $D = \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = \frac{-10\cos(5x)}{2\sqrt{3-2\sin(5x)}} = \frac{-5\cos(5x)}{\sqrt{3-2\sin(5x)}}$.

$f(x) = \sqrt[6]{\ln(x)} - \ln(\sqrt[6]{x})$ existe $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) \geq 0 \\ x \geq 0 \\ \sqrt[6]{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \\ x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$. Donc $D = Df = [1; +\infty[$.

Dans l'expression de f ,seule la fonction racine 6ième n'est pas dérivable sur tout son domaine de définition, cette fonction n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^{+*}$. Or, $\forall x \in]1\,; +\infty[, x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\ln(x) \in \mathbb{R}^{+*}$. Donc f est au moins dérivable sur $]1\,; +\infty[$.

Et, $\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) = \frac{1}{6x}\ln(x)^{-\frac{5}{6}} - \frac{\frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{6}}} = \frac{1}{6x\sqrt[6]{\ln(x)^5}} - \frac{1}{6x}$.

Rq : j'aurais pu(du) simplifier $\ln(\sqrt[6]{x})$ avant de dériver en écrivant $\ln(\sqrt[6]{x}) = \ln\left(x^{\frac{1}{6}}\right) = \frac{1}{6}\ln(x)$.

$\sin(x)$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

$\sqrt{X}$ existe $\Leftrightarrow X \in \mathbb{R}^+$.

$\forall X \in \mathbb{R}\ -1 \leq \sin(X) \leq 1$.

$\sqrt[6]{X}$ existe $\Leftrightarrow X \in \mathbb{R}^+$.

$ln(X)$ existe $\Leftrightarrow X \in \mathbb{R}^{+*}$.

sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $sin' = cos$.

La fonction racine carrée n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^{+*}$et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$(\sqrt{\ldots})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

ln est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

La fonction racine sixième réelle n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^{+*}$et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $(\sqrt[6]{\ldots})'(x) = \frac{1}{6}x^{\frac{1}{6}-1} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$.

Soit u et v deux fonctions dérivables sur respectivement $D_{u'}$ et $D_{v'}$.

Alors $u \circ v$: $\underbrace{(x \mapsto u(v(x)))}_{**}$ est dérivable sur $D' = \{x \in D_{v'}\ / v(x) \in D_{u'}\}$ et $\forall x \in D'$, $(u \circ v)'(x) = v'(x) \times u'(v(x))$

Donc $(x \mapsto \sqrt{u(x)})$est dérivable sur $\{x \in D_{u'} / u(x) > 0\}$. Et $(\sqrt{u})'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

Et $ln(u)$ et $\sqrt[6]{u}$ sont dérivables sur $\{x \in D_{u'} / u(x) > 0\}$

et $(ln(u))'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

et $\left(\sqrt[6]{u}\right)'(x) = \frac{u'(x)}{6\sqrt[6]{u(x)^5}}$.

** composée de u et v

Ex 3 Utiliser la quantité conjuguée-Limite à gauche et limite à droite.

Soit f: $\left(x \mapsto \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}\right)$. Déterminer le domaine de définition de f et étudier la limite en 0 de $\tau(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. Qu'en déduit-on ?

$\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ existe sietssi $\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ 1 - \sqrt{1 - x^2} \geq 0 \end{cases}$ sietssi $\begin{cases} (1-x)(1+x) \geq 0 \\ \underbrace{1 \geq 1 - x^2}_{TJS\ VRAI} \end{cases}$ sietssi $x \in [-1; 1]$.

Donc Df=$[-1; 1]$.

$\forall x \in [-1; 1]\backslash\{0\}, \tau(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}}{x} = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}}{x\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}}$

$\sqrt{X}$ existe $\Leftrightarrow X \in \mathbb{R}^+$.

Quantité conjuguée : $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$,

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

$$= \frac{\sqrt{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}} = \frac{\sqrt{1-(1-x^2)}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}} = \frac{\sqrt{x^2}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}} = \frac{|x|}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\tau(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}} \; si\ 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}} \; si - 1 \leq x < 0 \end{cases}.$$

Donc, $\lim_{x \to 0^+} \tau(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\lim_{x \to 0^-} \tau(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc τ n'a pas de limite en 0. f n'est donc pas dérivable en 0.

$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$.

$\forall x \in \mathbb{R}, |x| = \begin{cases} x\ si\ x \geq 0 \\ -x\ si\ x < 0 \end{cases}$.

Soi a un réel .

$\lim_{x \to a} g(x)$ *existe et vaut* $L \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lim_{x \to a^+} g(x) = L \\ \lim_{x \to a^-} g(x) = L \\ L = g(a)\ si\ a \in D_g \end{cases}$$

f est dérivable en a lorsque $a \in D_f$ et $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite finie en a et lorsque cette limite finie existe, on définit $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.