CORRIGE JOUR 1

Ex 1 Complexes et géométrie. Trouver tous les points M d'affixe z tels que $|z| = |1-z| = \left|\frac{1}{z}\right|$ (même question avec $Re\left(\frac{i-z}{2z+3-i}\right) = 0$).

Résolution

1. Soit z un complexe non nul tel que $z = x + iy$. Soit M le point d'affixe z ; autrement dit, (x, y) sont les coordonnées de M.

$$|z| = |1-z| = \left|\frac{1}{z}\right| \Leftrightarrow |z| = |1-z| = \frac{1}{|z|} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |1-z| \\ |z| = \dfrac{1}{|z|} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |1-z| \\ |z|^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |1-z| \\ |z| = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} OM = AM \\ OM = 1 \end{cases} \overset{Aff(A)=1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} M \in med[O, A] \\ M \in C(O; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \\ ou \\ z = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} M = M_1\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \\ ou\ M = M_2\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) \end{cases}}.$$

2. Soit z un complexe tel que $2z + 3 - i \neq 0$ $i.e. z \neq -\frac{3}{2} + \frac{i}{2}$.
Soit M le point d'affixe z.

$Re\left(\frac{i-z}{2z+3-i}\right) = 0 \Leftrightarrow z = i$ ou $\exists k \in \mathbb{Z}/arg\left(\frac{i-z}{2z+3-i}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow z = i$ ou $\exists k \in \mathbb{Z}/arg\left(\frac{-(z-i)}{2(z-(\frac{i}{2}-\frac{3}{2}))}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow z = i$ ou $\exists k \in \mathbb{Z}/arg\left(\frac{(z-i)}{(z-(\frac{i}{2}-\frac{3}{2}))}\right) + \arg\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow z = i$ ou $\exists k \in \mathbb{Z}/arg\left(\frac{(z-i)}{(z-(\frac{i}{2}-\frac{3}{2}))}\right) + \pi = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $Aff(A) = \frac{i}{2} - \frac{3}{2}$ et $Aff(B) = i$

$\Leftrightarrow z = i$ ou $\exists k \in \mathbb{Z}/(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) + \pi = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow$ $M = B$ ou $\exists k \in \mathbb{Z}/(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \frac{-\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow$ ($M = B$ ou M est sur le cercle de diamètre $[A, B]$)et $M \neq A$.

$\Leftrightarrow$ $\boxed{M \text{ est sur le cercle de diamètre } [A, B] \text{ et } M \neq A}$.

Cours

$\forall z \in \mathbb{C}^*, \forall z' \in \mathbb{C}, \left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$.

$\forall M(z) \in \mathcal{P}, OM = |z|$.

$med[O, A]$, la médiatrice du segment $[0, A]$ est l' ensemble des points M tels que MA = MB (i.e. qui sont à égale distance de A et de B).

$C(O; 1)$,le cercle de centre O et de rayon 1, est donc l'ensemble des points M tels que $OM = 1$ i.e. l'ensemble des points $M(x; y)$tels que: $x^2 + y^2 = 1$.

$\forall Z \in \mathbb{C}$,
$[Re(Z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Z = 0 \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z}/arg(Z) \equiv \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}]$.

$\forall (z, z') \in {\mathbb{C}^2}^*, arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv arg(z') - arg(z)\ [2\pi]$.

Pour tous A, N, B M points du plan tels que A $\neq$ N et B $\neq$ M,
$(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{BM}) \equiv \arg\left(\frac{z_M - z_B}{z_N - z_A}\right)$ $[2\pi]$.

Le cercle de diamètre $[A, B]$ privé de A et B est l'ensemble des points M tels que : $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \equiv \frac{-\pi}{2}$ $[\pi]$.

Ex 2 Dérivée d'un produit et dérivée d'une combinaison linéaire. Soit $f(x) = 5\tan(x)\cos(x) - 3\sqrt[5]{x}\ln(x)$. Déterminer le domaine de définition D de f. Justifier que f est dérivable sur D et calculer $f'(x)$ pour $x \in D$.

- $f(x)$ existe sietssi $\begin{cases} x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi/k \in \mathbb{Z}\} \\ \text{et} \\ x > 0 \end{cases}$ sietssi $x \in \mathbb{R}^{+*}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi/k \in \mathbb{N}\}$.

Donc $\boxed{D = \mathbb{R}^{+*}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi/k \in \mathbb{N}\}}$.

- Dans l'expression de f, seule la fonction $\sqrt[5]{..}$ n'est dérivable pas sur tout son domaine de définition mais dérivable que sur $\mathbb{R}^*$. Or, ici, $D \subset \mathbb{R}^{+*}$. Donc la fonction $\sqrt[5]{..}$ est dérivable que sur D. f s'écrit donc comme une **combinaison linéaire** ** de fonctions produits de fonctions dérivables sur D. Donc f est dérivable sur D.
- Et $\forall x \in D, f'(x) = 5\left(\frac{1}{cos^2(x)}\cos(x) + \tan(x)\,(-\sin(x))\right) - 3\left(\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}\ln(x) + \frac{\sqrt[5]{x}}{x}\right)$

$f'(x) = 5\left(\frac{1-sin^2(x)}{\cos(x)}\right) - 3\left(\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}\ln(x) + x^{\frac{1}{5}-1}\right)$.

$\boxed{\forall x \in D, f'(x) = 5(\sin(x)) - 3\left(\frac{1}{5}\ln(x) + 1\right)\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}}$.

RQUE : j'aurais pu (dû) simplifier $f(x)$ avant de dériver en écrivant : $\tan(x)\cos(x) = \sin(x)$.

$\tan(x)$ existe
$\Leftrightarrow x \in \underbrace{\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi/k \in \mathbb{Z}\}}_{D_{tan}}$.

$\ln(x)$ existe$\Leftrightarrow x \in \underbrace{\mathbb{R}^{+*}}_{D_{ln}}$.

$\sqrt[5]{x}$ existe$\Leftrightarrow x \in \underbrace{\mathbb{R}}_{D_{\sqrt[5]{..}}}$.

cos(x) existe$\Leftrightarrow x \in \underbrace{\mathbb{R}}_{D_{cos}}$.

tan, cos et ln sont dérivables sur leur propre domaine de définition.

$$tan'(x) = 1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$$
$$\cos(x) = -\sin(x)$$
$$ln'(x) = \frac{1}{x}$$

La fonction $\sqrt[5]{..}$ n'est pas dérivable sur tout son domaine de définition mais dérivable uniquement sur $\mathbb{R}^*$.

$$(\sqrt[5]{..})'(x) = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{6}x^{\frac{-4}{5}}$$

Soit u et v deux fonctions dérivables sur D et λ et β des réels. Alors $\underbrace{\lambda u + \beta v}_{**}$ et $\underbrace{uv}_{*}$ sont dérivables sur D et
$\forall x \in D$,
$(\lambda u + \beta v)'(x) = \lambda u'(x) + \beta v'(x)$
$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

** **une combinaison linéaire de u et v.**
* **le produit de u et v.**

Ex 3 Calcul de limite par mise en facteur des termes dominants Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-7x+3e^x}{\ln(x)-4e^x+2x}$.

$\frac{1-7x+3e^x}{\ln(x)-4e^x+2x} = \frac{3e^x(3e^{-x}-\frac{7}{3}\frac{x}{e^x}+1)}{-4e^x\left(\frac{-1}{4}\frac{\ln(x)}{e^x}+1-\frac{1}{2}\frac{x}{e^x}\right)} = -\frac{3}{4}\frac{(3e^{-x}-\frac{7}{3}\frac{x}{e^x}+1)}{\left(\frac{-1}{4}\frac{\ln(x)}{e^x}+1-\frac{1}{2}\frac{x}{e^x}\right)}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\overset{CC}{\triangleq}0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}\overset{CC}{\triangleq}0$ et $\forall x>0$, $\frac{\ln(x)}{e^x}=\frac{\ln(x)}{x}\times\frac{x}{e^x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{e^x}\overset{CC}{\triangleq}0$. Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-7x+3e^x}{\ln(x)-4e^x+2x}=-\frac{3}{4}$.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\overset{CC}{\triangleq}0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}\overset{CC}{\triangleq}0$