COLLE 4 PCSI

1) Enoncer et démontrer les deux inégalités triangulaires.
2) Soit x et y deux réels. Démontrer que : $(si\ n \in \mathbb{Z}\ alors\ \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n)\ \ et\ \ (x \leq y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor)$.
3) Enoncer et démontrer les formules d'addition de cos et sin .
4) Enoncer et démontrer les formules d'angle double de cos et sin.
5) Enoncer et démontrer la formule d'addition de tan.

QDC : Enoncer et démontrer les inégalités triangulaires.

Ex 1 Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} et\ n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\left|\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right| \leq \frac{1-|x|^{n+1}}{1-|x|}$.

Ex 2 1. Soit t un réel. Exprimer $t^2 + \frac{1}{t^2}$ en fonction de $\left(t+\frac{1}{t}\right)^2$.

2. Prouver que pour tous réels x et y non nuls , $2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right) - 3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) + 6 \geq 0$.

Ex 3 Résoudre $cos(2x) - tan(x) > 1$ sur $[0, \pi]$ puis sur $\mathbb{R}$.

QDC : Enoncer et démontrer la formule d'addition de tan.

Ex 1 Trouver tous les réels m tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ mx^2 + 2(m+1)x + 25m + 12 > 0$.

Ex 2 Montrer que pour tous réels x et y strictement positifs, $\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

Ex 3 Résoudre l'équation $|\lfloor \sin(x) \rfloor| = 1$ d'inconnue x réelle.

QDC : Démontrer : Soit x et y deux réels. Démontrer que : $(si\ n \in \mathbb{Z}\ alors\ \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n)$

Ex 1 Montrer que $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ (0 < a \leq b \leq c \leq d \implies \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \leq \frac{a}{d} + \frac{d}{a})$.

Ex 2 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \left\lfloor \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2 \right\rfloor = 4n+1$.

Ex 3 Calculer $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3+x^2+2x+8}{1-(x+1)^4}$

Ex 4 Démontrer que pour tous les réels x et y , $1 + |xy-1| \leq (1+|x-1|)(1+|y-1|)$ en posant $t = x-1\ et\ s = y-1$.

Ex 4 Soit $f(x) = \cos(2x) - \sin(2x)$.

1) Déterminer un période (la plus petite possible) de f.
2) Résoudre l'inéquation $\cos(2x) - \sin(2x) \geq 1$ d'inconnue x réelle.

Ex 4 Trouver tous les réels m tels que l'équation $mx^2 + 2(4+m)x + 15 + m = 0$ admette deux solutions distinctes de signes opposés.

Ex 4 Soit $h(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1$.

1. Soit x un réel non nul. Posons $Z = x + \frac{1}{x}$.

Montre que : x est racine de $h \Leftrightarrow$ Z est racine d'une fonction polynomiale de degré 2 à déterminer.

2. En déduire les racines réelles de h.

Ex 4 Soit x et y deux rationnels tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont irrationnels. Montrons que : $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est irrationnel.