COLLE 5

1) **Relations entre $tan^2(x)$ et $cos^2(x)$ puis entre $tan(x)$ et $tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.**
2) **La formule d'addition de la fonction tangente**
3) $\forall(z,z^2)\in\mathbb{C}^2, \frac{z+\bar{z}}{2}=Re(z)\ et\ \frac{z+\bar{z}}{2i}=Im(z)$, $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z'}\ \ et\ \ \overline{z\times z'}=\bar{z}\times\bar{z'}$ **et si** $z\neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\bar{z}}$.
4) $\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2$, $|z\times z'|=|z|\times|z'|$ **et si** $z\neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}\ \ et\ \ \left|\frac{z'}{z}\right|=\frac{|z'|}{|z|}$.
5) **Les deux inégalités triangulaires:** $\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2$, $\big||z|-|z'|\big|\leq|z\pm z'|\leq|z|+|z'|$.
6) **Formule d'Euler et identités du losange.**

QDC : Enoncer et démontrer l'inégalité triangulaire

Ex 1 Soit $u\ et\ v$ deux nombres complexes de module 1 tels que $uv\neq-1$. Montrer que $\frac{u+v}{1+uv}\in\mathbb{R}$.
Ex 2 Résoudre $\sqrt{\cos(x)}+\sqrt{\sin(x)}=1$ d' inconnue x réelle.

Ex 3 Montrer que $\forall z\in\mathbb{C}, |z|\leq|z|^2+|1-z|$. On distinguera les cas $|z|\geq 1\ et\ |z|<1$.

QDC : Compléter et démontrer : $\forall(z,z^2)\in\mathbb{C}^2$,
- $\frac{z+\bar{z}}{2}=\cdots\ldots.et\ \frac{z+\bar{z}}{2i}=\cdots$..,
- $\overline{z+z'}=\cdots$
- $\overline{z\times z'}=\cdots$
- si $z\neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\cdots$
- $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$………

Ex 1 Déterminer l'ensemble des points Md'affixe z tels que :
$$z^2+3z-4\in\mathbb{R}.$$
Ex 2
1) Justifier que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1\ et\ \tan\left(\frac{5\pi}{8}\right)=-\sqrt{2}-1$
2) Soit x un réel tel que $t=\tan(x)$ existe.
a) Montrer que $\cos(2x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ et\ \sin(2x)=\frac{2t}{1+t^2}$.
b) En déduire les solutions de l'équation (e): $\cos(2x)=\sin(2x)$.
c) Donner une autre méthode de résolution de (e) .
Ex 3 Représenter $f:\left(x\mapsto\frac{x+1}{3-x}\right)$.

QDC : Enoncer et démontrer les formules d'Euler et identités du losange.

Ex 1 Soit x un réel tel que $t=\tan(x)$ existe. Montrer que $\cos(2x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ et\ \sin(2x)=\frac{2t}{1+t^2}$.
Ex 2 Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, le complexe $\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)^n$est-il réel ?
Ex 3 Déterminer et représenter l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z^2|=|1-z|=|\bar{z}|$.

QDC : Compléter et démontrer $\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2$, $|z\times z'|=\cdots$ et si $z\neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right|=\cdots\ \ et\ \ \left|\frac{z'}{z}\right|=\cdots$.

Ex 1 Déterminer l'ensemble des points Md'affixe z tels que :
$$\left|\frac{2-iz}{i-(4-3i)z}\right|=\frac{1}{5}$$
Ex 2 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\cos\left(\frac{k}{3}\pi\right)$.
Ex 3 Résoudre l'équation $cos^4(x)+sin^4(x)=1$ d' inconnu x réel.

QDC : Démontrer la formule d'addition de la tangente.

Ex 1 Calculer $tan\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.
Ex 2 Soit a, b et c trois complexes de module 1 tels que :
$$a+b+c=1.$$
1. Démontrer que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.
2. En déduire que $ab+bc+ac=abc$. On note $\lambda=abc$.
3. Exprimer $P(z)=(z-a)(z-b)(z-c)$ en fonction de λ.
4. En déduire que l'un des complexes a, b ou c est égal à1.

Ex 3 Soit x un réel. Calculer $S_n=\sum_{k=0}^{n}\cos(2kx)$.

QDC : Démontrer les Relations entre $tan^2(x)$ et $cos^2(x)$ puis entre $tan(x)$ et $tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

Ex 1 Montrer que pour tout réel $x\in D_{tan}$,
$$\cos(2x)=\frac{1-\tan(x)^2}{1+\tan(x)^2}\ et\ \sin(2x)=\frac{2\tan(x)}{1+\tan(x)^2}.$$
Ex 2 Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{k^2+7k+6}$
Ex 3 Déterminer tous les entiers n tels que $(3i-3)^n\in\mathbb{R}$.

QDC : Compléter et démontrer : $\forall(z,z^2)\in\mathbb{C}^2$,

- $\frac{z+\bar{z}}{2} = \cdots \ldots . et\ \frac{z+\bar{z}}{2i} = \cdots$..,
- $\overline{z+z'} = \cdots$
- $\overline{z \times z'} = \cdots$
- si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \cdots$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$.........

Ex 1 Déterminer l'ensemble des points Md'affixe z tels que :

$$\frac{1}{z^2 + 3\bar{z} - 4} \in \mathbb{R}.$$

Ex 2 1) Soit x un réel tel que $t = \tan(x)$ existe.

Montrer que $\cos(2x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin(2x) = \frac{2t}{1+t^2}$.

2) En déduire que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$ et $\tan\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -\sqrt{2} - 1$

3) Trouver par deux méthodes les solutions de l'équation $(e)\colon \cos(2x) = \sin(2x)$.

Ex 3 Représenter $f\colon \left(x \mapsto \frac{x+1}{1-x}\right)$.

QDC : Compléter et démontrer $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$, $|z \times z'| = \cdots$ et si $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \cdots$ et $\left|\frac{z'}{z}\right| = \cdots$.

Ex 1 Déterminer l'ensemble des points Md'affixe z tels que :

$$\left|\frac{2-5iz}{i-(4-3i)z}\right| = 1$$

Ex 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \cos(2k\pi)$.

Ex 3 Résoudre l'équation $cos^4(x) + sin^4(x) = 1$ d' inconnu x réel.

QDC : Démontrer les relations entre $tan^2(x)$ et $cos^2(x)$

)puis entre $tan(x)$ et $tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Ex 1 Montrer que pour tout réel $x \in D_{tan}$,

$$\cos(2x) = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)} \quad et \quad \sin(2x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}.$$

Ex 2 Déterminer et représenter l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z^2| = |1+z| = |\bar{z}|$.

Ex 3 Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^2+7k+6}$

Planche 1

Planche 2

QDC : Démontrer la formule d'addition de la tangente.

Ex 1 Calculer $tan\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

Ex 2 Soit a, b et c trois complexes de module 1 tels que $a + b + c = 1$.

5. Démontrer que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.
6. En déduire que $ab + bc + ac = abc$. On note $\lambda = abc$.
7. Exprimer $P(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$ en fonction de λ.
8. En déduire que l'un des complexes a, b ou c est égal à1.

Ex 3 Soit x un réel. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(2kx)$

Planche 3

QDC : Compléter et démontrer $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$, $|z \times z'| = \cdots$ et si $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \cdots$ et $\left|\frac{z'}{z}\right| = \cdots$.

Ex 1 Soit x un réel tel que $t = \tan(x)$ existe. Montrer que $\cos(2x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin(2x) = \frac{2t}{1+t^2}$.

Ex 2 Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, le complexe $\left(\sqrt{6} - i\sqrt{2}\right)^n$ est-il réel ?

Ex 3 Déterminer et représenter l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z^2| = |1 - z| = |\bar{z}|$.

Ex 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cos\left(\frac{k}{3}\pi\right)$.

Ex 1 1) Montrer que pour tout réel t, $\cos(3t) = 4cos^3(t) - 3\cos(t)$.

2) Soit $\theta = \frac{\pi}{10}$.

a) Justifier que $\cos(3\theta) = \sin(2\theta)$.

b) Déduire de 1) et 2a) que : $4sin^2(\theta) + 2\sin(\theta) - 1 = 0$.

c) Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Ex 4 Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2(t)\sin(3t)\,dt$

Ex 6: 1) Montrer que pour tout réel t, $\cos(3t) = 4cos^3(t) - 3\cos(t)$.

2) Soit $\theta = \frac{\pi}{10}$.

a) Justifier que $\cos(3\theta) = \sin(2\theta)$.

b) Déduire de 1) et 2a) que : $4sin^2(\theta) + 2\sin(\theta) - 1 = 0$.

c) Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

3) Résoudre l'équation $1 + cos(x) + cos(2x) + cos(3x) + cos(4x) = 0$ d'inconnue x réelle.

Ex 1 :

1) Justifier que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$ et $\tan\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -\sqrt{2} - 1$

2) Soit x un réel tel que $t = \tan(x)$ existe.

a) Montrer que $\cos(2x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin(2x) = \frac{2t}{1+t^2}$.

b) En déduire les solutions de l'équation (e): $\cos(2x) = \sin(2x)$.

c) Donner une autre méthode de résolution de (e) .