DL 2

A rendre le lundi 3 novembre

Ex 1 Soit a un paramètre complexe. Résoudre (S) le système linéaire d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$ suivant
$(S) : \begin{cases} x + ay + \bar{a}z = 0 \\ ax + \bar{a}y + z = 0 \\ \bar{a}x + y + az = 0 \end{cases}$. On discutera selon les valeurs du paramètre complexe a.

Ex 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$: pour tout réel x, $f(x) = e^{-x}\left(\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x)\right)$.

1. Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = Ae^{-x}\cos(x + \varphi)$.
2. Chercher les points d'intersection de Cf avec l'axe des abscisses.
3. Calculer la dérivée f' et déterminer les valeurs en lesquelles f' s'annule.
4. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0,4\pi]$.
5. Montrer qu'il existe trois réels a , b et c tels que : pour tout réel x , $af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$. (on dit alors que f vérifie l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$).

Ex 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1) Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$.
2) En déduire $\sum_{k=0}^{n-1}(1 + \omega^k)^n$.

A rendre le jeudi 6 novembre

Ex 4 Soit $h: (x \mapsto x - \lfloor x \rfloor)$ et $g: (x \mapsto |2x - 1|)$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -\lfloor x \rfloor - 1 \; si \; x \notin \mathbb{Z} \\ -x \; si \; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$
2. Montrer que $f = g \circ h$ est paire, périodique.
3. Soit $k \in \mathbb{Z}$.
   a) Déterminer, si elle existe, la limite de f en k^+ (i.e. quand $x \to k$ et $x > k$) . indication : on se placera pour cela sur l'intervalle $]k; k+1[$
   b) Faire de même en k^-.
   c) Qu'en déduit-on sur f ?
4. Tracer Cf.

Ex 5 Soit a et b deux paramètres complexes distincts et n un entier naturel non nul.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z - a)^n = (z - b)^n$.
2. Montrer que les points images des solutions sont alignés sur la médiatrice de $[A, B]$ où A est l'image ponctuelle de a et B celle de b .
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que toutes les solutions soient réelles. On pose alors $a = re^{i\alpha}$ avec $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner une expression simplifiée des solutions (qui permette de voir clairement qu'elles sont réelles).
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour toutes les solutions soient imaginaires pures. On pose alors $a = re^{i\alpha}$ avec $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner une expression simplifiée des solutions (qui permette de voir clairement qu'elles sont imaginaires pures)