CORRIGE JOUR 4

Ex 1 Racines carrées complexe. Equation du second degré. Exponentielle complexe.

1.Donner les racines *carrées* complexes des nombres complexes a suivants $a=-3$ puis $a=-2i$ puis $a=-12+16i$ puis $a=\frac{-1-\sqrt{3}i}{i-1}$.

2.Résoudre les équations suivantes

a. $e^{2z}+e^{z}+1=0$ d'inconnue z complexe

b. $(-4-2i)z^2+(7-i)z+1+3i=0$ d'inconnue z complexe

c. $\begin{cases} z+\overline{w}=-1+2i \\ \overline{z}w=1+7i \end{cases}$ d'inconnue $(z,w)\in\mathbb{C}^2$.

$a=-3=i^2\sqrt{3}^2=-3 \;=(\sqrt{3}i)^2$.

Donc $\sqrt{3}i$ est une racine carrée complexe de -3. L'autre racine carrée est $-\sqrt{3}i$.

$a=-2i=(1-i)^2$.

Donc $1-i$ est une racine carrée complexe de $-2i$. L'autre racine carrée est alors $i-1$.

$a=-2i=2e^{-i\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}^{2(e^{-i\frac{\pi}{4}})^2}=\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^2$

Donc $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ est une racine carrée complexe de $-2i$. L'autre racine carrée est alors $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. On retrouve les mêmes racines carrées car :

$\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\;\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1-i.$

$$\begin{aligned} a=-12+16i &= 4(-3+4i) \\ &= 4(-3+2\times 2i) \\ &= 4(-4+1+2\times 2i) \\ &= 2^2((2i)^2+1^2+2\times1\times 2i) \\ &= 2^2(1+2i)^2=[2(1+2i)]^2 \\ a &= (2+4i)^2 \end{aligned}$$

Donc $2+4i$ est une racine carrée complexe de $-12+16i$. L'autre racine carrée complexe est alors $-(2+4i)$.

$a=-12+16i$. Alors,

$x+iy$ est une racine carrée complexe de a

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} \delta^2=a \\ |\delta^2|=|a| \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2+2ixy=-12+16i \\ x^2+y^2=\sqrt{(-12)^2+16^2}=20 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-12 \\ 2xy=16 \\ x^2+y^2=\sqrt{(-12)^2+16^2}=20 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=8 \\ 2y^2=32 \\ xy=8 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm2 \\ y=\pm4 \\ xy=8 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases} ou \begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}. \end{aligned}$$

Donc$-(2+4i)$ et $2+4i$ sont les racines carrées complexes de $-12+16i$.

$$a=\frac{-1-\sqrt{3}i}{i-1}=\frac{2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)}=\sqrt{2}\frac{e^{i\frac{4\pi}{3}}}{e^{i\frac{3\pi}{4}}}=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}.$$

Donc $\pm\sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{24}\right)}$ sont les deux racines carrées complexes de $\frac{-1-\sqrt{3}i}{i-1}$.

Notons (E) l'équation: $e^{2z}+e^{z}+1=0$ d'inconnue z complexe

Soit $z=x+iy\in\mathbb{C}\; tq\; x,y\; réels\; et\;\; \mathbb{Z}=e^{z}$.

$$\begin{aligned} &e^{2z}+e^{z}+1=0 \\ &\Leftrightarrow \mathbb{Z}^2+\mathbb{Z}+1=0 \\ &\Leftrightarrow \mathbb{Z}=j \; ou\; \mathbb{Z}=j^2 \\ &\Leftrightarrow e^{z}=e^{i\frac{2\pi}{3}}\; ou\; e^{z}=e^{i\frac{4\pi}{3}} \\ &\Leftrightarrow e^{x}e^{iy}=e^{i\frac{2\pi}{3}}\; ou\; e^{x}e^{iy}=e^{i\frac{4\pi}{3}} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e^{x}=1 \\ \exists k\in\mathbb{Z}/y=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \end{cases} ou \begin{cases} e^{x}=1 \\ \exists k\in\mathbb{Z}/y=\frac{4\pi}{3}+2k\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \exists k\in\mathbb{Z}/y=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \end{cases} ou \begin{cases} x=0 \\ \exists k\in\mathbb{Z}/y=\frac{4\pi}{3}+2k\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/z=i\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)\; ou\; z=i\left(\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right). \end{aligned}$$

$Ainsi,\; Sol=\left\{i\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right),i\left(\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right)\;\; /k\in\mathbb{Z}\right\}.$

Soit (E) l'équation $(-4-2i)z^2+(7-i)z+1+3i=0$ d'inconnue z cpxe.

Posons $\Delta=(7-i)^2-4(1+3i)(-4-2i)=49-14i-1-4(-4-12i-2i+6)$

Donc $\Delta=40+42i$. Cherchons les racines carrées de $\Delta=40+42i$.

<u>**1ère méthode**</u> : On cherche $\delta=x+iy$ tel que : $(x+iy)^2=3-4i$.

$$(x+iy)^2=40+42i\Leftrightarrow\begin{cases} (x+iy)^2=40+42i \\ |(x+iy)^2|=|40+42i| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-y^2+i2xy=40+42i \\ |(x+iy)^2|=\sqrt{3364}=58 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-y^2=40 \\ 2xy=42 \\ x^2+y^2=58 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2x^2=98 \\ 2y^2=18 \\ xy=21 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\pm49 \\ y=\pm9 \\ xy=21 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow\begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}\; ou\;\begin{cases} x=-7 \\ y=-3 \end{cases}$. Donc, $7+3i$ et$-7-3i$ sont les racines carrées de $40+42i$.

<u>**2ème méthode :**</u> $\Delta=40+42i=40+2\times7\times3\times i=49-9+2\times7\times3i=7^2+(3i)^2+2\times7\times3i=(7+3i)^2$.

Une racine $n$ième complexe du complexe a est un complexe z tel que $z^n=a$.

Tout complexe possède au moins une racine carrée (ou deuxième) complexe.

Tout complexe non nul a exactemenet deux racines carrées complexes qui sont opposées.

Soit n un entier tel que $n\geq2$. Si $a=re^{i\theta}\in\mathbb{C}^*$ tq $r\in\mathbb{R}^{+*}$ et $\theta\in\mathbb{R}$ alors les racines $n$ièmes de a sont les n nombres complexes : $\sqrt[n]{r}e^{\frac{i\theta}{n}}e^{ik\frac{2\pi}{n}}$ tq $k\in[\![0;n-1]\!]$.

Méthodes : Soit n un entier tel que $n\geq2$.

1. Si $a\in\mathbb{C}^*$ alors $\delta=x+iy$ est une racine carrée de $a\Leftrightarrow\begin{cases} Re(\delta^2)=Re(a) \\ Im(\delta^2)=Im(a). \\ |\delta|^2=|a| \end{cases}$
2. Si $a=re^{i\theta}\in\mathbb{C}^*$ tq $r\in\mathbb{R}^{+*}$ et $\theta\in\mathbb{R}$ alors $\sqrt[n]{r}e^{\frac{i\theta}{n}}$ est une racine nième de a particulière.
3. Si $a\in\mathbb{C}^*$ et z_0 est une racine nième de a alors les racines $n$ièmes de a sont les n nombres complexes $z_0\,e^{ik\frac{2\pi}{n}}$ tq $k\in[\![0;n-1]\!]$.

Si $z=x+iy\in\mathbb{C}\; tq\; x,y$ réels alors $e^{z}=e^{x}e^{iy}$.

Soit $(r,r')\in(\mathbb{R}^{+*})^2 et (\theta,\theta')\in\mathbb{R}^2$.

$re^{i\theta}=r'e^{i\theta'}\Leftrightarrow\begin{cases} r'=r \\ \exists k\in\mathbb{Z}/\theta'=\theta+2k\pi \end{cases}.$

Soit l'équation(E): $az^2+bz+c=0$ d'inconnue z complexe où a,b,c complexes tels que $a\neq0$. Posons $\Delta=b^2-4ac$ et δ une racine carrée complexe de Δ.

Alors,les solutions de (E) sont $\frac{-b-\delta}{2a}\; et\; \frac{-b+\delta}{2a}$.

Ces deux solutions sont distinctes sietssi $\Delta\neq0$.

Si a,b et c sont réels et $\Delta<0$ alors les deux solutions sont conjuguées.

Les solutions dce $1+z+z^2=0$ sont :

$j=e^{i\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$=et $j^2=e^{-i\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Alors, $z_1 = \frac{-(7-i)-(7+3i)}{2(-4-2i)} = \frac{-14-2i}{2(-4-2i)} = \frac{-7-i}{-4-2i} = \frac{(-7-i)(-4+2i)}{|-4-2i|^2} = \frac{30-10i}{20} = \frac{3-i}{2}$ et

$z_2 = \frac{-(7-i)+(7+3i)}{2(-4-2i)} = \frac{4i}{2(-4-2i)} = \frac{2i}{(-4-2i)} = \frac{2i(-4+2i)}{|-4-2i|^2} = \frac{-4-8i}{20} = \frac{-1-2i}{5}$ sont les solutions de (e).

Soit (S) le système $\begin{cases} z+\overline{w} = -1+2i \\ \bar{z}w = 1+7i \end{cases}$ d'inconnue $(z,w) \in \mathbb{C}^2$.

Soit$(z,w) \in \mathbb{C}^2$.

$\begin{cases} z+\overline{w} = -1+2i \\ \bar{z}w = 1+7i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z+\overline{w} = -1+2i \\ \overline{\bar{z}w} = \overline{1+7i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z+\overline{w} = -1+2i \\ z\overline{w} = 1-7i \end{cases} \Leftrightarrow$

z *et* $\overline{w}$ *sont les racines de* $P(t) = t^2 + (1-2i)t + 1 - 7i.$

Posons $\Delta = (1-2i)^2 - 4(1-7i) = 1 + (2i)^2 - 2\times 2i - 4 + 28i = 1 - 4 - 4i - 4 + 28i = -7 + 24i = -16 + 9 + 2\times 3\times 4i = (3+4i)^2$

$t_1 = \frac{-(1-2i)-(3+4i)}{2} = \frac{-4-2i}{2} = -2 - i$ *et* $t_1 = \frac{-(1-2i)+(3+4i)}{2} = 1 + 3i.$

Par conséquent,

$\begin{cases} z+\overline{w} = -1+2i \\ \bar{z}w = 1+7i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2-i \\ \overline{w} = 1+3i \end{cases}$ *ou* $\begin{cases} z = 1+3i \\ \overline{w} = -2-i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2-i \\ w = 1-3i \end{cases}$ *ou* $\begin{cases} z = 1+3i \\ w = -2+i \end{cases}$.

Ainsi, $Sol(S) = \{(-2-i, 1-3i); (1-3, -2-i)\}$.

Ex 2 Dérivée de $Arcsin, Arctan$ et $Arccos$

1. Soit $f(x) = 2Arcsin(x) \times Arccos(x) - 5Arctan(x)$. Déterminer le domaine de définition D de f. Justifier que f est dérivable au moins sur $D' = D\backslash\{-1,1\}$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in D'$.

2. Soit $f(x) = Arcsin(x^2 - 1)$. Déterminer le domaine de définition D de f. Justifier que f est dérivable au moins sur $D' = D\backslash\{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in D'$.

Soit $f(x) = 2Arcsin(x) \times Arccos(x) - 5Arctan(x)$.

$Df = [-1;1]$ car $Arcsin$ et $Arccos$ sont définies sur $[-1\,;1]$ et $Arctan$ sur $\mathbb{R}$.

Dans l'expression de f, seules les fonctions $Arcsin$ et $Arccos$ ne sont pas dérivables sur tout leur propre domaine de définition mais uniquement sur $]-1\,;1[$. Donc f est dérivable au moins sur$]-1\,;1[$. Et $\forall x \in]-1\,;1[$,

$$f'(x) = 2[Arcsin'(x)Arccos(x) + Arcsin(x)Arccos'(x)] - 5Arctan'(x)$$
$$= 2\left[\frac{Arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{Arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right] - \frac{5}{1+x^2}.$$

$Arcsin(X)$ existe *sietssi* $X \in [-1;1]$.
$Arccos(X)$ existe *sietssi* $X \in [-1;1]$.
$Arctan(X)$ existe *sietssi* $X \in \mathbb{R}$.

$Arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Mais $Arcsin$ et $Arccos$ ne sont dérivable que sur $]-1;1[$ donc ne sont pas dérivables sur tout leur domaine dé définition. Et,

$$\forall x \in \mathbb{R}, Arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$\forall x \in]-1;1[, Arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -Arccos(x).$$

Soit u et v deux fonctions dérivables sur D et λ et β des réels.Alors $\lambda u + \beta v$ *et* uv sont dérivables sur D et $\forall x \in D$,

$$(\lambda u + \beta v)'(x) = \lambda u'(x) + \beta v'(x)$$
$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Soit $f(x) = Arcsin(x^2 - 1)$.

$f(x)$*existe* $\Leftrightarrow -1 \le x^2 - 1 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x^2 \le 2 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Donc, $Df = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Posons $v(x) = x^2 - 1$. Alors v est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur toute partie de $\mathbb{R}$. Et dans l'expression de f, seule la fonction $Arcsin$ n 'est pas dérivable sur tout son propre domaine de définition mais uniquement sur $]-1\,;1[$. Or, $x^2 - 1 \in]-1; 1[\Leftrightarrow -1 < x^2 - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x^2 < 2$

$$\Leftrightarrow x \in]-\sqrt{2}; 0[\cup]0; \sqrt{2}[.$$

Donc f est dérivable au moins sur $D' =]-\sqrt{2}; 0[\cup]0; \sqrt{2}[$. Et,

$$\forall x \in D', f'(x) \overset{v(x)=x^2-1}{\widehat{=}} v'(x) \times Arcsin'(v(x)) = 2x \times \frac{1}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}}$$

$$f'(x) = 2x \times \frac{1}{\sqrt{1 - x^4 + 2x^2 - 1}} = 2x \times \frac{1}{\sqrt{x^2(2-x^2)}} = 2x \times \frac{1}{\sqrt{x^2}\sqrt{2-x^2}}$$

$$f'(x) = 2x \times \frac{1}{|x|\sqrt{2-x^2}} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2-x^2}} & si\ x \in]0; \sqrt{2}[\\ \frac{-2}{\sqrt{2-x^2}} & si\ x \in]-\sqrt{2}; 0[\end{cases}.$$

Toute fonction polynomiale est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit u et v deux fonctions dérivables sur respectivement $D_{u'}$ et $D_{v'}$.

Alors $u \circ v$: $(x \mapsto u(v(x)))$ *est* dérivable sur $D' = \{x \in D_{v'} / v(x) \in D_{u'}\}$ et

$\forall x \in D'$, $(u \circ v)'(x) = v'(x) \times u'(v(x))$

En particulier $(x \mapsto Arcsin(v(x)))$est dérivable sur $\{x \in D_{v'} / v(x) \in]-1; 1[\}$. Et $(Arcsin(v))'(x) = \frac{v'(x)}{\sqrt{1-v^2(x)}}$.

Ex 3 Fonction bornée$\times$Fonction de limite nulle Calculer $\lim_{x\to 1} \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)(x - \lfloor x \rfloor)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc $0 \le x - \lfloor x \rfloor < 1$; par conséquent, la fonction $b: (x \mapsto x - \lfloor x \rfloor)$ est bornée.

De plus, $\begin{cases} \lim_{x\to 1} \frac{\pi}{2x} = \frac{\pi}{2} \\ \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \cos(t) \overset{car\ \cos\ est\ continue\ en\ \frac{\pi}{2}}{\widehat{=}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$. Donc par composition,

$\lim_{x\to 1} \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right) = 0.$

Ainsi, $\left(x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)(x - \lfloor x \rfloor)\right)$ est le produit d'une fonction de limite nulle en 1 et d'une fonction bornée. J'en déduis que $\lim_{x\to 1} \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)(x - \lfloor x \rfloor) = 0$.

Par **définition de la partie entière**, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$.

f est continue en a lorsque $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

$$\begin{cases} \lim_{x\to b} u(x) = L \\ \lim_{t\to a} v(t) = b \end{cases} \Rightarrow \lim_{t\to a} u(v(t)) = L.$$

Bornée $\times$ limite nulle : Si b est une fonction bornée au voisinage de a et la fonction g tend vers 0 en a alors $g \times b$ tend vers 0 en a.