CORRIGE JOUR 6

Ex 1 Racines 4ièmes complexes

Calculer de deux manières les racines quatrièmes de $1+i\sqrt{3}$. En déduire les valeurs de $cos\frac{13\pi}{12}$ et $sin\frac{13\pi}{12}$.

1ère méthode : $a = 1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Donc $2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{12}}$ est une racine quatrième de a et par conséquent, les complexes $2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{12}}, 2^{\frac{1}{4}}ie^{i\frac{\pi}{12}}, -2^{\frac{1}{4}}ie^{i\frac{\pi}{12}}, -2^{\frac{1}{4}}ie^{i\frac{\pi}{12}}$ sont les 4 racines quatrièmes de a.

2ème méthode : on va chercher une racine carrée d'une racine carrée de $1+i\sqrt{3}$.

- Cherchons $z=x+iy$ tel que $z^2=a$.

$$z^2=a \Leftrightarrow \begin{cases} z^2=a\\ |z^2|=|a|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+iy)^2=a\\ |z|^2=|a|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2+2ixy=1+i\sqrt{3}\\ x^2+y^2=2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2=1\\2xy=\sqrt{3}\\x^2+y^2=2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}2x^2=3\\2xy=\sqrt{3}\\2y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\frac{3}{2}\\xy=\frac{\sqrt{3}}{2}\\y^2=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\\xy=\frac{\sqrt{3}}{2}\\y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\y=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases} ou \begin{cases}x=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\y=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}.$$

Donc, $b=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+i)$ est une racine carrée complexe de a.

- Cherchons $z=x+iy$ tel que $z^2=b$.

$$z^2=b\Leftrightarrow\begin{cases}z^2=b\\|z^2|=|b|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+iy)^2=b\\|z|^2=|b|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2+2ixy=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\\x^2+y^2=\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\2xy=\frac{1}{\sqrt{2}}\\x^2+y^2=\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}2x^2=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\\2xy=\frac{1}{\sqrt{2}}\\2y^2=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\xy=\frac{1}{2\sqrt{2}}\\y^2=\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}\\xy=\frac{1}{2\sqrt{2}}\\y=\pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}\\y=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}\end{cases} ou \begin{cases}x=-\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}\\y=-\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}\end{cases}.$$

Ainsi, $c=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}+i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$ est une racine carrée de b. Alors $c^4=(c^2)^2=b^2=a$. Donc, c est une racine quatrième de a. Par conséquent, $c, ci, -c\ et -ic$ sont les quatre racines quatrièmes de a.

Ainsi, $\left\{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}+i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}, i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}, -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}-i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}, -i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}\right\}=$
$\left\{2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{12}}, 2^{\frac{1}{4}}ie^{i\frac{\pi}{12}}, -2^{\frac{1}{4}}ie^{i\frac{\pi}{12}}, -2^{\frac{1}{4}}ie^{i\frac{\pi}{12}}\right\}$. En comparant le signe des parties réelles et imaginaires de ces quatre complexes, je peux affirmer que :

$2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{13\pi}{12}}=-2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{12}}=-\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}-i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$ i.e. $2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right)+2^{\frac{1}{4}}\left(\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right)=-\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}-i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$.

Ainsi, $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)=-\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}=-\frac{1}{\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^2}\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ et $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Vérification : $2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2-1=\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})-1=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right)$ OK !

Les racines 4ièmes de l'unité sont $1, i, -1, -i$ (i.e. les complexes $e^{\frac{2ik\pi}{4}}\ tq\ k\in[\![0,3]\!]$).

Si $a\in\mathbb{C}^*$ et z_0 est une racine nième de a alors les racines nièmes de a sont les n nombres complexes obtenues en multpliant z_0 par les n racines nièmes de l'unité .
Si $a=re^{i\theta}\in\mathbb{C}^*$ tq $r\in\mathbb{R}^{+*}$ et $\theta\in\mathbb{R}$ alors $\sqrt[n]{r}e^{\frac{i\theta}{n}}$ est une racine nième de a particulière;

1. Si $a\in\mathbb{C}^*$ alors $\delta=x+iy$ est une racine carrée de $a\Leftrightarrow\begin{cases}Re(\delta^2)=Re(a)\\Im(\delta^2)=Im(a).\\|\delta|^2=|a|\end{cases}$

Ex 2 Dérivée d'un produit et d'une composée Soit $f(x)=xe^{\frac{x}{x^2-1}}$.Déterminer le domaine de définition D de f. Justifier que f est dérivable sur D et calculer $f'(x)$ pour $x\in D$.

$f(x)$ existe sietssi $x^2-1\neq0$ sietssi $(x-1)(x+1)\neq0$ sietssi $x\neq1\ et\ x\neq-1$.
Donc $D=D_f=\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$.
Dans l'expression de f, toutes les fonctions sont dérivables sur tout leur propre domaine définition. Donc f est elle-même dérivable sur tout son domaine de définition D.

Et $\forall x\in D,\ f'(x)=x\times v'(x)+v(x)\ \text{ où } \begin{cases}v(x)=e^{\frac{x}{x^2-1}}=e^{w(x)}\ avec\ w(x)=\frac{x}{x^2-1}\\v'(x)=w'(x)e^{w(x)}\\w'(x)=\frac{x^2-1-2x\times x}{(x^2-1)^2}=\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}\end{cases}$.

Donc $f'(x)=x\times\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}\times e^{\frac{x}{x^2-1}}+e^{\frac{x}{x^2-1}}=e^{\frac{x}{x^2-1}}\left[x\times\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}+1\right]=e^{\frac{x}{x^2-1}}\left[\frac{-(x^3+x)+(x^2-1)^2}{(x^2-1)^2}\right]$.
Ainsi, $f'(x)=e^{\frac{x}{x^2-1}}\left[\frac{x^4-x^3-2x^2-x+1}{(x^2-1)^2}\right]$.

$e^{v(x)}\xrightarrow{dérive}v'(x)e^{v(x)}$

$u(x)v(x)\xrightarrow{dérive}u(x)v'(x)+u'(x)v(x)$

$\frac{u(x)}{v(x)}\xrightarrow{dérive}\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$.

Ex 3 Se ramener à une limite en 0 Calculer $\lim_{x\to-1}\frac{\sin(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

Soit $f(x)=\frac{\sin(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Alors, $Df=]-1\,;1[$. Posons $\forall x\in Df, t=x+1\ et\ g(t)=f(x)$.

Alors, $\begin{cases}t\in]0\,;2[\\x=t-1 \text{ et } g(t)=f(t-1) \text{ et } f(x)=g(x+1)\\\lim_{x\to-1}t=0 \text{ et } \lim_{t\to0}x=-1\end{cases}$.

Donc, d'après le cours, f tend vers L en -1 sietssi g tend vers L en 0.
Etudions donc la limite de g en 0.

$\forall\ t\in]0\,;2[,\ g(t)=\frac{\sin(1+(t-1))}{\sqrt{1-(t-1)^2}}=\frac{\sin(t)}{\sqrt{2t-t^2}}=\frac{\sin(t)}{\sqrt{2t\left(1-\frac{t}{2}\right)}}=\frac{\sin(t)}{\sqrt{2}\sqrt{t}\sqrt{\left(1-\frac{t}{2}\right)}}=\frac{\sin(t)}{t}\times\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{t}{2}}}$.

Limites par taux d'accroissements :
$\lim_{t\to0}\frac{\sin(t)}{t}\overset{T.A}{=}1\ et\ \lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}\overset{T.A}{=}1$.

Limite par continuité
Si f est continue en a alors
$\lim_{x\to a}f(x)\overset{cont.}{=}f(a)$.

Se ramener à une limite en 0

Comme $\lim\limits_{t\to 0}\frac{sin(t)}{t}\overset{T.A}{\triangleq}1$ et $\lim\limits_{t\to 0}\sqrt{1-\frac{t}{2}}\overset{cont.}{\triangleq}1$ et $\lim\limits_{t\to 0}\sqrt{t}\overset{cont.}{\triangleq}0$, alors $\lim\limits_{t\to 0}g(t)=0$. J'en déduis que $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=0$.	Soit a un réel et L un réel ou infini $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to 0}f(t+a)=L$ **Opérations sur les limites** Soit α *et* β des constantes. $\begin{cases}\lim\limits_{x\to a}f(x)=L\\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=L'\\ \alpha L+\beta L' \text{ pas une FI}\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\alpha f(x)+\beta g(x)=\alpha L+\beta L'.$ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to a}f(x)=L\\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=L'\\ L/L' \text{ pas une FI}\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{L'}.$