

CORRIGE JOUR 5

Ex 1 Racines nièmes complexes-Equations polynomiales.

- Donner les racines $n^{\text{ièmes}}$ complexes des nombres complexes a suivants : $a = 1$ et $n = 7$ puis $a = j$ et $n = 5$ puis $a = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2-2i}$ et $n = 4$.
- Résoudre les équations suivantes :

- $1 - i(1 - z)^4 = 0$
- $z^n = 3^n$
- $64(z - 1)^6 + (z + 1)^6 = 0$
- $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$
- $(z - i)^n = (z + i)^n$ où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Les racines 7ièmes de l'unité sont les 7 nombres complexes tels que : $e^{\frac{2ik\pi}{7}}$ tq $k \in \llbracket 0, 6 \rrbracket$.	$Z^n = a$ signifie que Z est une racine $n^{\text{ième}}$ complexe de a.
$j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ Donc $e^{\frac{12i\pi}{5}} = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ est une racine 5ième de j. Ainsi, les racines 5ièmes de j sont les complexes $e^{\frac{2ik\pi}{5}}$ tq $k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$.	Les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité sont les n nombres complexes $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ tq $k \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$.
$a = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2-2i} = \frac{2e^{\frac{2i\pi}{3}}}{2\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\frac{11\pi}{12})}$. Donc $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{8}}e^{i(\frac{11\pi}{48})}$ est une racine quatrième de $\frac{1+i}{3-i\sqrt{3}}$. Ainsi les racines quatrième de $\frac{1+i}{3-i\sqrt{3}}$ sont les complexes $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{8}}e^{i(\frac{11\pi}{48}+\frac{2ik\pi}{4})}$ tq $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$.	Si $a \in \mathbb{C}^*$ et z_0 est une racine nième de a alors les racines nièmes de a sont les n nombres complexes $z_0 e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ tq $k \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$. Si $a = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ tq $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ alors $\sqrt[n]{r}e^{\frac{i\theta}{n}}$ est une racine nième de a particulière.
Notons (e): $1 - i(1 - z)^4 = 0$. Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $Z = 1 - z$. z solution de (e) $\Leftrightarrow Z^4 = \frac{1}{i}$ $\Leftrightarrow Z$ est une racine quatrième de $-i$ $\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket / Z = e^{-i\frac{\pi}{8}}e^{\frac{2ik\pi}{4}}$ $\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket / 1 - z = e^{-i\frac{\pi}{8}}e^{\frac{2ik\pi}{4}}$ $\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket / z = 1 - e^{-i\frac{\pi}{8}}e^{\frac{2ik\pi}{4}}$. Ainsi, $Sol = \{1 - e^{-i\frac{\pi}{8}}e^{\frac{2ik\pi}{4}} / k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket\}$.	Somme géométrique : Pour tout complexe Z et tout entiers naturels P et N tels que $P \leq N$, $\sum_{k=P}^N Z^k = \begin{cases} \frac{Z^{N-P+1}-1}{Z-1} & \text{si } Z \neq 1 \\ N - P + 1 & \text{si } Z = 1 \end{cases}$
Soit $z \in \mathbb{C}$. $z^n = 3^n \Leftrightarrow (\frac{z}{3})^n = 1$ $\Leftrightarrow \frac{z}{3}$ est une racine nième de l'unité $\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket / \frac{z}{3} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ $\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket / z = 3e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Ainsi, $Sol = \{3e^{\frac{2ik\pi}{n}} / k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket\}$.	
$z = 1$ ne vérifie pas $64(z - 1)^6 + (z + 1)^6 = 0$. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. $64(z - 1)^6 + (z + 1)^6 = 0$ $\Leftrightarrow \frac{(z + 1)^6}{(z - 1)^6} = -64$ $\Leftrightarrow \left(\frac{z + 1}{z - 1}\right)^6 = -64$ $\Leftrightarrow \frac{z + 1}{z - 1}$ est une racine 6ième de -64 $\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket / \frac{z + 1}{z - 1} = 2ie^{\frac{2ik\pi}{6}}$ $\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket / z + 1 = 2ie^{\frac{2ik\pi}{6}}(z - 1)$ $\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket / (2ie^{\frac{2ik\pi}{6}} - 1)z = 1 + 2ie^{\frac{2ik\pi}{6}}$ $\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket / z = \frac{2ie^{\frac{2ik\pi}{6}} + 1}{2ie^{\frac{2ik\pi}{6}} - 1}$. car $\left \frac{2ie^{\frac{2ik\pi}{6}} + 1}{2ie^{\frac{2ik\pi}{6}} - 1} \right = 2 \neq 1$ donc $2ie^{\frac{2ik\pi}{6}} \neq 1$ Ainsi, $Sol = \{\frac{2ie^{\frac{2ik\pi}{6}} + 1}{2ie^{\frac{2ik\pi}{6}} - 1} / k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket\}$.	$-64 = i^6 2^6 = (2i)^6$. Donc $2i$ est une racine 6ième de -64. Alors, les racines 6ièmes de -64 sont les complexes $2ie^{\frac{2ik\pi}{6}}$, tq $k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$.
$z = -1$ ne vérifie pas $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$ $\Leftrightarrow (-z)^4 + (-z)^3 + (-z)^2 + (-z) + 1 = 0$ $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^4 (-z)^k = 0$ somme géométrique de raison $-z \neq 1$ $\Leftrightarrow \frac{(-z)^5 - 1}{-z - 1} = 0$ car $z \neq -1$ $\Leftrightarrow (-z)^5 = 1$ $\Leftrightarrow -z$ est une racine 5ième de l'unité $\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket / -z = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$	Au cours de ma recherche au brouillon, m'est apparu que -1 est une valeur à étudier à part. Je ne l'ai pas vu immédiatement.... En revanche quand je rédige au propre, je m'en suis occupée dès le début car c'était plus simple et clair en terme de rédaction.

$\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket / z = -e^{\frac{2ik\pi}{5}}.$ Ainsi, Sol = $\left\{-e^{\frac{2ik\pi}{5}} / k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket\right\}$.	
1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et (e): $(z - i)^n = (z + i)^n$ d'inconnue z complexe. Je remarque que i n'est pas solution de cette équation. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On pose $Z = \frac{z+i}{z-i}$. z solution de (e) si et seulement si $(z - i)^n = (z + i)^n$ si et seulement si $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1$ si et seulement si $Z^n = 1$ si et seulement si Z est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité. si et seulement si $Z = 1$ ou $Z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ ou $Z = e^{i\frac{4\pi}{n}}$ ou ... $Z = e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}$ si et seulement si il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $Z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$. si et seulement si il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $\frac{z+i}{z-i} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ si et seulement si il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $(z+i) = e^{i\frac{2k\pi}{n}}(z-i)$ si et seulement si il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}})z = -i(e^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1)$ si et seulement si il existe $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $z = -\frac{i(e^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1)}{(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}})}$ si et seulement si il existe $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $z = -\frac{2i \cos(\frac{k\pi}{n}) e^{i\frac{k\pi}{n}}}{-2i \sin(\frac{k\pi}{n}) e^{i\frac{k\pi}{n}}} = \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. Ainsi, Sol = $\{\cotan(\frac{k\pi}{n}) / k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket\}$.	ATTENTION A NE PAS DIVISER PAR ZERO : Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. $1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0$ si et seulement si $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 1$ si et seulement si $k = 0$. Donc je dois ôter la valeur $k = 0$ pour avoir le droit de diviser. De plus, pour $k = 0$, $(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}})z \neq -(e^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1)$ Donc le cas « $k=0$ » est impossible mais ce n'est pas grave il nous reste les autres cas qui, eux, n'aboutissent pas à une impossibilité !!

Ex 2 Dérivée Soit $f(x) = \tan^3(4x + 1)$. Déterminer le domaine de définition D de f . Justifier que f est dérivable sur D et calculer $f'(x)$ pour $x \in D$.

$f(x)$ existe si et seulement si $\forall k \in \mathbb{Z}, 4x + 1 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ si et seulement si $\forall k \in \mathbb{Z}, x \neq \frac{\pi-2}{8} + \frac{k\pi}{4}$. Donc $D = Df = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi-2}{8} + \frac{k\pi}{4} / k \in \mathbb{Z}\right\}$. Dans l'expression de f, toutes les fonctions sont dérivables sur tout leur propre domaine de définition. Donc f est elle-même dérivable sur tout son domaine de définition D. Et $\forall x \in D$, $f'(x) = 3 \times w'(x) \times w(x)^2$ où $\begin{cases} w(x) = \tan(4x + 1) \\ w'(x) = 4(1 + \tan^2(4x + 1)) \end{cases}$. Donc $f'(x) = 12 \times (1 + \tan^2(4x + 1)) \times (\tan(4x + 1))^2$.	Toute fonction constituée que de fonctions dérivables sur leur propre domaine de définition est elle-même dérivable sur son domaine de définition. Les fonctions tangente et polynomiales sont dérivables sur leur propre domaine de définition. Et $x^n \xrightarrow{\text{dérive}} \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ nx^{n-1} & \text{si } n > 1 \end{cases}$ $\tan(x) \xrightarrow{\text{dérive}} 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$. Soit u et v deux fonctions dérivables sur leur propre domaine de définition Alors $u \circ v$: $(x \mapsto u(v(x)))$ est dérivable sur son propre domaine de définition } et $\forall x \in D', (u \circ v)'(x) = v'(x) \times u'(v(x))$ En particulier, si v est dérivable sur son domaine de définition alors $(x \mapsto (v(x))^3)$ et $(x \mapsto (\tan(v(x)))$ sont dérivables sur leur propre domaine de définition et $(v^3)'(x) = 3v'(x)(v(x))^2$. et $(\tan(v))'(x) = v'(x)(1 + \tan^2(v(x)))$.
--	--

Ex 3 Faire apparaître une limite usuelle Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sqrt{144x})}{\sin(\sqrt[3]{8x})}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(5x^2 + 2x)\sqrt{4x^2 - x^3}$.

Pour $x \leq 0$, $\frac{\ln(1 - \sqrt{144x})}{\sin(\sqrt[3]{8x})}$ n'existe pas. Donc la limite en 0 recherchée est finalement la limite à droite en 0. Soit $x \in]0, \frac{1}{12}[$. Alors, $1 - \sqrt{144x} > 0$ et $\sqrt[3]{8x} \in]0, \pi[$. Donc, $\frac{\ln(1 - \sqrt{144x})}{\sin(\sqrt[3]{8x})}$ existe. $\frac{\ln(1 - \sqrt{144x})}{\sin(\sqrt[3]{8x})} = \left[\frac{\ln(1 - \sqrt{144x})}{-\sqrt{144x}} \right] \left[\frac{\sqrt[3]{8x}}{\sin(\sqrt[3]{8x})} \right] \left[\frac{-\sqrt{144x}}{\sqrt[3]{8x}} \right] = \left[\frac{\ln(1 - \sqrt{144x})}{-\sqrt{144x}} \right] \left[\frac{\sqrt[3]{8x}}{\sin(\sqrt[3]{8x})} \right] \left[-6x^{\frac{1}{6}} \right]$. Comme $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \stackrel{T.A}{=} 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} -\sqrt{144x} = 0 \end{cases}$, par composition, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sqrt{144x})}{-\sqrt{144x}} = 1$.	coquille Limites par taux d'accroissements : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} \stackrel{T.A}{=} 1$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \stackrel{T.A}{=} 1$. Limite par croissance comparée : $\lim_{t \rightarrow 0} t \ln(t) \stackrel{C.C}{=} 1$. Limite par continuité
--	--

Comme $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} \stackrel{T.A}{=} 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{8x} = 0 \end{cases}$, par composition, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sqrt[3]{8x})}{\sqrt[3]{8x}} = 1$. Et par conséquent,
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8x}}{\sin(\sqrt[3]{8x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin(\sqrt[3]{8x})}{\sqrt[3]{8x}}} = \frac{1}{1} = 1$.
 Enfin, $\lim_{x \rightarrow 0} -6x^{\frac{1}{6}} = 0$. J'en conclus que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-\sqrt[3]{144x})}{\sin(\sqrt[3]{8x})} = 0$.

Pour tout $x \in]-1/4, 0[$, $\ln(5x^2 + 2x) \sqrt{4x^2 - x^3}$ n'existe pas. Donc la limite en 0 recherchée ne peut être que la limite à droite en 0.

De plus, pour $x \in]0, 1[$, $\ln(5x^2 + 2x) \sqrt{4x^2 - x^3}$ existe.
 Soit $x \in]0, 1[$.

$$\begin{aligned} \ln(5x^2 + 2x) \sqrt{4x^2 - x^3} &= \ln\left(2x \left(1 + \frac{5x}{2}\right)\right) \sqrt{4x^2 \left(1 - \frac{x}{4}\right)} \\ &= \left[\ln(2) + \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{5x}{2}\right)\right] \left[2x \sqrt{1 - \frac{x}{4}}\right] \\ &= \left[x \ln(x) + x \left(\ln(2) + \ln\left(1 + \frac{5x}{2}\right)\right)\right] \left[2 \sqrt{1 - \frac{x}{4}}\right]. \end{aligned}$$

Comme $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \ln(1+t) \stackrel{cont.}{=} 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2} = 0 \end{cases}$, par composition, $\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{5x}{2}\right) = 0$. Par conséquent,

$\lim_{x \rightarrow 0} x \left(\ln(2) + \ln\left(1 + \frac{5x}{2}\right)\right) = 0$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) \stackrel{cc}{=} 0$. Et enfin, $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 1} \sqrt{t} \stackrel{cont.}{=} 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{x}{4} = 1 \end{cases}$, donc,

par composition, $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 - \frac{x}{4}} = 1$. Donc, $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(5x^2 + 2x) \sqrt{4x^2 - x^3} = (0 + 0) \times 2 = 0$.

NB : Quand x est proche de 0, x^3 est beaucoup plus petit que x^2 , lui-même beaucoup plus petit que x .

Si f est continue en a alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \stackrel{cont.}{=} f(a).$$

Limite par composition

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow b} u(x) = L \\ \lim_{t \rightarrow a} v(t) = b \end{cases} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow a} u(v(t)) = L.$$

Opérations sur les limites

Soit α et β des constantes.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L' \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha L + \beta L'.$$

$\alpha L + \beta L'$ pas une FI

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L' \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = LL'.$$

LL' pas une FI