S'exercer à calculer des limites et déterminer des asymptotes

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}$ et $\lim\limits_{x\to 0^{sgn(a)}}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}$ où a et b constantes réelles non nulles.

Posons $f(x)=\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=e^{bxln\left(1+\frac{a}{x}\right)}$ $et\ h(x)=bxln\left(1+\frac{a}{x}\right)$.

En $+\infty$, on a la FI « $1^{+\infty}$ » pour f et la FI « $\infty\times 0$ » pour h. Ecrivons $h(x)=ab\frac{ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{a}{x}}$.

Comme $\begin{cases}\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a}{x}=0\end{cases}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{a}{x}}=1$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=ab$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=e^{ab}$.

En 0, on a la FI :$+\infty^0$ pour f et la FI « $0\times+\infty$ » pour h. .

Ecrivons $h(x)=bxln\left(1+\frac{a}{x}\right)=bxln\left(\frac{x+a}{x}\right)=bxln\left(\frac{|x+a|}{|x|}\right)=bx[ln(|x+a|)-\ln(|x|)]=bxln(|x+a|)-bx\ln(|x|)$.

Or, $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(x)=0$ donc $\lim\limits_{x\to0^{sgn(a)}}x\ln(|x|)=0$. De plus, $\lim\limits_{x\to0^{sgn(a)}}bxln(|x+a|)=b\times0\times\ln(|a|)=0$.Donc, $\lim\limits_{x\to0^{sgn(a)}}h(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to0^{sgn(a)}}f(x)=1$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\mathrm{e}^{x-x^2}$?

$x^3\mathrm{e}^{x-x^2}=\mathrm{e}^{\ln(x^3)+x-x^2}=\mathrm{e}^{-x^2\left[1-\frac{3\ln(x)}{x^2}-\frac{1}{x}\right]}$. .Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}=0$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}-x^2\left[1-\frac{3\ln(x)}{x^2}-\frac{1}{x}\right]=-\infty$ et ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\mathrm{e}^{x-x^2}=0$

3. $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x^2+x}\ln(x-x^2)$?

Tout d'abord, $\sqrt{x^2+x}\ln(x-x^2)$existe $\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x\geq0\\x-x^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(1+x)\geq0\\x(1-x)>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in]0,1[$.

Prenons donc $x\in]0,1[$. Alors,

$\sqrt{x^2+x}\ln(x-x^2)=\sqrt{x(1+x)}\ln(x(1-x)))=\sqrt{x}\sqrt{1+x}\,[\ln(x)+\ln(1-x)]=\sqrt{1+x}\left[\sqrt{x}\ln(x)\right]+\sqrt{x}\sqrt{1+x}\ln(1-x)$.

Or, $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}\ln(x)=0$. Donc, $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x^2+x}\ln(x-x^2)=0$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2-3x)}{\sqrt[3]{1-8x}}$?

$\frac{\ln(1+x^2-3x)}{\sqrt[3]{1-8x}}=\frac{\ln\left[x^2\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}\right)\right]}{\sqrt[3]{-8x\left(1-\frac{1}{8x}\right)}}=\frac{2\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}\right)}{\sqrt[3]{-8x}\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{8x}\right)}}=\frac{2\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}\right)}{-2\times\sqrt[3]{x}\times\sqrt[3]{1-\frac{1}{8x}}}=\frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}\frac{-1}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{8x}\right)}}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}\right)}{-2\times\sqrt[3]{x}\times\sqrt[3]{1-\frac{1}{8x}}}$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}=0$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2-3x)}{\sqrt[3]{1-8x}}=0$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(x)\ln(x)e^{1+x-3x^2}$?

$\sin(x)\ln(x)\,e^{1+x-3x^2}=\sin(x)\,e^{\ln(\ln(x))+1+x-3x^2}=\sin(x)\,e^{-3x^2\left[1-\frac{\ln(\ln(x))}{3x^2}-\frac{1}{3x}\right]}$.

Or $\forall t>0,\ln(t)<t$ donc $\forall x>1, ln(ln(x))<ln(x)$ et par conséquent, $0<\frac{ln(ln(x))}{x^2}<\frac{ln(x)}{x^2}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln(x))}{x^2}=0$ par encadrement. Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty}-3x^2\left[1-\frac{\ln(\ln(x))}{3x^2}-\frac{1}{3x}\right]=-\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-3x^2\left[1-\frac{\ln(\ln(x))}{3x^2}-\frac{1}{3x}\right]}=0$. Alors, comme sin est borné, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(x)\,e^{-3x^2\left[1-\frac{\ln(\ln(x))}{3x^2}-\frac{1}{3x}\right]}=0$. J'en conclus que $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(x)\ln(x)\,e^{1+x-3x^2}=0$.

6. Soit $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{2x-1}{x+3}}\sqrt{4x^2+x-1}$. Déterminer l'asymptote oblique de Cf en $-\infty$.

Pour $x<-3$, $4x^2+x-1\geq0$ et $x+3\neq0$, donc $f(x)$ existe.

Etudions successivement : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ et enfin $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-ax$.

Pour $x<-3$,, $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}}\sqrt{4x^2\left(1+\frac{1}{4x}-\frac{1}{4x^2}\right)}=-2x\mathrm{e}^{\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}}\sqrt{\left(1+\frac{1}{4x}-\frac{1}{4x^2}\right)}$. Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$. Et, ensuite,

pour $x<-3$,, $\frac{f(x)}{x}=-2\mathrm{e}^{\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}}\sqrt{\left(1+\frac{1}{4x}-\frac{1}{4x^2}\right)}$. Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{\mathrm{x}}=-2$. Et enfin,

$$\text{pour } x<-3,, f(x)-(-2)x=2x-2x\mathrm{e}^{\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}}\sqrt{\left(1+\frac{1}{4x}-\frac{1}{4x^2}\right)}=-2x\left(\mathrm{e}^{\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}}\sqrt{\left(1+\frac{1}{4x}-\frac{1}{4x^2}\right)}-1\right)=-2\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}}\sqrt{\left(1+\frac{1}{4x}-\frac{1}{4x^2}\right)}-1}{\frac{1}{x}}\right)$$

Donc, $f(x)-(-2)x=-2\left(\frac{\varphi\left(\frac{1}{x}\right)-\varphi(0)}{\frac{1}{x}-0}\right)$ en posant $\varphi(t)=\mathrm{e}^{\frac{2-t}{1+3t}}\sqrt{\left(1+\frac{t}{4}-\frac{t^2}{4}\right)}$.

On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\varphi\left(\frac{1}{x}\right)-\varphi(0)}{\frac{1}{x}-0}$ existe et vaut L sietssi $\lim\limits_{t\to0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0}$ existe et vaut L. Or dans l'expression de φ, seule la racine carrée n'est pas dérivable sur tout son propre domaine de définition mais uniquement que $\mathbb{R}^{+*}$; mais pour $t=0$, $1+\frac{t}{4}-\frac{t^2}{4}=1\in\mathbb{R}^{+*}$; donc la fonction φ est dérivable en 0 et $\varphi'(t)=\frac{-(1+3t)-3(2-t)}{(1+3t)^2}\mathrm{e}^{\frac{2-t}{1+3t}}\sqrt{\left(1+\frac{t}{4}-\frac{t^2}{4}\right)}+\frac{\mathrm{e}^{\frac{2-t}{1+3t}}\left(\frac{1}{4}-\frac{2t}{4}\right)}{2\sqrt{\left(1+\frac{t}{4}-\frac{t^2}{4}\right)}}$ donc $\varphi'(0)=-7e^2+\frac{e^2}{8}=-\frac{55}{8}e^2$. Donc,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\varphi\left(\frac{1}{x}\right)-\varphi(0)}{\frac{1}{x}-0}=\lim\limits_{t\to0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0}=-\frac{55}{8}e^2$. Et ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-(-2)x=\frac{55}{4}e^2$. Cela s'écrit aussi $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-\left[(-2)x+\frac{55}{4}e^2\right]=0$ ce qui signifie que la droite d'équation $y=(-2)x+\frac{55}{4}e^2$ est asymptote à Cf en $-\infty$.

Soit $f(x) = \ln(1+e^{3x}-x)$. Déterminer l'asymptote oblique de Cf en $+\infty$.

$f(x) = \ln(1+e^{3x}-x) = \ln\left(e^{3x}(1-\frac{x}{e^{3x}}-e^{-3x})\right) = 3x+ln(1-\frac{x}{e^{3x}}-e^{-3x})$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{3x}}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(1-\frac{x}{e^{3x}}-e^{-3x})=0$ et ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-3x=0$. J'en conclus que la droite d'équation $y=3x$ est asymptote à Cf en $+\infty$.

Etudier la fonction $f:(x\mapsto x^x)$ dans le but de tracer sa courbe.

$f(x)=x^x=e^{xln(x)}$. Donc $Df=\mathbb{R}^{+*}$ et f est continue et dérivable sur Df et $\forall x\in Df, f'(x)=[\ln(x)+1]e^{xln(x)}$.

Alors, $f'(x)>0 \Leftrightarrow \ln(x)+1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$. Donc f est strictement croissante sur $]\frac{1}{e},+\infty[$ et stricement décroissante sur $]0,\frac{1}{e}[$ et admet un minimum en $\frac{1}{e}$ qui vaut $f\left(\frac{1}{e}\right)=e^{\frac{1}{e}ln\left(\frac{1}{e}\right)}=e^{\frac{-1}{e}}$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\frac{f(x)}{x}=x^{x-1}=e^{(x-1)ln(x)}$. *Donc,* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$. f tend donc très vite vers $+\infty$.

Enifn $\lim\limits_{x\to0} xln(x)=0$ donc $\lim\limits_{x\to0} f(x)=1$; cela signifie que f est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1.

Appelons encore $\tilde{f}$ son prolongement par continuité. Cherchons si $\tilde{f}$ est dérivable en 0.

$\tilde{f}$ est continue en 0 et $\tilde{f}$ est au moins dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ *et* $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}, \tilde{f}'(x)=f'(x)=[\ln(x)+1]e^{xln(x)}=[\ln(x)+1]f(x)$. Donc $\lim\limits_{x\to0}\tilde{f}'(x)=-\infty$. Alors le critère de limite du taux d'accroissement assure que $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(0)}{x-0}=-\infty$. Donc $\tilde{f}$ n'est pas dérivable en 0 et sa courbe admet une tangente verticale en 0.