ÉTUDE DE LA LIMITE D'UNE FONCTION

SOMMAIRE

SE PLACER AU VOISINAGE DU POINT

Soit a un réel ou un infini.

La limite d'une fonction f en a est une **notion locale.** Etudier la limite de f en a consiste à étudier le comportement de $f(x)$ quand x s'approche a ; c'est tenter de savoir si, quand x s'approche a, les valeurs $f(x)$ s'approchent toutes d'une même réel ou d'un même infini.

COURS

Pour étudier une telle limite,

- **il faut** donc que $f(x)$ soit définie pour x aussi proche qu'on le souhaite de a (on dit que **f est définie au voisinage ou sur un voisinage de a**)
- **Il suffit de se placer sur un voisinage de a** sur lequel f est définie (ce que fait f en dehors de ce voisinage n'a pas d'influence sur le calcul de la limite); on ne considère que les x se trouvant dans ce voisinage pour étudier cette limite.
- Lorsqu'on se place sur un voisinage de la forme $]a, b[$ de a (voisinage dit à droite de a) alors on calcule la **limite à droite** de f en a notée $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$.

  Lorsqu'on se place sur un voisinage de la forme $]b, a[$ de a (voisinage dit à gauche de a) alors on calcule la limite à gauche de f en a notée $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$.
- **Lorsque f est définie en a, la limite de f en a, si elle existe, vaut nécessairement $f(a)$** (puisque a se trouve alors dans tous les voisinages de a sur lequel f est définie).

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **où** $f(x)=\begin{cases} x^2 \ si\ x<0 \\ sin(x)\ si\ x\in[0,\pi]. \\ \frac{x+1}{x-2}\ si\ x>\pi \end{cases}$ **et que dire de la limite de f en π.**

Sur le voisinage $]\pi,+\infty[$ de $+\infty$, $f(x)=\frac{x+1}{x-2}=\frac{x-2+3}{x-2}=1+\frac{3}{x-2}$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{3}{x-2}=1.$

Sur le voisinage $]-\infty,0[$ de $-\infty$, $f(x)=x^2$. Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty.$

Sur le voisinage $]0,\pi[$ de $\frac{\pi}{2}$, $f(x)=\sin(x)$. Donc, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin(x)=1.$

Sur le voisinage à droite $]0,\pi[$ de 0, $f(x)=\sin(x)$. Donc, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\sin(x)=0.$

Sur le voisinage à gauche $]-\infty,0[$ de 0, $f(x)=x^2$. Donc, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=\lim\limits_{x\to0} x^2=0.$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=0=f(0)$, j'en conclus que $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0.$

Sur le voisinage à droite $]\pi,+\infty[$de π, $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$. Donc, $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\x>\pi}} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{x+1}{x-2}=\frac{\pi+1}{\pi-2}\neq 0=f(\pi).$

Donc la limite de f en π n'existe pas.

Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$

Posons $f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$.

Sur le voisinage à droite $]0,1[$ de 0, $\lfloor x \rfloor = 0$ donc $f(x) = 0$. Donc, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

Sur le voisinage à gauche $]-1,0[$ de 0, $\lfloor x \rfloor = -1$ donc $f(x) = -\frac{1}{x}$. Donc, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$.

sommaire

UTILISER LES LIMITES À GAUCHE ET À DROITE

COURS

Si f est définie sur un voisinage à gauche et sur un voisinage à droite de a (ici a est un réel) alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = L = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \\ \quad et\ \boldsymbol{L = f(a)\ si\ a \in Df} \end{cases}.$$

La seule limite en a possible d'une fonction f définie en a est $f(a)$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to k} \lfloor x \rfloor + \sqrt[3]{x - \lfloor x \rfloor}$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$ *fixe*.

Posons $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt[3]{x - \lfloor x \rfloor}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

Tout d'abord, la fonction partie entière n'a pas de limite en k car la fonction partie entière étant définie en k , sa seule limite possible en k est $\lfloor k \rfloor = k$;mais $\forall x \in]k-1; k[, \lfloor x \rfloor = k - 1$ donc $\lim\limits_{x\to k^+} \lfloor x \rfloor = \lim\limits_{x\to k^+} k - 1 = k - 1 \neq \lfloor k \rfloor$.
On ne peut donc pas passer à la limite simplement dans l'expression de f.

Déterminons la limite à gauche et la limite à droite de f en k et comparons avec $f(k)$.

- $\forall x \in]k; k+1[, \lfloor x \rfloor = k$ et $f(x) = k + \sqrt[3]{x - k}$.

Donc, $\lim\limits_{x\to k^+} f(x) = k + \sqrt[3]{0} = k$.

- $\forall x \in]k-1; k[, \lfloor x \rfloor = k - 1$ et $f(x) = k - 1 + \sqrt[3]{x - (k-1)}$.

Donc, $\lim\limits_{x\to k^+} f(x) = k - 1 + \sqrt[3]{1} = k - 1 + 1 = k$.

- Enfin, $f(k) = k + \sqrt[3]{k - k} = k$. Donc, $\lim\limits_{x\to k^+} f(x) = \lim\limits_{x\to k^-} f(x) = f(k)$.

J'en conclus que $\lim\limits_{x\to k} f(x) = f(k) = k$.

sommaire

FAIRE APPARAITRE DES LIMITES USUELLES

COURS

$$\lim_{t\to 0} \frac{sin(t)}{t} \overset{TA}{\triangleq} 1$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{tan(t)}{t} \overset{TA}{\triangleq} 1$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{ln(1+t)}{t} \overset{TA}{\triangleq} 1$$

$$\lim_{t\to 1} \frac{ln(t)}{t-1} \overset{TA}{\triangleq} 1$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} \overset{TA}{\triangleq} 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{ln^{\alpha}(x)}{x^{\beta}} \overset{CC}{\triangleq} 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^{\beta}}{e^{\gamma x}} \overset{CC}{\triangleq} 0$$

$$\lim_{t\to 0} x^{\beta}|ln(x)|^{\alpha} \overset{CC}{\triangleq} 0$$

$$\lim_{t\to -\infty} x^{\beta}e^{\gamma x} \overset{CC}{\triangleq} 0$$

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{ln(x)}$.

$(1+x)^{\ln(x)} = e^{ln(x)\ln(1+x)}$.

Posons $h(x) = \ln(x)\ln(1+x)$.

Alors, $h(x) = xln(x)\frac{ln(1+x)}{x}$.

Or, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x} \overset{TA}{\triangleq} 1$ $et \lim\limits_{t\to 0} xln(x) \overset{C.C}{\triangleq} 0$.

Donc, $\lim\limits_{t\to 0} h(x) = 0$.

Et ainsi, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{ln(x)} = e^0 = 1$.

Par définition,
$u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}$

COURS

sommaire

FAIRE APPARAITRE UNE COMPOSÉE

Soit a, b et L des réels ou infinis.

$$\text{Si } \begin{cases} \lim\limits_{t \to a} \varphi(t) = b \\ \lim\limits_{x \to b} f(x) = L \end{cases} \text{ alors } \lim_{t \to a} f(\varphi(t)) = L.$$

COURS

Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{ln(1-4x)}{sin(5x)}$.

$$\frac{\ln(1-(4x)}{sin(5x)} = \frac{\ln(1-4x)}{-4x} \times \frac{5x}{\sin(5x)} \times \frac{-4x}{5x} = \frac{ln(1-4x)}{-4x} \times \frac{5x}{\sin(5x)} \times \frac{-4}{5}.$$

Comme $\begin{cases} \lim\limits_{t \to 0} \frac{sin(t)}{t} \overset{TA}{\triangleq} 1 \\ \lim\limits_{t \to 0} 5x = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} \lim\limits_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \overset{TA}{\triangleq} 1 \\ \lim\limits_{t \to 0} -4x = 0 \end{cases}$,

par composition, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sin(5x)}{5x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{ln(1-4x)}{-4x} = 1$.

Donc, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{ln(1-4x)}{\sin(5x)} = -\frac{4}{5}$.

sommaire

Soient a , b et c des réels.
Au voisinage de $+\infty$,

- $a > 0, b > 0$ et $c > 0 \overset{cc}{\overbrace{\Longrightarrow}} \ln(x)^a \ll_{+\infty} x^b \ll_{+\infty} e^{cx}$
- $a > 0, b > 0$ et $c > 1 \overset{cc}{\overbrace{\Longrightarrow}} \ln(x)^a \ll_{+\infty} x^b \ll_{+\infty} c^x$
- $a < b \Longrightarrow x^a \ll_{+\infty} x^b$
- $0 < a < b \Longrightarrow a^x \ll_{+\infty} b^x$.

Au voisinage de 0,

- $a < b \Longrightarrow x^a \gg_0 x^b$.
- $a < 0 < b \overset{cc}{\overbrace{\Longrightarrow}} (\ln(x))^b \ll_0 x^a$.

Au voisinage de $-\infty$,

- $0 < a < b \Longrightarrow a^x \gg_{-\infty} b^x$
- $a < 0 < b \overset{cc}{\overbrace{\Longrightarrow}} x^a \ll_{-\infty} b^x$.

Exemples : $\ln(x)^{2025} \ll_{+\infty} \sqrt[3]{x} \ll_{+\infty} \sqrt{x} \ll_{+\infty} x^{\frac{3}{2}} \ll_{+\infty} 2^x \ll_{+\infty} e^x$
mais $1 \gg_0 \sqrt[3]{x} \gg_0 \sqrt{x} \gg_0 x \gg_0 x^{\frac{3}{2}} \gg_0 x^5 \gg_0 \ldots$

COURS

METTRE LES TERMES DOMINANTS EN FACTEUR

$$f(x)=\frac{x^2-4\ln(x)-10\sqrt{x}}{\sqrt{5x^4-2x-\ln(x)}+x-1}$$

$$=\frac{x^2\left(1-\frac{4\ln(x)}{x^2}-\frac{10}{x\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{5x^4\left(1-\frac{2}{5x^3}-\frac{\ln(x)}{x^4}\right)}+x-1}$$

$$=\frac{x^2\left(1-\frac{4\ln(x)}{x^2}-\frac{10}{x\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{5}x^2\sqrt{\left(1-\frac{2}{5x^3}-\frac{\ln(x)}{x^4}\right)}+x-1}$$

$$=\frac{x^2\left(1-\frac{4\ln(x)}{x^2}-\frac{10}{x\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{5}x^2\left[\sqrt{\left(1-\frac{2}{5x^3}-\frac{\ln(x)}{x^4}\right)}+\frac{1}{\sqrt{5}x}-\frac{1}{\sqrt{5}x^2}\right]}$$

$$=\frac{\left(1-\frac{4\ln(x)}{x^2}-\frac{10}{x\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{5}\left[\sqrt{\left(1-\frac{2}{5x^3}-\frac{\ln(x)}{x^4}\right)}+\frac{1}{\sqrt{5}x}-\frac{1}{\sqrt{5}x^2}\right]}.$$

$$Donc,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4\ln(x)-10\sqrt{x}}{\sqrt{5x^4-2x-\ln(x)}+x-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Déterminer

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4\ln(x)-10\sqrt{x}}{\sqrt{5x^4-2x-\ln(x)}+x-1}.$$

DÉTERMINER

$\lim\limits_{x\to 0} \sin(x^2)\ln(2\sqrt{x} - x^2)$.

$f(x) = \sin(x^2)\ln(2\sqrt{x} - x^2)$

$= \sin(x^2)\ln\left(2\sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{2}x\sqrt{x}\right)\right)$

$= \sin(x^2)\ [\ln(2) + \ln(\sqrt{x}) + \ln\left(1 - \frac{1}{2}x\sqrt{x}\right)]$

$= \sin(x^2)\ [\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(x) + \ln\left(1 - \frac{1}{2}x\sqrt{x}\right)]$

$= \sin(x^2)\ [\ \ln(2) + \ln\left(1 - \frac{1}{2}x\sqrt{x}\right)] + \frac{1}{2}\sin(x^2)\ln(x)$

Or, $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x^2)\left[\ln(2) + \ln\left(1 - \frac{1}{2}x\sqrt{x}\right)\right] = 0$;

De plus, $\sin(x^2)\ln(x) = \frac{\sin(x^2)}{x^2}x^2\ln(x)$ avec

$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t} \overset{TA}{\triangleq} 1$ donc par composition

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x) \overset{C.C}{\triangleq} 0$ et par conséquent, $\lim\limits_{x\to 0}\sin(x^2)\ln(x) = 0.$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0.$

sommaire

RECONNAITRE UN TAUX D'ACCROISSEMENT

COURS

Si φ est dérivable en a alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a} = \varphi'(a)$.

Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{5x^2-2x+1}-\sqrt{3x^2+3x+1}}{x}$

En posant $\varphi(x) = \sqrt{5x^2 - 2x + 1} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$, on a :

$$\frac{\sqrt{5x^2 - 2x + 1} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}}{x} = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0}.$$

Or, φ est définie et dérivable en 0 *et*

$$\varphi'(0) = \frac{10\times 0-2}{2\sqrt{5\times 0^2-2\times 0+1}} - \frac{6\times 0+3}{2\sqrt{3\times 0^2+3\times 0+1}} = -1 - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}.$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{5x^2-2x+1}-\sqrt{3x^2+3x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \varphi'(0) = -\frac{5}{2}.$

sommaire

SE RAMENER À UNE LIMITE EN 0

COURS

- On cherche $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ tq $a \in \mathbb{R}^*$.

Par composition, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{t \to 0} f(a+t) = L$.

On pose $g(t) = f(a+t)$. Et on étudie $\lim\limits_{t \to 0} g(t)$.

- On cherche $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$.

Par composition, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{t \to 0^{\pm}} f\left(\frac{1}{t}\right) = L$.

On pose $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$. Et on étudie $\lim\limits_{t \to 0} g(t)$.

Calculer $\lim\limits_{x\to\pi^-} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi^2-x^2}}$

Posons $f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi^2-x^2}}$. On pose $g(t) = f(t+\pi)$.

Donc $g(t) = f(t+\pi) = \frac{\sin(t+\pi)}{\sqrt{\pi^2-(t+\pi)^2}} = \frac{-\sin(t)}{\sqrt{-2\pi t-t^2}} = \frac{-\sin(t)}{\sqrt{-2\pi t\left(1+\frac{t}{2\pi}\right)}}$

$= \frac{-\sin(t)}{\sqrt{-2\pi t}\sqrt{1+\frac{t}{2\pi}}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(t)}{t}\frac{t}{\sqrt{-t}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{t}{2\pi}}}.$

$g(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(t)}{t}\left(\frac{-\sqrt{-t}^2}{\sqrt{-t}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{t}{2\pi}}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(t)}{t}\left(-\sqrt{-t}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{t}{2\pi}}}.$

Alors, comme $\lim\limits_{t\to 0^-}\frac{\sin(t)}{t} \overset{TA}{\widehat{=}} 1$, $\lim\limits_{t\to 0^-} g(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times 1 \times 0 \times 1 = 0$. Par conséquent, $\lim\limits_{x\to\pi^\rightarrow} f(x) = 0$.

Calculer $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{ln(x)}\right)^{ln(x)}$

Posons $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ln(x)}$.

On pose $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ et on étudie $\lim\limits_{t \to 0^+} g(t) = L$.

Soit $t > 0$. $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) = (1 + \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{t}\right)})^{\ln\left(\frac{1}{t}\right)} = (1 - \frac{1}{\ln(t)})^{-\mathrm{l}\ \ (t)} = e^{-\ln(t)\ln\left(1 - \frac{1}{\ln(t)}\right)}$

Posons $\mathrm{h(t)} = -\ln(t)\ln\left(1 - \frac{1}{\ln(t)}\right)$. Alors $h(t) = \dfrac{\ln\left(1 - \frac{1}{\ln(t)}\right)}{-\frac{1}{\ln(t)}}$.

Or, $\begin{cases} \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} \overset{TA}{\triangleq} 1 \\ \lim\limits_{t \to +\infty} -\dfrac{1}{\ln(t)} = 0 \end{cases}$. Donc, par composition, $\lim\limits_{t \to +\infty} h(t) = 1$.

Par conséquent, $\lim\limits_{t \to 0^+} g(t) = e^1 = e$. Et ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = e$.

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1+3x}{x}} - e^{\frac{\sqrt{9x^2+1}}{x}}\right)$

Posons $f(x) = x\left(e^{\frac{1+3x}{x}} - e^{\frac{\sqrt{9x^2+1}}{x}}\right)$.

On pose $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ et on étudie $\lim\limits_{t\to0^+} g(t) = L$.

Soit $t > 0$. $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t}\left(e^{\frac{1+\frac{3}{t}}{\frac{1}{t}}} - e^{\frac{\sqrt{\frac{9}{t^2}+1}}{\frac{1}{t}}}\right)$.

$g(t) \overset{car\ t>0}{\triangleq} \frac{e^{t+3}-e^{\sqrt{9+t^2}}}{t} = \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0}$ en posant $\varphi(t) = e^{t+3} - e^{\sqrt{9+t^2}}$.

Or φ est dérivable en 0 et $\varphi'(t) = e^{3+t} - \frac{2t}{2\sqrt{9+t^2}}e^{\sqrt{9+t^2}}$ donc $\varphi'(0) = e^3$.

Par conséquent, $\lim\limits_{t\to0^+} g(t) = e^3$. Et ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^3$.

sommaire

UTILISER LA QUANTITÉ CONJUGUÉE

COURS

Pour tous réels a et b strictement positifs,

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$\sqrt{a} - b = \frac{a - b^2}{\sqrt{a} + b}$$

Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$. Déterminer le domaine de définition de f et la limite de f en 2.

<u>Domaine de définition de f :</u>

$$f(x)\ existe \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 2x+5 \geq 0 \\ \sqrt{2x+5} \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq -\frac{5}{2} \\ x \neq 2 \end{cases}$$. Donc, $Df = [-2,2[\cup]2,+\infty[$.

<u>Limite de f en 2 :</u>

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{2x+5}+3)}{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{2x+5}+3)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{(x+2-4)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x+5-9)((\sqrt{x+2}+2)} = \frac{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x-4)((\sqrt{x+2}+2)}$$

Donc, $f(x) = \frac{1(\sqrt{2x+5}+3)}{2(\sqrt{x+2}+2)}$. Et ainsi, $\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

sommaire

METTRE EN FACTEUR $(x-a)$ DANS UN QUOTIENT DE (QUASI-)POLYNÔMES QUI S'ANNULENT EN a

Si P est une fonction polynomiale telle que $P(a)=0$ alors il existe Q une fonction polynomiale telle que $P(x) = Q(x)(x-a)$; Q est le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-a)$, le reste est nul.

Déterminer $\lim\limits_{x \to (-2)^+} \dfrac{x^3+8}{\sqrt{x^2+5x+6}}$

$$\frac{x^3+8}{\sqrt{x^2+5x+6}} = \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{\sqrt{(x+2)(x+3)}} = \frac{\sqrt{x+2}^2(x^2-2x+4)}{\sqrt{x+2}\sqrt{x+3}} = \frac{\sqrt{x+2}(x^2-2x+4)}{\sqrt{x+3}}.$$

Donc, $\lim\limits_{x \to (-2)^+} \dfrac{x^3+8}{\sqrt{x^2+5x+6}} = 0.$

sommaire

FAIRE APPARAITRE LE PRODUIT D'UNE FONCTION BORNÉE PAR UNE FONCTION DE LIMITE NULLE

Si u est une fonction bornée sur un voisinage de a et $\lim_{x \to a} v(x) = 0$

alors $\lim_{x \to a} u(x)v(x) = 0$

COURS

Déterminer $\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x}\, sin\left(\frac{1}{x}\right) \ln(x)$

$\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x} \ln(x) \overset{cc}{=} 0$ et $\left(x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ est bornée.

Donc $\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x}\, sin\left(\frac{1}{x}\right) \ln(x) = 0$.

sommaire

ENCADRER, MINORER OU MAJORER

Soit L un réel et a un réel ou un infini.

- Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ au voisinage de a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L = \lim\limits_{x \to a} h(x)$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$.
- Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.
- Si $f(x) \geq g(x)$ au voisinage de a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$.
- Si $|g(x)| \leq \varepsilon(x)$ au voisinage de a et $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.

COURS

Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$

$\forall x > 0, x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ donc $\frac{x-1}{x} < \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq \frac{x}{x}$ i.e. $1 - \frac{1}{x} < \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq 1$.

Or, les deux fonctions $\left(x \mapsto 1 - \frac{1}{x}\right)$ $et(x \mapsto 1)$, qui encadrent $\frac{\lfloor x \rfloor}{x}$, tendent vers la même limite 1 en $+\infty$.

Je peux donc conclure que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$.

Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$

On sait que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(t) \leq t - 1 < t$.

Alors, $\forall x \in [1, +\infty[, 0 \leq \ln(\sqrt{x}) \leq \sqrt{x} - 1 < \sqrt{x}$ ce qui donne, en utilisant les propriétés de ln ,

$\forall x \in [1, +\infty[,\ 0 \leq \frac{1}{2}\ln(x) < \sqrt{x}$. Par conséquent, $\forall x \in [1, +\infty[, 0 \leq \frac{1}{2}\frac{ln(x)}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Or, les deux fonctions $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ $et(x \mapsto 0)$, qui encadrent $\frac{\ln(x)}{x}$, tendent vers la même limite 0 en

$+\infty$. Je peux donc conclure que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

sommaire

UTILISER LES SUITES POUR MONTRER QU'UNE LIMITE N'EXISTE PAS.

COURS

- S'il existe (u_n) une suite telle que : $\begin{cases} \forall n, u_n \in Df \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \\ \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq L \end{cases}$

alors f ne tend pas vers L en a.

- S'il existe (u_n) et (v_n) des suites telles que : $\begin{cases} \forall n, u_n \in Df \ et \ v_n \in Df \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) \end{cases}$

alors f n'a pas de limite en a.

Montrer que $f:\left(x \to x\sin\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)$ n'a pas de limite en 1.

Cherchons deux suites u et v telles que : $\begin{cases} \forall n, u_n \neq 1 \; et \; v_n \neq 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) \end{cases}$.

Or, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$, si elle existe, est $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{1-u_n}\right)$. De même pour v. Donc cherchons $u_n \; et \; v_n$ de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{1-u_n}\right) = 1 \; et \; \lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{1-v_n}\right) = 0$. Et pour cela, cherchons plus simplement u et v telles que $\forall n, \sin\left(\frac{1}{1-u_n}\right) = 1$ et $\forall n, \sin\left(\frac{1}{1-v_n}\right) = 0$. Or,

$\sin\left(\frac{1}{1-u_n}\right) = 1 \Leftarrow \frac{1}{1-u_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \Leftarrow 1 - u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \Leftarrow u_n = 1 - \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$.

$\sin\left(\frac{1}{1-v_n}\right) = 1 \Leftarrow \frac{1}{1-v_n} = 2n\pi \Leftarrow 1 - v_n = \frac{1}{2n\pi} \Leftarrow v_n = 1 - \frac{1}{2n\pi}$.

Posons $u_n = 1 - \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ et $v_n = 1 - \frac{1}{2n\pi}$. Alors d'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et d'autre part,

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{1-u_n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{1-v_n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.

Comme ces deux limites sont différentes, j'en déduis que f n'a pas de limite en 1.

sommaire

D’AUTRES EXEMPLES (EXERCICES)

sommaire

calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}$ et $\lim\limits_{x\to 0^{sgn(a)}}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}$ où a et b constantes réelles non nulles

Posons $f(x)=\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=e^{bxln\left(1+\frac{a}{x}\right)}$ et $h(x)=bxln\left(1+\frac{a}{x}\right)$.

En $+\infty$, on a la FI « $1^{+\infty}$ » pour f et la FI « $\infty\times 0$ » pour h. Ecrivons $h(x)=ab\frac{ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{a}{x}}$.

Comme $\begin{cases}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}\overset{TA}{=}1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a}{x}=0\end{cases}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{a}{x}}=1$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=ab$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=e^{ab}$.

En 0, on a la FI :$+\infty^0$ pour f et la FI « $0\times+\infty$ » pour h. .

Ecrivons $h(x)=bxln\left(1+\frac{a}{x}\right)=bxln\left(\frac{x+a}{x}\right)=bxln\left(\frac{|x+a|}{|x|}\right)=bx[ln(|x+a|)-\ln(|x|)]$; donc

$h(x)=bxln(|x+a|)-bx\ln(|x|)$.

Or, $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln(x)\overset{cc}{=}0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^{sgn(a)}}x\ln(|x|)=0$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0^{sgn(a)}}bxln(|x+a|)=b\times 0\times\ln(|a|)=0$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^{sgn(a)}}h(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^{sgn(a)}}f(x)=1$.

sommaire

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{x-x^2}$?

$x^3\mathrm{e}^{x-x^2} = \mathrm{e}^{\ln(x^3)+x-x^2} = \mathrm{e}^{-x^2\left[1-\frac{3\ln(x)}{x^2}-\frac{1}{x}\right]}$. .or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} \overset{cc}{\triangleq} 0$. donc,

$\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2\left[1-\frac{3\ln(x)}{x^2}-\frac{1}{x}\right] = -\infty$ et ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\mathrm{e}^{x-x^2} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x^2+x}\,\ln(x-x^2)$?

Tout d'abord, $\sqrt{x^2+x}\,\ln(x-x^2)$existe $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x \geq 0 \\ x-x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1+x) \geq 0 \\ x(1-x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]0,1[$.

Prenons donc $x \in]0,1[$. Alors,

$\sqrt{x^2+x}\,\ln(x-x^2) = \sqrt{x(1+x)}\,\ln(x(1-x))) = \sqrt{x}\sqrt{1+x}\,[\ln(x)+\ln(1-x)]$

$= \sqrt{1+x}[\sqrt{x}\,\ln(x)] + \sqrt{x}\sqrt{1+x}\ln(1-x)$.

Or, $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\,\ln(x) \overset{cc}{\triangleq} 0$. Donc, $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x^2+x}\,\ln(x-x^2) = 0$.

sommaire

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(x)\ln(x)e^{1+x-3x^2}$?

$\sin(x)\ln(x)\,e^{1+x-3x^2} = \sin(x)\,e^{\ln(\ln(x))+1+x-3x^2} = \sin(x)\,e^{-3x^2[1-\frac{\ln(\ln(x))}{3x^2}-\frac{1}{3x}]}$.

Or $\forall t>0, \ln(t)<t$ donc $\forall x>1, ln(ln(x))<ln(x)$ et par conséquent, $0<\frac{ln(ln(x))}{x^2}<\frac{ln(x)}{x^2}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}\overset{cc}{\widehat{=}}0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln(x))}{x^2}=0$ par encadrement. par conséquent,

$\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^2[1-\frac{\ln(\ln(x))}{3x^2}-\frac{1}{3x}]=-\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-3x^2[1-\frac{\ln(\ln(x))}{3x^2}-\frac{1}{3x}]}=0$. Alors, comme sin est borné, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(x)\,e^{-3x^2[1-\frac{\ln(\ln(x))}{3x^2}-\frac{1}{3x}]}=0$. J'en conclus que $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(x)\ln(x)\,e^{1+x-3x^2}=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln\left(1+x^2-3x\right)}{\sqrt[3]{1-8x}}$?

$$\frac{\ln\left(1+x^2-3x\right)}{\sqrt[3]{1-8x}}=\frac{\ln[x^2\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}\right)]}{\sqrt[3]{-8x\left(1-\frac{1}{8x}\right)}}=\frac{2\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}\right)}{\sqrt[3]{-8x}\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{8x}\right)}}=\frac{2\mathrm{l}\ \ (x)+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}\right)}{-2\times\sqrt[3]{x}\times\sqrt[3]{1-\frac{1}{8x}}}=\frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}\frac{-1}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{8x}\right)}}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}\right)}{-2\times\sqrt[3]{x}\times\sqrt[3]{1-\frac{1}{8x}}}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}\overset{cc}{\widehat{=}}0$. donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+x^2-3x\right)}{\sqrt[3]{1-8x}}=0$.

sommaire

soit $\boldsymbol{f(x) = ln(1 + \pi^x - x^\pi)}$. Déterminer l'asymptote oblique de $\boldsymbol{Cf}$ en $+\infty$.

$f(x) = ln(1 + \pi^x - x^\pi) = ln\left(\pi^x(1 - \frac{x^\pi}{\pi^x} - \frac{1}{\pi^x})\right) = ln(\pi)x + ln(1 - \frac{x^\pi}{\pi^x} - \frac{1}{\pi^x})$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^\pi}{\pi^x} \overset{cc}{=} 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} ln(1 - \frac{x^\pi}{\pi^x} - \frac{1}{\pi^x})) = 0$ et ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ln(\pi)x = 0$.

Jj'en conclus que la droite d'équation $y = ln(\pi)x$ est asymptote à Cf en $+\infty$.

sommaire

Soit $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{2x-1}{x+3}}\sqrt{4x^2+x-1}$. Déterminer l'asymptote oblique de Cf en $-\infty$

sommaire

. Pour $x < -3, 4x^2+x-1 \geq 0$ *et* $x+3 \neq 0$, donc $f(x)$ existe.

Etudions successivement : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et enfin $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-ax$.

Pour $x < -3$,, $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}}\sqrt{4x^2\left(1+\frac{1}{4x}-\frac{1}{4x^2}\right)} = -2x\mathrm{e}^{\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}}\sqrt{\left(1+\frac{1}{4x}-\frac{1}{4x^2}\right)}$. Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Et, ensuite, pour $x < -3$,, $\frac{f(x)}{x}$ $= -2\mathrm{e}^{\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}}\sqrt{\left(1+\frac{1}{4x}-\frac{1}{4x^2}\right)}$. Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{\mathrm{x}} = -2$. Et enfin, pour $x < 3$,

$$f(x)-(-2)x = 2x - 2x\mathrm{e}^{\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}}\sqrt{\left(1+\frac{1}{4x}-\frac{1}{4x^2}\right)} = -2x\left(\mathrm{e}^{\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}}\sqrt{\left(1+\frac{1}{4x}-\frac{1}{4x^2}\right)}-1\right) = -2\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}}\sqrt{\left(1+\frac{1}{4x}-\frac{1}{4x^2}\right)}-1}{\frac{1}{x}}\right)$$

Donc, $f(x)-(-2)x = -2\left(\frac{\varphi\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right)-\varphi(0)}{\frac{1}{x}-0}\right)$ en posant $\varphi(t) = \mathrm{e}^{\frac{2-t}{1+3t}}\sqrt{\left(1+\frac{t}{4}-\frac{t^2}{4}\right)}$.

On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right)-\varphi(0)}{\frac{1}{x}-0}$ existe et vaut L sietssi $\lim\limits_{t\to0} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0}$ existe et vaut L. Or dans l'expression de φ, seule la racine carrée n'est pas dérivable sur tout son propre domaine de définition mais uniquement sur $\mathbb{R}^{+*}$; mais pour $t = 0, 1+\frac{t}{4}-\frac{t^2}{4} = 1 \in \mathbb{R}^{+*}$; donc la fonction φ est dérivable en 0 et $\varphi'(t) = \frac{-(1+3t)-3(2-t)}{(1+3t)^2}\mathrm{e}^{\frac{2-t}{1+3t}}\sqrt{\left(1+\frac{t}{4}-\frac{t^2}{4}\right)} + \frac{\mathrm{e}^{\frac{2-t}{1+3t}}\left(\frac{1}{4}-\frac{2t}{4}\right)}{2\sqrt{\left(1+\frac{t}{4}-\frac{t^2}{4}\right)}}$ donc $\varphi'(0) = -7e^2+\frac{e^2}{8} = -\frac{55}{8}e^2$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\varphi\left(\frac{1}{x}\right)-\varphi(0)}{\frac{1}{x}-0} =$ $\lim\limits_{t\to0} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0} = -\frac{55}{8}e^2$. Et ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-2)x = \frac{55}{4}e^2$. Cela s'écrit aussi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - \left[(-2)x+\frac{55}{4}e^2\right] = 0$ ce qui signifie que le droite d'équation $y = (-2)x + \frac{55}{4}e^2$ est asymptote à Cf en $-\infty$.

Etudier la fonction $f : (x \mapsto x^x)$ dans le but de tracer sa courbe.

sommaire

$f(x) = x^x = e^{xln(x)}$. Donc $Df = \mathbb{R}^{+*}$ et f est continue et dérivable sur Df et $\forall x \in Df$,

$$f'(x) = [\ln(x) + 1]e^{xln(x)}.$$

Alors, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$. Donc f est strictement croissante sur $]\frac{1}{e}, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0, \frac{1}{e}[$ et admet un minimum en $\frac{1}{e}$ qui vaut $f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{\frac{1}{e}ln\left(\frac{1}{e}\right)} = e^{\frac{-1}{e}}$.

De plus, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = x^{x-1} = e^{(x-1)ln(x)}. Donc, \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. f tend donc très vite vers $+\infty$.

Enfin, $\lim_{x\to0} xln(x) = 0$ donc $\lim_{x\to0} f(x) = 1$; cela signifie que f est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1.

Appelons encore $\tilde{f}$ son prolongement par continuité. Cherchons si $\tilde{f}$ est dérivable en 0.

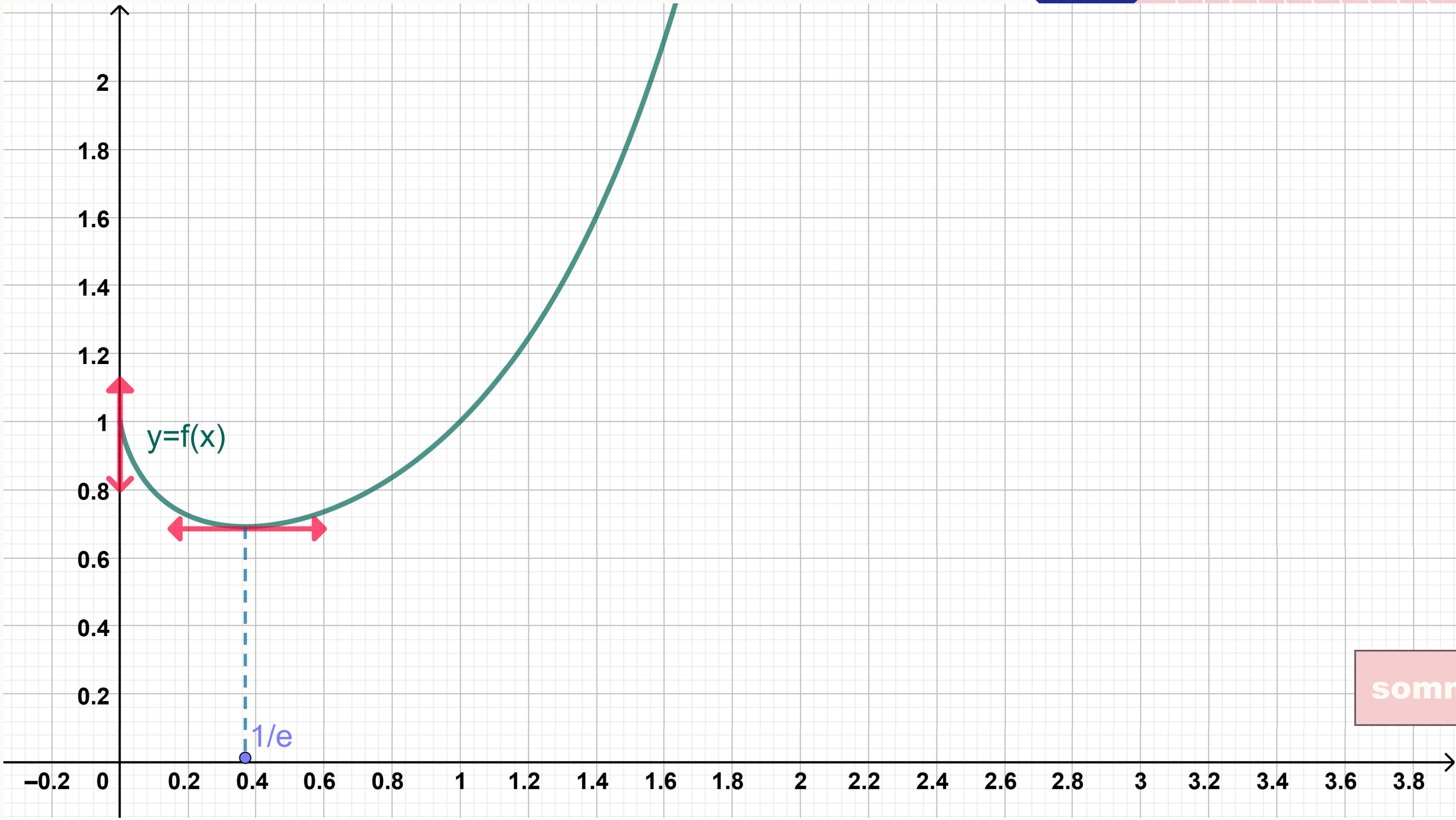
$\tilde{f}$ est continue en 0 et $\tilde{f}$ est au moins dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \tilde{f}'(x) = f'(x) = [\ln(x) + 1]e^{xln(x)}$ $= [\ln(x) + 1]f(x)$. Donc

$\lim_{x\to0} \tilde{f}'(x) = -\infty$. Alors le critère de limite du taux d'accroissement assure que $\lim_{x\to0} \frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(0)}{x-0} = -\infty$. Donc $\tilde{f}$ n'est pas dérivable en 0 et sa courbe admet une tangente verticale en 0.

Voici la courbe de f

Courbe de f

Courbe de $f : (x \mapsto x^x)$



sommaire

FIN

sommaire