

Méthodes pour calculer les limites

1. METTRE LES TERMES DOMINANTS EN FACTEUR (valable surtout en $+\infty$ et aussi en 0)

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4 \ln(x) - 10\sqrt{x}}{\sqrt{5x^4 - 2x - \ln(x)} + x - 1}$.

$$\frac{x^2 - 4 \ln(x) - 10\sqrt{x}}{\sqrt{5x^4 - 2x - \ln(x)} + x - 1} = \frac{x^2 \left(1 - \frac{4 \ln(x)}{x^2} - \frac{10}{x\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{5x^4 \left(1 - \frac{2}{5x^3} - \frac{\ln(x)}{x^4}\right)} + x - 1} = \frac{x^2 \left(1 - \frac{4 \ln(x)}{x^2} - \frac{10}{x\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{5x^2 \left[\left(1 - \frac{2}{5x^3} - \frac{\ln(x)}{x^4}\right) + \frac{1}{\sqrt{5x}} - \frac{1}{\sqrt{5x^2}}\right]} + x - 1} = \frac{x^2 \left(1 - \frac{4 \ln(x)}{x^2} - \frac{10}{x\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{5} \left[\sqrt{\left(1 - \frac{2}{5x^3} - \frac{\ln(x)}{x^4}\right) + \frac{1}{\sqrt{5x}} - \frac{1}{\sqrt{5x^2}}}\right] + \frac{x-1}{\sqrt{5}}}. \text{ Donc,}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4 \ln(x) - 10\sqrt{x}}{\sqrt{5x^4 - 2x - \ln(x)} + x - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

2. FACTORISER ET SIMPLIFIER PAR $(x - a)$ lorsque a est racine des numérateur et dénominateur polynomiaux ou presque.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x^3 + 8}{\sqrt{x^2 + 5x + 6}}$

$$= \frac{x^3 + 8}{\sqrt{x^2 + 5x + 6}} = \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{\sqrt{(x+2)(x+3)}} = \frac{\sqrt{x+2}(x^2 - 2x + 4)}{\sqrt{x+2}\sqrt{x+3}} = \frac{\sqrt{x+2}(x^2 - 2x + 4)}{\sqrt{x+3}}. \text{ Donc, } \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x^3 + 8}{\sqrt{x^2 + 5x + 6}} = 0.$$

3. QUANTITE CONJUGUEE

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$.

Tout d'abord, on a une forme indéterminée $(+\infty) - (+\infty)$. Levons cette indéterminée :

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \frac{x + \sqrt{x} - x}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}\right)\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}. \text{ Donc, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{1}{2}.$$

Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$. Déterminer le domaine de définition de f . Puis calculer la limite de f en 2.

Domaine de définition de f : $f(x)$ existe $\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 2x+5 \geq 0 \\ \sqrt{2x+5} \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq -\frac{5}{2} \\ x \neq 2 \end{cases}$. Donc, $Df = [-2, 2[\cup]2, +\infty[$.

Limite de f en 2 : $f(x) = \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{2x+5}+3)}{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{2x+5}+3)} = \frac{(x+2-4)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x+5-9)(\sqrt{2x+5}+3)} = \frac{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x-4)(\sqrt{2x+5}+3)} = \frac{1(\sqrt{2x+5}+3)}{2(\sqrt{2x+5}+3)}$. Donc, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

4. PASSER A LA LIMITE A GAUCHE ET A DROITE DU POINT où l'on calcule la limite

Déterminer le domaine de définition de f : $(x \mapsto \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}})$. Puis prouver que f n'est pas dérivable en 0.

Df ? $f(x)$ existe si et si $\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ 1 - \sqrt{1 - x^2} \geq 0 \end{cases}$ si et si $\begin{cases} (1-x)(1+x) \geq 0 \\ 1 \geq \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$ si et si $\begin{cases} x \in [-1; 1] \\ 1 \geq 1 - x^2 \end{cases}$ si et si $\begin{cases} x \in [-1; 1] \\ 0 \geq -x^2 \end{cases}$ si et si $x \in [-1; 1]$.
TJS VRAI

Donc $Df = [-1; 1]$.

Etudions la **dérivabilité** de f en 0. Pour cela, calculons la limite en 0 de $\tau(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

$$\forall x \in Df \setminus \{0\}, \tau(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}}{x} = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}}{x \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \frac{\sqrt{(1 - \sqrt{1 - x^2})(1 + \sqrt{1 - x^2})}}{x \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \frac{\sqrt{1 - (1 - x^2)}}{x \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \frac{\sqrt{x^2}}{x \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \frac{|x|}{x \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}}.$$

Donc, si $x \in]0, 1]$, $\tau(x) = \frac{x}{x \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}}$ et par conséquent, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tau(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

si $x \in [-1, 0[$, $\tau(x) = \frac{-x}{x \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}}$ et par conséquent, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \tau(x) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$. J'en déduis que τ n'a pas de limite en 0 et ainsi, f n'est pas dérivable en 0.

5. FAIRE APPARAÎTRE LE PRODUIT D'UNE FONCTION BORNEE PAR UNE FONCTION DE LIMITE NULLE

Bornée $\times$ limite nulle : Si $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ et f est bornée au voisinage de a dans Df alors $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x)f(x) = 0$.

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

$(x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right))$ est bornée et $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. Donc, $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

6. ENCADRER LA FONCTION (ou la suite)

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{x}$.

$\forall x \in \mathbb{R}^{++}$, $x - 1 < |x| \leq x$; donc $1 - \frac{1}{x} < \frac{|x|}{x} \leq 1$. Les deux fonctions qui encadrent $\frac{|x|}{x}$ tendent vers la même limite 1 en $+\infty$. Donc, le théorème de limite par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{x} = 1$.

7. UTILISER LES SYMETRIES OU AUTRES PROPRIETES DE LA COURBE

Calcul de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$ (Cf chap trigonométrie).

8. SE PLACER PROCHE DU POINT OU DE L'INFINI où l'on calcule la limite

Soit $p \in \mathbb{Z}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow p} [x] + \sqrt{x - [x]}$ et $\lim_{x \rightarrow p} [x] + \sqrt{x - [x]}$.

$\forall x \in [p - 1, p[$, $[x] = p - 1$ et $[x] + \sqrt{x - [x]} = p - 1 + \sqrt{x - p + 1}$. Donc, $\lim_{x \rightarrow p} [x] + \sqrt{x - [x]} = p - 1 + \sqrt{p - p + 1} = p - 1 + \sqrt{1} = p$.

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$.

$\forall x \in]-1, 0[$, $[x] = -1$ donc $\frac{|x|}{x} = -\frac{1}{x}$. Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = +\infty$.

$\forall x \in]0, 1[$, $[x] = 0$ donc $\frac{|x|}{x} = 1$. Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$.

9. FAIRE APPARAÎTRE DES LIMITES USUELLES :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \stackrel{T.A.}{=} 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} \stackrel{T.A.}{=} 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \stackrel{T.A.}{=} 1, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} \stackrel{T.A.}{=} 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{T.A.}{=} 1$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \stackrel{C.C.}{=} 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{C.C.}{=} +\infty \text{ (ou } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{C.C.}{=} 0), \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) \stackrel{C.C.}{=} 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x \stackrel{C.C.}{=} 0 \text{ puis pour } (p, m) \in (\mathbb{Q}^{++})^2, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^m(x)}{x^p} \stackrel{C.C.}{=} 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{mx}}{x^p} \stackrel{C.C.}{=} +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{e^{mx}} \stackrel{C.C.}{=} 0^+, \lim_{x \rightarrow 0} x^p \ln^m(x) \stackrel{C.C.}{=} 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^p e^{mx} \stackrel{C.C.}{=} 0.$$

$$\text{Calculer } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{\sqrt[3]{x}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\sqrt{x}} - 1}{\ln(1+6x)}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}, \lim_{x \rightarrow 0} (4x^2 - 3x) \ln(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 5x + 1}}{e^{5x}}.$$

$$\bullet \quad \frac{\sin(3x)}{x} = 3 \times \frac{\sin(3x)}{3x}. \text{ Or, } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} \stackrel{T.A.}{=} 1 \end{cases}. \text{ Donc, par composition, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 1 \text{ et ainsi, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3.$$

$$\bullet \quad \frac{\tan(x)}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\tan(x)}{x} \times \frac{x}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\tan(x)}{x} x^{1-\frac{1}{3}} = \frac{\tan(x)}{x} \sqrt[3]{x^2}. \text{ Or, } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} \stackrel{T.A.}{=} 1 \end{cases}. \text{ Donc par produit, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{\sqrt[3]{x}} = 0.$$

$$\bullet \quad \frac{e^{-\sqrt{x}} - 1}{\ln(1+6x)} = \frac{e^{-\sqrt{x}} - 1}{-\sqrt{x}} \times \frac{-\sqrt{x}}{6x} \times \frac{6x}{\ln(1+6x)} = \frac{e^{-\sqrt{x}} - 1}{-\sqrt{x}} \times \frac{1}{\ln(1+6x)} \times \frac{-1}{6\sqrt{x}}. \text{ Or, } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} -\sqrt{x} = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\exp(t) - 1}{t} \stackrel{T.A.}{=} 1 \end{cases}. \text{ Donc, par composition, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\sqrt{x}} - 1}{-\sqrt{x}} = 1. \text{ De plus, } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} 6x = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \stackrel{T.A.}{=} 1 \end{cases}.$$

$$\text{Donc, par composition, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x)}{6x} = 1. \text{ Enfin, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{6\sqrt{x}} = -\infty. \text{ Donc, par produit, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\sqrt{x}} - 1}{\ln(1+6x)} = -\infty.$$

$$\bullet \quad \frac{\cos(x) - 1}{x^2} \stackrel{\text{angle double}}{=} \frac{-2\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2} = -2 \left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \right)^2 \frac{(\frac{x}{2})^2}{x^2} = -2 \left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \right)^2 \frac{(\frac{x^2}{4})}{x^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \right)^2. \text{ Or, } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} \stackrel{T.A.}{=} 1 \end{cases}. \text{ Donc, par composition, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} = 1 \text{ et ainsi,}$$

$$\text{par produit, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\bullet \quad (4x^2 - 3x) \ln(x) = -3 \left(1 - \frac{4}{3}x \right) x \ln(x). \text{ Or, } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) \stackrel{C.C.}{=} 0. \text{ Donc, par produit, } \lim_{x \rightarrow 0} (4x^2 - 3x) \ln(x) = 0.$$

$$\bullet \quad \frac{\sqrt{2x^2 - 5x + 1}}{e^{5x}} = \frac{\sqrt{2x^2(1 - \frac{5}{2x} + \frac{1}{2x^2})}}{e^{5x}} = \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{5}{2x} + \frac{1}{2x^2}} \frac{|x|}{e^{5x}} \stackrel{\text{en considérant } x > 0}{=} \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{5}{2x} + \frac{1}{2x^2}} \frac{x}{e^{5x}}. \text{ Or, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^1}{e^{5x}} \stackrel{C.C.}{=} 0^+. \text{ Donc, par produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 5x + 1}}{e^{5x}} = 0.$$

10. RECONNAITRE UN TAUX D'ACCROISSEMENTS

$$\text{Calculer } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5x^2 - 2x + 1} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}}{x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{2}{x}} \right).$$

$$\bullet \quad \text{Posons } f(x) = \sqrt{5x^2 - 2x + 1} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}.$$

$$\text{Alors } f \text{ est définie et dérivable en } 0 \text{ et } f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = \frac{10 \times 0 - 2}{2\sqrt{5 \times 0^2 - 2 \times 0 + 1}} - \frac{6 \times 0 + 3}{2\sqrt{3 \times 0^2 + 3 \times 0 + 1}} = -1 - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}.$$

$$\text{De plus, } \frac{\sqrt{5x^2 - 2x + 1} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}. \text{ Alors comme } f \text{ est dérivable en } 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5x^2 - 2x + 1} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = -\frac{5}{2}.$$

$$\bullet \quad x \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{2}{x}} \right) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}} \stackrel{t = \frac{1}{x}}{=} \frac{e^t - e^{2t}}{t}. \text{ Comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} t = 0, \text{ étudions } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - e^{2t}}{t}. \text{ Posons } f(t) = e^t - e^{2t}. f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 0 \text{ et } f'(0) = 1 - 2 = -1.$$

$$\text{Donc, } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - e^{2t}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = f'(0) = -1. \text{ Alors par composition } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}} = -1.$$

11. SE RAMENER à UNE LIMITE EN 0.

$$\text{On cherche } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ tq } a \in \mathbb{R}. \text{ On pose } \begin{cases} t = x - a \\ g(t) = f(a + t) \end{cases}. \text{ Alors } \begin{cases} x = a + t \\ f(x) = g(x - a) \end{cases}. \text{ Par composition, } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = L.$$

$$\text{On cherche } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x). \text{ On pose } \begin{cases} t = \frac{1}{x} \\ g(t) = f(x) \end{cases}. \text{ Alors } \begin{cases} x = \frac{1}{t} \\ f(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases}. \text{ Par composition, } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0^\pm} g(t) = L.$$

$$\text{Calculer } \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi^2 - x^2}} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1+3x}{x}} - e^{\frac{\sqrt{9x^2+1}}{x}} \right).$$

$$\bullet \quad \text{Posons } f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi^2 - x^2}}. \text{ On pose } \begin{cases} t = x - \pi \\ g(t) = f(x) \end{cases}. \text{ Alors } \begin{cases} x = \pi + t \\ f(x) = g(x - \pi) \end{cases}. \text{ Alors } \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0^-} g(t) = L.$$

$$\text{Donc } g(t) = f(t + \pi) = \frac{\sin(t + \pi)}{\sqrt{\pi^2 - (t + \pi)^2}} = \frac{-\sin(t)}{\sqrt{-2\pi t - t^2}} = \frac{-\sin(t)}{\sqrt{-2\pi t(1 + \frac{t}{2\pi})}} = \frac{-\sin(t)}{\sqrt{-2\pi t} \sqrt{1 + \frac{t}{2\pi}}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(t)}{t} \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{t}{2\pi}}}.$$

$$g(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(t)}{t} \left(\frac{-\sqrt{-t}}{\sqrt{-t}} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{t}{2\pi}}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(t)}{t} (-\sqrt{-t}) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{t}{2\pi}}}.$$

$$\text{Alors, comme } \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sin(t)}{t} = 1, \lim_{t \rightarrow 0^-} g(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times 1 \times 0 \times 1 = 0. \text{ Par conséquent, } \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = 0.$$

$$\bullet \quad \text{Posons } f(x) = x \left(e^{\frac{1+3x}{x}} - e^{\frac{\sqrt{9x^2+1}}{x}} \right). \text{ On pose } \begin{cases} t = \frac{1}{x} \\ g(t) = f(x) \end{cases}. \text{ Alors } \begin{cases} x = \frac{1}{t} \\ f(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases}. \text{ Alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = L.$$

$$\text{Soit } t > 0. g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t} \left(e^{\frac{1+3}{t}} - e^{\frac{\sqrt{\frac{9}{t^2}+1}}{\frac{1}{t}}} \right) \stackrel{\text{car } t > 0}{=} \frac{e^{t+3} - e^{\sqrt{9+t^2}}}{t} \stackrel{\text{en posant } \varphi(t) = e^{t+3} - e^{\sqrt{9+t^2}}}{=} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0}. \text{ Or } \varphi \text{ est dérivable en } 0 \text{ et}$$

$$\varphi'(t) = e^{3+t} - \frac{2t}{2\sqrt{9+t^2}} e^{\sqrt{9+t^2}} \text{ donc } \varphi'(0) = e^3. \text{ Par conséquent, } \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = e^3. \text{ Et ainsi, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^3.$$