

Les dernières fonctions usuelles.

1 RAPPEL : Si f est une fonction continue sur un intervalle I alors

1. f admet une primitive sur I
2. deux primitives F et G de f sur I vérifient : $\exists c \in \mathbb{R} / \forall x \in I, G(x) = F(x) + c$
3. en fixant $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}$ il existe une et une seule primitive F de f sur I qui vérifie : $F(a) = b$.

2 RAPPEL : Si f est une fonction monotone sur $]a, b[$ (où a et b réels ou infinis) alors $\lim_{a^+} f$ et $\lim_{b^-} f$ existent.

3 RAPPEL : par définition, $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}$.

I Fonctions logarithmes et exponentielles.

1. Fonction logarithme népérien

4 Déf : On appelle logarithme népérien, notée $\ln$ (ou $\log$), la primitive, sur $\mathbb{R}^{+*}$, de la fonction $(t \mapsto \frac{1}{t})$ qui s'annule en 1.

5 Conséquences : 1. $\ln(1) = 0$. La fonction $\ln$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln'(x) = \frac{1}{x}$.

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} \stackrel{TA}{=} 1$ ou encore $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \stackrel{TA}{=} 1$.

3. La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

4. $(x \mapsto x \ln(x) - x)$ est une primitive de $(x \mapsto \ln(x))$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

6 Exercice : Soit a et b deux réels. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx}$

7 Prop : Si u est dérivable et ne s'annule pas sur un domaine D alors $\varphi = \ln|u|$ est dérivable sur D et $\forall x \in D, \varphi'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

8 Conséquence Si u est dérivable et ne s'annule pas sur D , $(x \mapsto \ln|u(x)|)$ est une primitive de $(x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)})$ sur D . En particulier, une primitive de $(x \mapsto \frac{1}{x})$ sur $\mathbb{R}^*$ est $(x \mapsto \ln|x|)$.

9 Premières propriétés algébriques :

1. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. Généralisation : ...
2. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
3. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
4. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall r \in \mathbb{Q}, \ln(x^r) = r \ln(x)$.

10 Prop : $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

11 Prop :

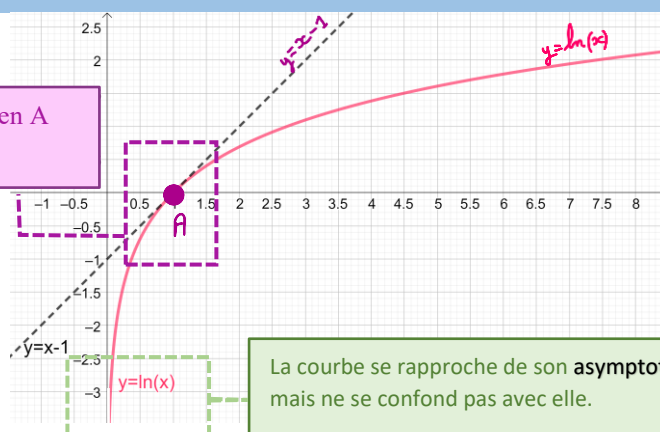
1. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(x) \leq x - 1$. Donc la courbe de $\ln$ est sous sa tangente au point $A(1; 0)$.
2. $\forall t \in]-1; +\infty[, t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$

12 Les premières croissances comparées :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. Croissance beaucoup plus lente que id ; on dit que la courbe de $\ln$ a une branche parabolique de direction asymptotique (Ox) en $+\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$.

13 Courbe du $\ln$

La courbe se confond avec sa tangente en A au voisinage de A .



Croissance lente : $\ln$ tend lentement vers $+\infty$.

La courbe se rapproche de son asymptote mais ne se confond pas avec elle.

2. Fonction exponentielle

14 Déf : le logarithme népérien $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$.
Sa bijection réciproque est, par définition, la fonction exponentielle notée $\exp : (x \mapsto e^x)$.

15 Par conséquent,

1. $\exp$ est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ de bijection réciproque $\ln$. La fonction $\exp$ est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. $e^0 = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Donc, $C_{\exp}$ a une asymptote horizontale en $-\infty$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, e^{\ln(x)} = x$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$ et $\forall x > 0, \forall y \in \mathbb{R}, (y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y)$.
4. La fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x) = e^x$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{TA}{=} 1$.
5. Si u est une fonction dérivable sur D alors $h: (x \mapsto e^{u(x)})$ est dérivable sur D et $\forall x \in D, h'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

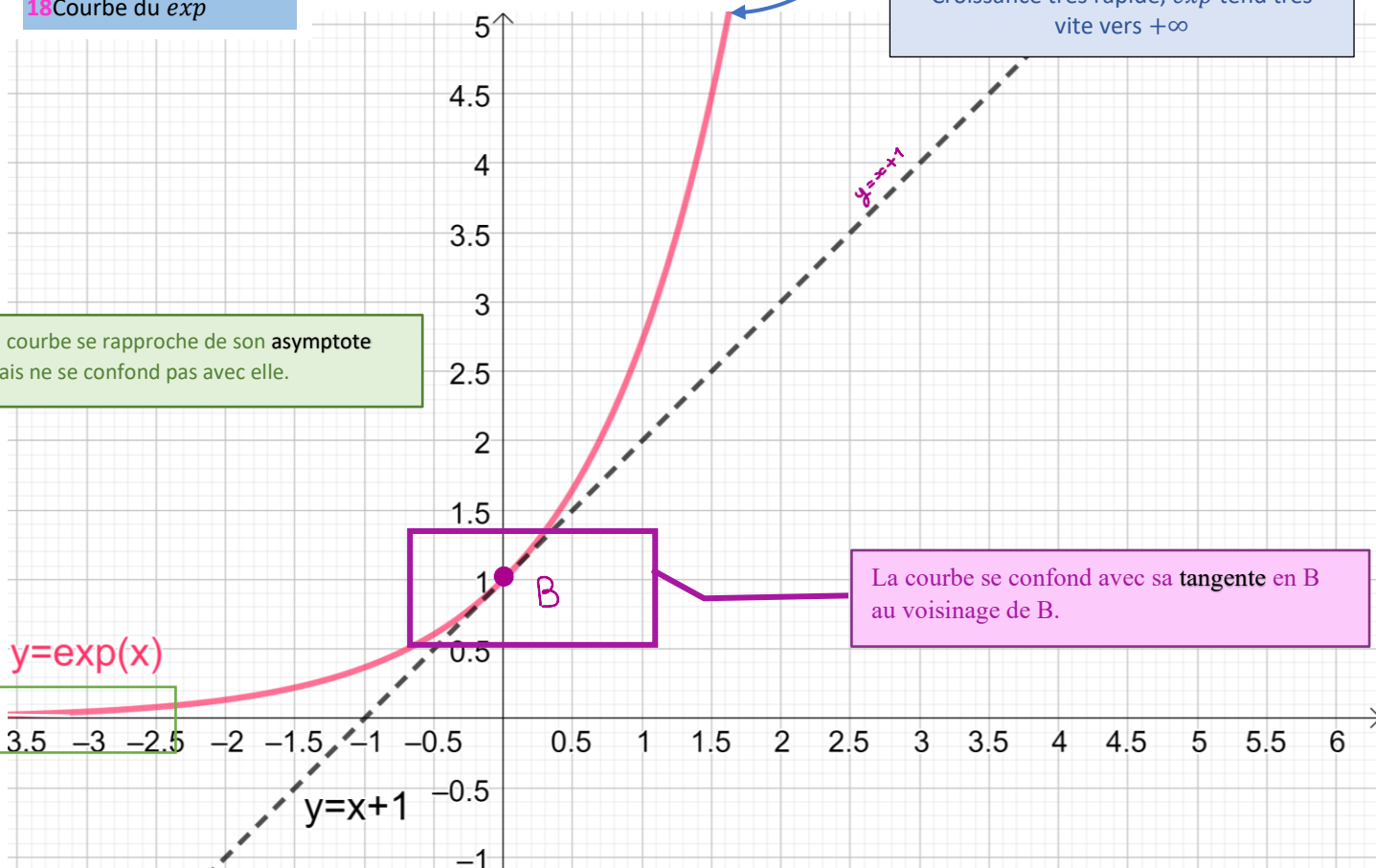
16 Propriétés algébriques : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall r \in \mathbb{Q}$,

1. $e^{a+b} = e^a e^b$ Généralisation :
2. $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$
3. $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
4. $e^{ra} = (e^a)^r$ et $\forall x > 0, x^r = e^{r \ln(x)}$.

17 Autres propriétés :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. Croissance très rapide beaucoup plus rapide que id : on dit que $C_{\exp}$ a une branche parabolique de direction asymptotique (Oy) .
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$. Donc $C_{\exp}$ est toujours au-dessus de sa tangente au point $B(0; 1)$.

18 Courbe du $\exp$



19 Théorème : Pour tout réel a non nul, $(x \mapsto \frac{1}{a} e^{ax})$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $(x \mapsto e^{ax})$.
Si u est dérivable sur D alors $(x \mapsto e^{u(x)})$ est une primitive sur D de $(x \mapsto u'(x)e^{u(x)})$.

3. Logarithme et exponentielle de base a

20Déf : soit a un réel strictement positif et distinct de 1.

Pour tout réel x strictement positif, on définit $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ le logarithme de base a de x .

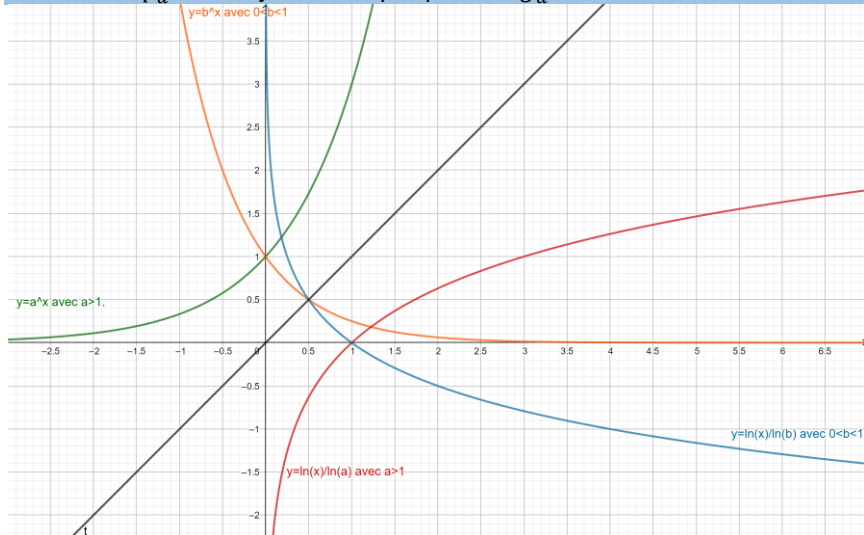
Pour tout réel x , on définit $\exp_a(x) = e^{x \ln(a)}$ l'exponentielle de base a de x . **Autre notation :** $a^x = \exp_a(x) = e^{x \ln(a)}$.

On définit ainsi les fonctions $\log_a$ et $\exp_a$ logarithme et exponentielle de base a

21NB : $\ln = \log_e$ et $\exp = \exp_e$.

Définition cohérente avec celle de $u(x)^{v(x)}$

22Théo : $\exp_a$ est la bijection réciproque de $\log_a$.



23 Courbes de $\exp_a$ et $\log_a$

- Si $a > 1$ alors $\ln(a) > 0$ donc les courbes de $\log_a$ et $\ln$ ont la même allure. Idem pour les courbes de $\exp$ et $\exp_a$.
- Si $0 < b < 1$ alors $\ln(b) < 0$ donc les courbes de $\log_b$ et $-\ln$ ont la même allure. Idem pour les courbes de $\exp_b$ et $(x \mapsto e^{-x})$.

24Propriétés algébriques : $\log_a$ et $\exp_a$ vérifient les mêmes propriétés algébriques que leurs homologues respectifs $\ln$ et $\exp$. A savoir : soit a et b des réels strictement positif et distincts de 1.

Pour tous réels x et y strictement positifs et tout rationnel α ,

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad \log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \quad \log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a(x)$$

Pour tous réels x et y et tout rationnel α ,

$$\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \times \exp_a(y) \quad i. e. \quad a^{x+y} = a^x a^y$$

$$\exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)} \quad i. e. \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$\exp_a(x - y) = \frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)} \quad i. e. \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$(\exp_a(x))^\alpha = \exp_a(\alpha x) \quad i. e. \quad (a^x)^\alpha = a^{\alpha x}$$

$$\exp_{ab}(x) = \exp_a(x) \times \exp_b(x) \quad i. e. \quad a^x b^x = (ab)^x$$

$$\exp_{a/b}(x) = \frac{\exp_a(x)}{\exp_b(x)} \quad i. e. \quad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

25NB : Si $a < b$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{b^x} = 0$ i.e. $a^x \ll b^x$

26Ex : Montrer que $C_{\log_a}$ et $C_{\log_{\frac{1}{a}}}$ sont symétriques par rapport à (Ox) et que $C_{\exp_a}$ et $C_{\exp_{\frac{1}{a}}}$ sont symétriques par rapport à (Oy) .

II Fonctions puissances réelles

27 Déf : Soit α un réel. Pour tout réel x strictement positif, on définit : $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ la puissance α du réel x .
On définit ainsi la fonction puissance réelle α que l'on notera f_α . f_α est donc définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $f_\alpha(x) = x^\alpha$.

28 Rques : Si $\alpha = 0$ alors f_α est la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Si $\alpha = 1$ alors f_α coïncide avec l'identité $id: (x \rightarrow x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Si $\alpha \in \mathbb{Z}$ ie $\alpha = n$ alors f_α coïncide avec $(x \rightarrow x^n)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Si $\alpha = \frac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ alors f_α coïncide avec $(x \rightarrow \sqrt[n]{x})$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

29 Propriétés algébriques des puissances réelles :

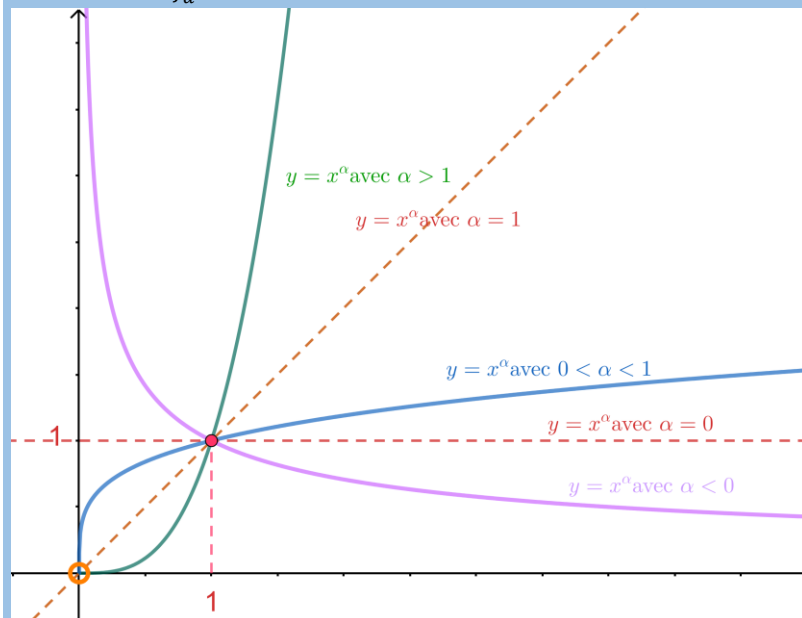
Soit α, β deux réels. Soit x, y deux réels strictement positifs.

$$\begin{aligned} (xy)^\alpha &= x^\alpha y^\alpha & \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha &= \frac{x^\alpha}{y^\alpha} \\ x^\alpha x^\beta &= x^{\alpha+\beta} & x^{-\alpha} &= \frac{1}{x^\alpha} \\ x^{\alpha-\beta} &= \frac{x^\alpha}{x^\beta} & (x^\alpha)^\beta &= x^{\alpha\beta} \\ \ln(x^\alpha) &= \alpha \ln(x) & (e^x)^\beta &= e^{\beta x} \end{aligned}$$

30 Généralisations : Soient $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des réels, $x, x_1, x_2, \dots, x_n$ des réels strictement positifs.
 $(\prod_{k=1}^n x_k)^\alpha = \prod_{k=1}^n x_k^\alpha$ et $\prod_{k=1}^n x_k^\alpha = x^{\sum_{k=1}^n \alpha_k}$.

31 Propriétés de la fonction puissance réelle α

- $f_\alpha(1) = 1$.
- f_α est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $(f_\alpha)^{-1} = f_{\frac{1}{\alpha}}$.
- f_α est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout réel $x > 0$, $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\alpha - 1}{x - 1} \stackrel{TA}{=} \alpha$ ie. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \alpha$.
- Si $\alpha < 0$ alors f_α est strictement décroissante et Cf_α admet deux asymptotes l'une verticale en 0 et l'autre horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.
- Si $0 < \alpha < 1$ alors f_α est strictement croissante, f_α est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0 et $C\tilde{f}_\alpha$ a une tangente verticale en 0. (Donc, Cf_α admet le point limite 0 qu'elle approche en se collant à l'axe des ordonnées) et Cf_α admet une branche parabolique de direction asymptotique (Ox) en $+\infty$.
- Si $\alpha > 1$ alors f_α est strictement croissante, f_α est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0 et $C\tilde{f}_\alpha$ a une tangente horizontale en 0 (Cf_α admet le point limite 0 qu'elle approche en se collant à l'axe des abscisses) et Cf_α admet une branche parabolique de direction asymptotique (Oy) en $+\infty$.
- Courbe de f_α



9. si u est dérivable sur D et $\forall x \in D, u(x) > 0$ alors $\varphi: (x \mapsto u^\alpha(x))$ est dérivable sur D et $\forall x \in D, \varphi'(x) = \alpha u'(x) u(x)^{\alpha-1}$.

10. Si $\alpha \neq -1$ alors $(x \mapsto \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1})$ est une primitive de $(x \mapsto x^\alpha)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Si $\alpha = -1$ alors $(x \mapsto \ln(x))$ est une primitive de $(x \mapsto x^\alpha)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

32 NB : Soit α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$.
Au voisinage de $+\infty$, $x^\alpha \ll_{+\infty} x^\beta$.
Au voisinage de 0, $x^\beta \ll_0 x^\alpha$.

33 Théorème des croissances comparées. Soit α, β, γ des réels strictement positifs.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{e^{\gamma x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\beta e^{\gamma x} = 0$$

Conséquences : Si $\alpha > 0, \beta > 0$ et $a > 1$ alors $\ln^\alpha(x) \ll_{+\infty} x^\beta \ll_{+\infty} a^x$.

34 Exercices : 1. Soit $f(x) = \ln(1 + \pi^x - x^\pi)$. Déterminer l'asymptote oblique de Cf en $+\infty$.

2. Etudier la fonction $f: (x \mapsto x^x)$ dans le but de tracer sa courbe.

III Fonctions cosinus et sinus hyperboliques.

35 Déf : pour tout réel x , $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ est le cosinus hyperbolique de x et $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ est le sinus hyperbolique de x .
On définit ainsi deux fonctions : la fonction sinus hyperbolique sh et la fonction cosinus hyperbolique ch sur tout $\mathbb{R}$.

36 Propriétés algébriques des sinus et cosinus hyperboliques

Pour tous réels a et b ,

- $ch^2 a - sh^2 a = 1$
- $ch(a+b) = ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b)$
- $sh(a+b) = sh(a)ch(b) + ch(a)sh(b)$
- $ch(2a) = ch^2(a) + sh^2(a) = 2ch^2(a) - 1 = 1 + 2sh^2(a)$
- $sh(2a) = 2sh(a)ch(a)$
- $1 - e^a = -2sh\left(\frac{a}{2}\right)e^{\frac{a}{2}}$
- $1 + e^a = 2ch\left(\frac{a}{2}\right)e^{\frac{a}{2}}$

37 Propriétés des fonctions sh et ch

- Les fonctions ch et sh sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , $ch'(x) = sh(x)$ et $sh'(x) = ch(x)$.

- Si u est dérivable sur D alors $ch(u)$ et $sh(u)$ sont dérivables sur D et

$$\forall x \in D, (ch(u))'(x) = u'(x)sh(u(x)) \text{ et } (sh(u))'(x) = u'(x)ch(u(x))$$

- ch est paire, sh est impaire.

- Pour tout réel x , $ch(x) \geq 1$ et $ch(x) > \max\left(\frac{e^x}{2}, \frac{e^{-x}}{2}\right) > |sh(x)| \geq |x|$ et $(shx > 0 \text{ si et seulement si } x > 0)$.

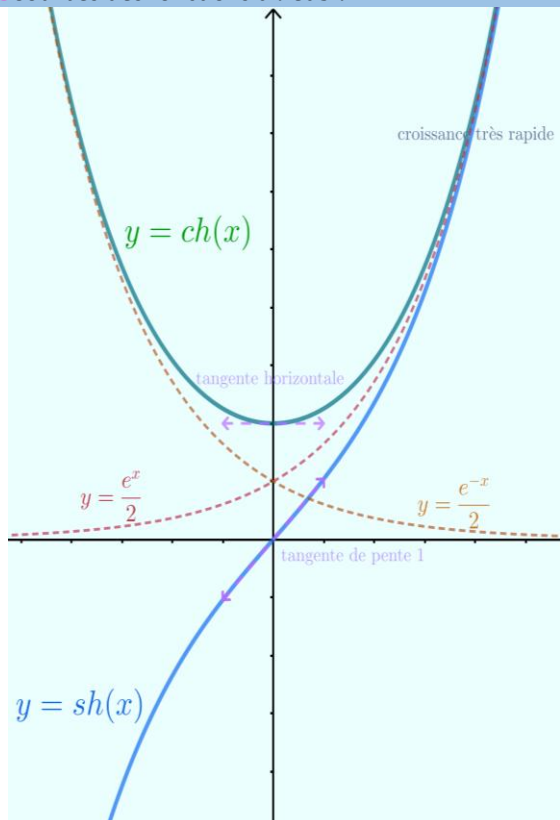
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{shx}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{chx-1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{chx-1}{x^2} = \frac{1}{2}$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{shx}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{chx}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{chx}{shx} = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{chx}{e^x} = \frac{1}{2}$. Donc les courbes de ch et sh ont des branches paraboliques de direction asymptotiques (Oy) en $+\infty$ et $-\infty$.

- sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x, sh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ et sh^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x, (sh^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

- ch induit une bijection $ch|_1$ de $\mathbb{R}^+$ sur $[1; +\infty[$ et $\forall x \geq 1, ch|_1^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ et $ch|_1^{-1}$ est dérivable sur $]1; +\infty[$ et $\forall x > 1, (ch|_1^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

38 Courbes des fonctions ch et sh



39 Primitive

- ch est une primitive de sh sur $\mathbb{R}$ et sh est une primitive de ch sur $\mathbb{R}$.
- Si a est un réel non nul alors $(x \mapsto \frac{1}{a}ch(ax))$ est une primitive de $(x \mapsto sh(ax))$ sur $\mathbb{R}$ et $(x \mapsto \frac{1}{a}sh(ax))$ est une primitive de $(x \mapsto ch(ax))$ sur $\mathbb{R}$.
- $(x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}))$ est une primitive de $(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}})$ sur $\mathbb{R}$.
- $(x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}))$ est une primitive de $(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}})$ sur $]1; +\infty[$.

40 Equations :

$$sh(x) = sh(y) \Leftrightarrow x = y$$

$$y = sh(x) \Leftrightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

$$ch(x) = ch(y) \Leftrightarrow x = \pm y$$

$$y = ch(x) \Leftrightarrow x = \pm \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

40bis Exercice :

- Etudier la fonction tangente hyperbolique $th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$.
- Montrer que la fonction th est bijective de $\mathbb{R}$ sur un domaine à déterminer et trouver une expression de sa bijection réciproque.
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{th(x)}{x}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{th(3x)}{sh(4x)}$.

IV Fonctions Arcsinus, Arccosinus et Arctangente

1. Arcsinus

Sinus est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Donc, $\sin$ induit une bijection $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1; 1]$.

41 Déf. 1) Soit $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$. La fonction Arcsin est, par définition, la bijection réciproque de $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$. La fonction

Arcsin est définie sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par l'équivalence : $\begin{cases} y = \sin(x) \\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Arcsin}(y) = x \\ y \in [-1, 1] \end{cases}$.

2) Soit $y \in [-1; 1]$ Le réel $\text{Arcsin}(y)$ est donc l'unique réel de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dont le sinus vaut y .

42 Valeurs particulières :

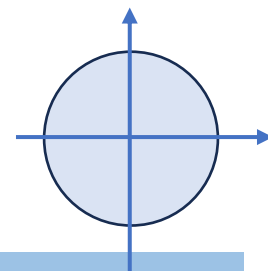
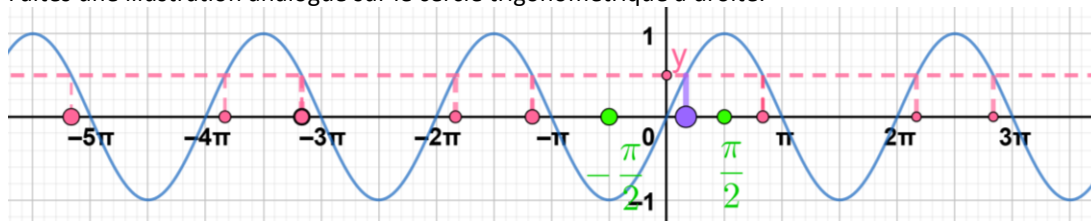
$t = \sin(y)$	0	1	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\text{Arcsin}(t) = y$	0	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$

43 Equations : Soit $y \in [-1; 1]$. Les antécédents de y par $\sin$ sont donc tous les réels de la forme $\text{Arcsin}(y) + 2k\pi$ tels ou de la forme $\pi - \text{Arcsin}(y) + 2k\pi$ tels que $k \in \mathbb{Z}$.

Autrement dit, $y = \sin(x) \Leftrightarrow [x \equiv \text{Arcsin}(y)[2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - \text{Arcsin}(y)[2\pi]]$

44 Illustration : plaçons dans le plan ci-dessous les antécédents de y par $\sin$ et donnez leurs expressions à l'aide de $\text{Arcsin}(y)$.

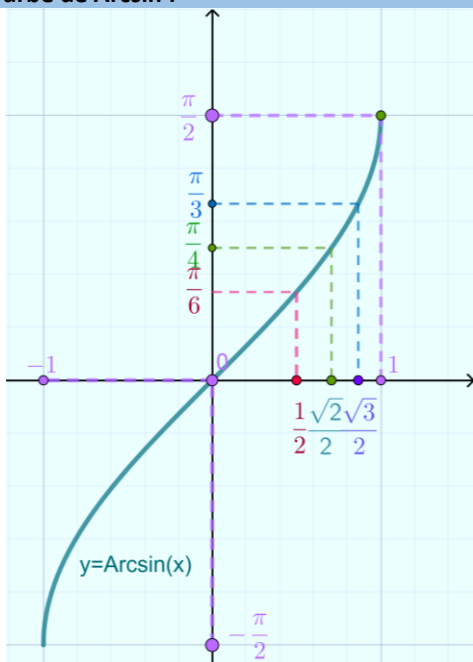
Faites une illustration analogue sur le cercle trigonométrique à droite.



45 Propriétés :

- $\forall x \in [-1; 1], \cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arcsin}(\sin(x))$ existe mais, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow \text{Arcsin}(\sin(x)) = x$.
- $\forall x \in [-1, 1], \sin(\text{Arcsin}(x)) = x$

45 Courbe de Arcsin :



46 Théorème :

- Arcsin est impaire, continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$,
- Arcsin est dérivable que sur $] -1, 1[$ et

$$\forall x \in] -1, 1[, \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Autrement dit, Arcsin est une primitive de $(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})$ sur $] -1, 1[$.

- Arcsin n'est pas dérivable en 1 ni en -1 et la courbe de Arcsin a deux tangentes verticales aux points d'abscisses 1 et en -1.

- Taux d'accroissements : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arcsin}(x)}{x} = 1$,
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{Arcsin}(x) - \frac{\pi}{2}}{x-1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\text{Arcsin}(x) + \frac{\pi}{2}}{x+1} = +\infty$.

47 Exercices :

- Calculer $\text{Arcsin}(\sin(\frac{23\pi}{5}))$, $\text{Arcsin}(\cos(\frac{117\pi}{7}))$.
- Tracer la courbe de $\text{Arcsin} \circ \sin$.

2. Arccosinus

Cosinus est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0, \pi]$. Donc $\cos$ induit une bijection $\cos|_{[0, \pi]}$ de $[0, \pi]$ sur $[-1; 1]$.

48 Def :

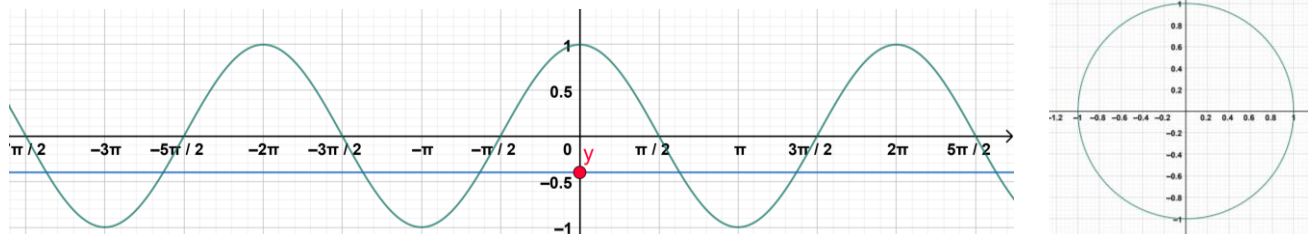
- Soit $\cos|_{[0, \pi]} : \begin{pmatrix} [0, \pi] \rightarrow [-1, 1] \\ x \mapsto \cos(x) \end{pmatrix}$. La fonction *Arccosinus* est la bijection réciproque de $\cos|_{[0, \pi]}$. La fonction *Arccos* est définie sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $[0, \pi]$ par l'équivalence : $\begin{cases} y = \cos(x) \\ x \in [0, \pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Arccos}(y) = x \\ y \in [-1, 1] \end{cases}$
- Soit $y \in [-1; 1]$. Le réel $\text{Arccos}(y)$ est donc l'unique réel de $[0, \pi]$ dont le cosinus vaut y .

49 Des valeurs particulières :

$t = \cos(y)$	0	1	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\text{Arccos}(t) = y$	$\frac{\pi}{2}$	0	π	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$

50 Equations : Les antécédents de y par $\cos$ sont donc tous les réels de la forme $\text{Arccos}(y) + 2k\pi$ ou $-\text{Arccos}(y) + 2k\pi$ tels que $k \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, $y = \cos(x) \Leftrightarrow x \equiv \text{Arccos}(y)[2\pi]$ ou $x \equiv -\text{Arccos}(y)[2\pi]$

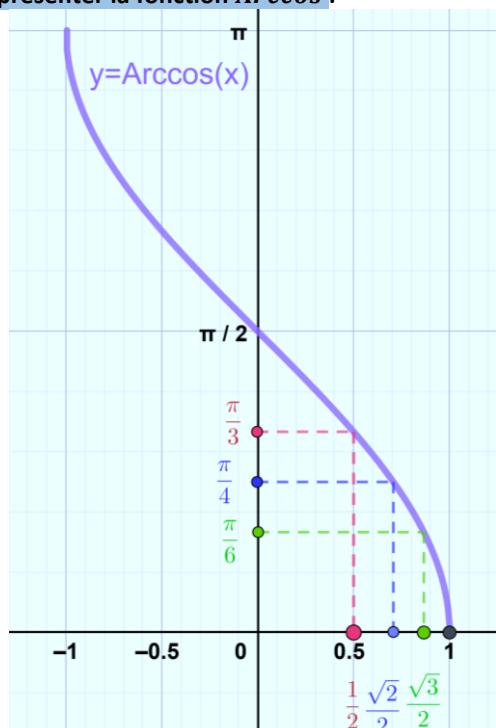
51 Illustration : Placer les antécédents de y par $\cos$ et les exprimer à l'aide de $\text{Arccos}(y)$. Faites une représentation analogue sur le cercle trigonométrique.



52 Propriétés :

- $\forall x \in [-1; 1], \text{Arccos}(-x) = \pi - \text{Arccos}(x)$ (la courbe de *Arccos* est symétrique par rapport au point $A(0, \frac{\pi}{2})$)
- $\forall x \in [-1; 1], \sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$
- $\forall x \in [-1; 1], \text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arccos}(\cos(x))$ existe. Mais $\text{Arccos}(\cos(x)) = x \Leftrightarrow x \in [0, \pi]$.
- $\forall x \in [-1; 1], \cos(\text{Arccos}(x)) = x$

53 Représenter la fonction *Arccos* :



54 Théorème

- Arccos* est continue et strictement décroissante sur $[-1, 1]$. *Arccos* est dérivable uniquement sur $] -1, 1[$ et

$$\forall x \in] -1, 1[, \text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



- Arccos* n'est pas dérivable en 1 ni en -1 et la courbe de *Arccos* a deux tangentes verticales aux points d'abscisses 1 et en -1.

$$\text{Ainsi, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arccos}(x) - \frac{\pi}{2}}{x} = -1, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{Arccos}(x)}{x-1} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\text{Arccos}(x) - \pi}{x+1} = -\infty.$$

55 NB : *Arcsin* et *Arccos* sont deux nouvelles fonctions qui ne sont pas dérivables sur tout leur domaine de définition.

56 Conséquence : Si u est dérivable sur I et $\forall x \in I, u(x) \in] -1, 1[$ alors *Arccos*(u) est dérivable sur I et $\forall x \in I, (\text{Arccos}(u))'(x) = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$.

57 Exercices :

- Calculer $\tan(\text{Arccos}(\frac{1}{3}))$ et $\text{Arccos}(\sin \frac{23\pi}{5})$
- Simplifier $\text{Arccos}(1 - 2x^2)$ en effectuant un bon changement de variable.

3. Arctangente

$\tan$ est continue et strict^t croissante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Donc, $\tan$ induit une bijection $\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$ de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

58 Définition : 1. Soit $\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} : \left(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} \right)$. La fonction *Arctangente* est la bijection réciproque de $\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$. La fonction *Arctan*

est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par l'équivalence : $\begin{cases} y = \tan(x) \\ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Arctan}(y) = x \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$.

2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Le réel $\text{Arctan}(y)$ est donc l'unique réel de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dont la tangente vaut y .

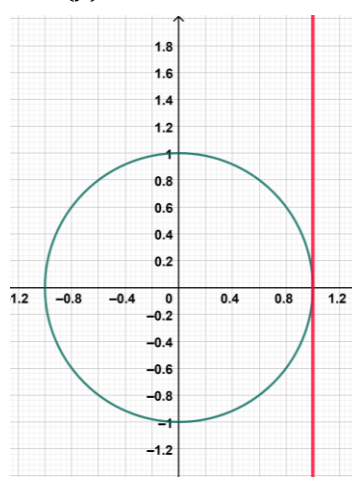
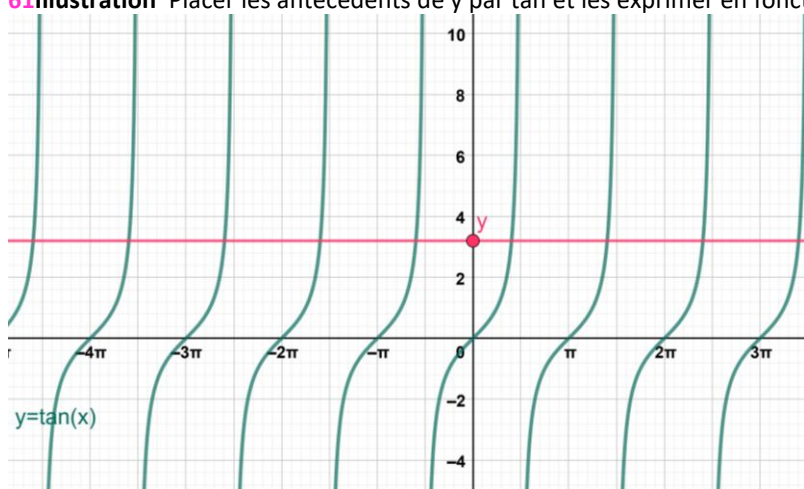
59 Valeurs particulières :

	$t = \tan(y)$	0	1	-1	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	
Arctan	$\text{Arctan}(t) = y$	0	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	tan

60 Equation : Les antécédents de y par $\tan$ sont tous les réels $\text{Arctan}(y) + k\pi$ tq $k \in \mathbb{Z}$.

Autrement dit, $y = \tan(x) \Leftrightarrow x \equiv \text{Arctan}(y) [\pi]$.

61 Illustration Placer les antécédents de y par $\tan$ et les exprimer en fonction de $\text{Arctan}(y)$.



62 Application : Soit α et β deux réels tels que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ et $\alpha \neq 0$. $\begin{cases} \cos(x) = \alpha \\ \sin(x) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv \text{Arctan}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) [2\pi] \text{ si } \alpha > 0 \\ x \equiv \pi + \text{Arctan}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) [2\pi] \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$

63 Propriétés

- $\forall x \in D_{\tan}, \text{Arctan}(\tan(x))$ existe mais $\text{Arctan}(\tan(x)) = x \Leftrightarrow x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\text{Arctan}(x)) = x, \cos(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\text{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
- $\forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \tan(\text{Arccos}(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ et $\forall x \in]-1, 1[, \tan(\text{Arcsin}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

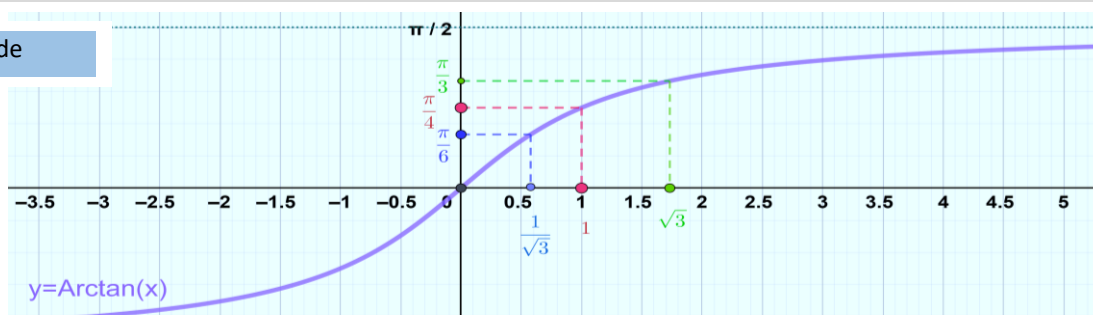
64 Théorème :

- Arctan est impaire, continue, strictement croissante, bornée sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}$.
- Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Donc, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan}(x)}{x} = 1$.
- Arctan est donc une primitive de $\left(x \mapsto \frac{1}{1+x^2}\right)$ sur $\mathbb{R}$.

65 Conséquence : Si u est dérivable sur I alors $\text{Arctan}(u)$ est dérivable sur I et $\forall x \in I, (\text{Arctan}(u))'(x) = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$.

66 Propriété : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

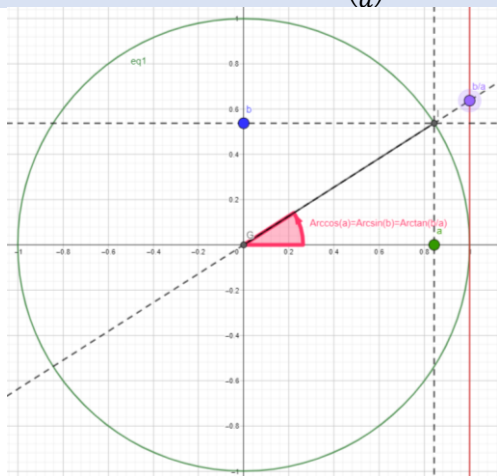
65 Courbe de



- Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a^2 + b^2 = 1$. Alors l'unique réel $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que :

$$\begin{cases} \cos(x) = a \\ \sin(x) = b \end{cases} \text{ vérifie :}$$

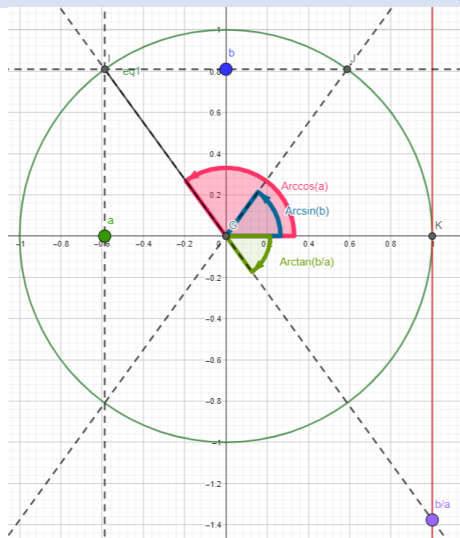
$$x = \text{Arccos}(a) = \text{Arcsin}(b) = \text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right).$$



- Soit a et b deux réels tels que: $a < 0$ et $b > 0$ et $a^2 + b^2 = 1$. Alors l'unique réel $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ tel que :

$$\begin{cases} \cos(x) = a \\ \sin(x) = b \end{cases} \text{ vérifie :}$$

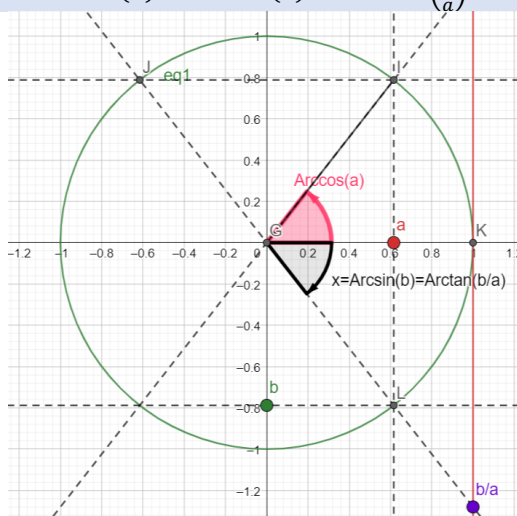
$$x = \text{Arccos}(a) = \pi - \text{Arcsin}(b) = \text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi.$$



- Soit a et b deux réels tels que: $a > 0$ et $b < 0$ et $a^2 + b^2 = 1$. Alors l'unique réel $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$ tel que :

$$\begin{cases} \cos(x) = a \\ \sin(x) = b \end{cases} \text{ vérifie :}$$

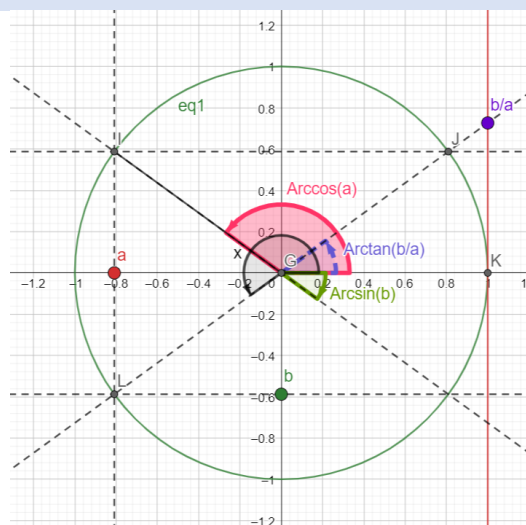
$$x = -\text{Arccos}(a) = \text{Arcsin}(b) = \text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right).$$



- Soit a et b deux réels tels que: $a < 0$ et $b < 0$ et $a^2 + b^2 = 1$. Alors l'unique réel $x \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[$ tel que :

$$\begin{cases} \cos(x) = a \\ \sin(x) = b \end{cases} \text{ vérifie :}$$

$$x = -\text{Arccos}(a) = -\pi - \text{Arcsin}(b) = \text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right) - \pi.$$



Equations-inéquations : Soit a et b deux réels.

- Si $(a, b) \in [-1; 1]^2$ alors, $[\text{Arcsin}(a) = \text{Arcsin}(b) \Leftrightarrow a = b]$ et $[\text{Arcsin}(a) < \text{Arcsin}(b) \Leftrightarrow a < b]$.
- Si $a \in [-1, 1]$ et $b \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ alors $[b = \text{Arcsin}(a) \Leftrightarrow a = \sin(b)]$.
- Si $a \in [-1, 1]$ et $b \in \mathbb{R}$ alors $[a = \sin(b) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / b = \text{Arcsin}(a) + 2k\pi \text{ ou } b = \pi - \text{Arcsin}(a) + 2k\pi]$.
- Si $(a, b) \in [-1; 1]^2$ alors $[\text{Arccos}(a) = \text{Arccos}(b) \Leftrightarrow a = b]$ et $[\text{Arccos}(a) < \text{Arccos}(b) \Leftrightarrow a > b]$.
- Si $b \in [0, \pi]$ et $a \in [-1; 1]$ alors $[b = \text{Arccos}(a) \Leftrightarrow a = \cos(b)]$.
- Si $b \in \mathbb{R}$ et $a \in [-1; 1]$ alors $[a = \cos(b) \Leftrightarrow b = \pm \text{Arccos}(a) + 2k\pi \text{ tq } k \in \mathbb{Z}]$.
- Si a et b réels alors, $[\text{Arctan}(a) = \text{Arctan}(b) \Leftrightarrow a = b]$ et $[\text{Arctan}(a) < \text{Arctan}(b) \Leftrightarrow a < b]$.
- Si $b \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, alors $[b = \text{Arctan}(a) \Leftrightarrow a = \tan(b)]$
- Si $b \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + p\pi / p \in \mathbb{Z}\}$, alors $[a = \tan(b) \Leftrightarrow b = \text{Arctan}(a) + k\pi \text{ tq } k \in \mathbb{Z}]$.

PLAN D'ETUDE DE FONCTIONS

- 1. Domaine de définition**
- 2. Parité-Périodicité-Symétrie de la courbe. Réduction du domaine d'étude.**
- 3. Continuité**
- 4. Dérivabilité. Calcul de la dérivée**
- 5. Variations**
- 6. Tangentes particulières**
- 7. Limites aux bords du domaine de définition**
- 8. Asymptotes**
- 9. Prolongement par continuité : étude de la dérivabilité au point de prolongement.**
- 10. Représentation**