Programme de colle 8

CHAPITRE 5 Rappels et compléments sur les fonctions.

I Généralités.

- Définitions d'une application, d'une fonction, de l'image d'un objet et d'un antécédent .
- Restriction d'une fonction
- Image directe ou réciproque d'une partie.
- Voisinage d'une point.

II Opérations

- Somme produit, quotient et combinaison linaire de fonctions .
- Composée d'applications : définition, associativité et non commutativité.
- Fonction identité : définition et élément neutre pour la composition.
- Fonctions définies par morceaux
- Fonctions de la forme $u(x)^{v(x)}$.

III Parité-Imparité

- Définition d'une fonction paire, d'une fonction impaire et d'une fonction périodique.
- Propriétés :
  - fonctions impaires : $f(0) = 0$ si $f(0)$ existe.
  - fonctions périodiques : une fonction T-périodique, où $T \in \mathbb{R}^{+*}$, est aussi kT −périodique pour tout $k \in \mathbb{N}$ (resp. $k \in \mathbb{Z}$ lorsque Df n'est ni minoré, ni majoré)
- Réduction du domaine d'étude des propriétés des fonctions paires , impaires ($f(0) = 0$ si $f(0)$ existe) ou périodiques.
- Opérations sur les fonctions paires, impaires ou périodiques ayant une période commune : combinaison linéaire , produit, quotient.

IV Monotonie-Extrema

- Définition d'une fonction (resp. strictement) dé-croissante
- Opération sur les fonctions monotones (multiplication par un réel positif, somme, composée)

V Caractére bornée- majorée, minorée

- Définition d'une fonction majorée, minorée, bornée.
- Caractérisation d'une fonction bornée par les valeurs absolues
- Produit et combinaison linéaire de fonctions bornées

VI Applications injectives, surjectives et bijectives

➢ **Injections**

- Trois définitions équivalentes d'une fonction injective
- Toute fonction strictement monotone sur D est injective sur D.
- La composée de deux injection est une injection.

➢ **Surjections**

- Deux définitions équivalentes d'une surjection
- La composée d'une surjection de E sur F par une surjection de F sur G est une surjection de E sur G.

➢ **Bijections**

- Définition équivalente d'une bijection de I sur J , de la bijection réciproque.
- Equivalence: $\begin{cases} y = f(x) \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in J \end{cases}$.
- Propriétés de la bijection réciproque:
  - $f^{-1}\ bijective\ de\ J\ sur\ I\ et\ (f^{-1})^{-1} = f$
  - $f \circ f^{-1} = id_J\ et\ f^{-1} \circ f = id_I$.
  - La courbe de Cf^{-1} est symétrique de Cf par rapport à al première bissectrice.
  - Si f est strictement monotone sur I alors f^{-1} est de même stricte monotonie que f sur J
  - Si f est impaire sur I alors f^{-1} est impaire sur J.
- Caractérisation : $\begin{cases} g : J \to I\ et \\ f \circ g = id_J\ et\ g \circ f = id_I \end{cases} \Longrightarrow f\ bijective\ de\ I\ sur\ J\ et\ f^{-1} = g$.
- La composée d'une bijection f de E sur F par une bijection g de F sur G est une bijection $g \circ f$ de E sur G et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

« QUASI-TOUS » LES RESULTATS CI-DESSOUS SONT ADMIS

VII Calculs de limites

- Unicité de la limite et valeur de la limite en a lorsque $f(a)$ $existe$.
- Opérations sur les fonctions admettant une limite en a : multiplication par un réel, somme , produit, quotient, valeur absolue.
- Limite en a d'une fonction produit d'une fonction bornée au voisinage de a par une fonction de limite nulle en a.
- Limite d'une fonction composée. Limite d'une suite de la forme $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.
- Limite par encadrement (théorème des gendarmes pour les fonctions)
- Limite à gauche, limite à droite
- Changement de variable pour se ramener en 0 lorsque que la limite étudiée est en un réel non nul ou en l'infini.

Quelques méthodes supplémentaires :

- Faire apparaitre les limites usuelles
- Se placer au voisinage du point où l'on étudie la limite pour simplifier l'expression de notre fonction.
- Mettre les termes dominants en facteurs au voisinage du point où l'on étudie la limite
- Utiliser la quantité conjuguée
- Utiliser les symétries des courbes

Les limites usuelles :

- Limites par continuité et limites aux bords des domaines de définition des fonctions usuelles (fonctions puissances entières, racines $n^{\text{ièmes}}$ réelles, exp, ln, sin, cos, tan).
- Limites par taux d'accroissements des fonctions usuelles :
$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t}=1\,,\lim_{t\to 0}\frac{\tan(t)}{t}=1,\lim_{t\to 0}\frac{ln(1+t)}{t}=1\ et\ \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$$
- Croissances comparées : pour tous α,β,γ des rationnels strictement positifs,
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)^\beta}{x^\alpha}=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\gamma x}}=0\,,\qquad \lim_{x\to 0}x^\alpha|\ln(x)|^\beta=0,\qquad \lim_{x\to-\infty}|x|^\alpha e^{\beta x}=0.$$

VII Asymptotes

- Définition d'une asymptote horizontale, verticale et oblique. Définition de deux courbes de fonctions asymptotes.
- Méthodes pour trouver l'asymptote oblique :
    - Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x)=ax+b+\varepsilon(x)\ avec\ \lim_{x\to\pm\infty}\varepsilon(x)=0.$
    - Calculer successivement $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)$, puis $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\overset{def}{=}a$ puis $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)-ax\overset{def}{=}b.$

VIII Continuité

- Définition d'une fonction continue en un point, sur un intervalle.
- Définition d'une fonction prolongeable par continuité et de son prolongement.
- Opérations sur les fonctions continues : multiplication par un réel, somme, produit, inverse, quotient, composée
- Toute fonction non définie par morceaux et non définie par une intégrale et dont l'expression n'est constituée que de fonctions continues sur leur propre domaine de définition est continue sur son domaine de définition.
- Continuité des fonctions usuelles : la seule fonction usuelle qui n'est pas continue sur tout son domaine de définition est la fonction partie entière.
- **Théorème des valeurs intermédiaires . Deux versions et deux corollaires :**
    - Si f est continue sur $[a,b]$ alors tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet un antécédent par f dans $[a,b]$.
    - Si f est continue sur l'intervalle I alors $f(I)$ est un intervalle
    - Si f est continue sur l'intervalle I et prend une valeur positive et une valeur négative sur I alors f s'annule au moins une fois sur I.
    - Si f est continue sur l'intervalle I et ne s'annule pas sur I alors f garde un signe strict sur I.
- **Théorème des bijections continues et strictement monotones :**
  Si f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I alors
    - $f(I)$ est un intervalle de même nature que I et ses extrémités sont les limites de f aux extrémités de I
    - f est bijective de I sur $f(I)$
    - f^{-1} est continue sur $f(I)$ et de même stricte monotonie que f .

IX Dérivabilité

- Définition d'une fonction dérivable en un point, du nombre dérivé en un point . Définition d'une fonction dérivable sur un intervalle et de la fonction dérivée.
- Définition d'un tangente verticale.
- Relation : $dérivable \Longrightarrow continue$; réciproque fausse. Conséquence : domaine de dérivabilité $\subset$ domaine de continuité $\subset$ domaine de définition.

- Opérations sur les fonctions dérivables : multiplication par un réel, somme, produit, inverse, quotient
- Composée des fonctions dérivables : si f est dérivable sur D et g est dérivable sur E et $\forall x \in D, f(x) \in E$ alors $g \circ f$ est dérivable sur D et $\forall x \in D, (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$.
- Toute fonction non définie par morceaux et non définie par une intégrale et dont l'expression n'est constituée que de fonctions dérivables sur leur propre domaine de définition est dérivable sur son domaine de définition.
- Critère de limite du taux d'accroissement : si f est continue sur l'intervalle I, dérivable au moins sur $I\backslash\{a\}$ et $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = L$ alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L$.
- Critère de monotonie :
  Si f est dérivable au moins sur l'intervalle I et f' est positive sur I alors f est croissante sur I .
  Si f est dérivable au moins sur l'intervalle I et f' est positive sur I et f'ne s'annule qu'en des points isolés alors f est strictement croissante sur I (idem avec f' négative et f décroissante).
- Dérivabilité et fonctions dérivées des fonctions usuelles ; parmi nos fonctions usuelles, seules les fonctions partie entière, valeur absolue, les racines $n^{ièmes}$réelles, $Arccos$, $Arcsin$ ne sont pas dérivables sur tout leur domaine de définition.

Chap 6 Dernières fonctions usuelles

Logarithme népérien :

- Définition comme l'unique primitive de $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ s'annulant en 1.
- Dérivabilité et dérivée, monotonie, limite par taux d'accroissement : $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t}$ et $\lim\limits_{u\to 1} \frac{\ln(u)}{u-1}$.
- Propriétés algébriques : $\ln(xy)$, $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right)$, $\ln(x^r)$ $où$ $r \in \mathbb{Q}$.
- Inégalités usuelles $\forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ et interprétation géométrique.
- Limites usuelles et première croissance comparée : $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$.
- Représentation : courbe de ln.

Exponentielle :

- Définition comme la bijection réciproque de ln. Autre notation : $e^x = \exp(x)$.
- Continuité, monotonie , $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x$, $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x$, dérivabilité et dérivée, limite par taux d'accroissement : $\lim\limits_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t}$.
- Propriétés algébriques : $\exp(x+y)$, $\exp(-x)$, $\exp(x-y)$, $\exp(rx)$ $où$ $r \in \mathbb{Q}$, $\ln(e^x)$, $e^{\ln(x)}$.
- Inégalités usuelles $\forall x, \exp(x) \geq 1 + x$ et interprétation géométrique.
- Représentation : courbe de exp.

Exponentielles et logarithme de base a :

- Définition, notation $exp_a(x) = a^x$.
- Relation entre exp_a et log_a.
- Allure des courbes

Puissances réelles :

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Définition de x^α.
- Propriétés algébriques : $x^{\alpha+\beta}, x^{-\alpha}, x^{\alpha-\beta}, x^{\alpha\beta}, x^\alpha y^\alpha$, $\frac{x^\alpha}{y^\alpha}$, $\ln(x^\alpha)$, $(e^x)^\alpha$
- Fonctions f_α: $(x \mapsto x^\alpha)$. Continuité, monotonie, dérivabilité et dérivée, limite par taux d'accroissement : $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^\alpha-1}{x-1}$ ou $\lim\limits_{t\to 0} \frac{(1+t)^\alpha-1}{t}$, prolongement par continuité éventuel en 0, dérivabilité en 0 du prolongement.
- Représentation : courbe de f_α.
- Croissances comparées : $\lim\limits_{x\to -\infty} |x|^\alpha e^{\gamma x}$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^{\gamma x}}{x^\alpha}$, $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha |\ln(x)|^\beta$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln^\beta(x)}{x^\alpha}$.

Cosinus et sinus hyperboliques.

- Définition
- Propriétés algébriques : $ch^2 - sh^2, ch(a+b), sh(a+b), ch(2a), sh(2a)$.
- Propriétés des fonctions : parité, continuité, dérivabilité et fonction dérivée et tracé de la courbe fonctions
- Bijection (induite) et le cas échéant, bijection réciproque.

TOUS LES ENONCES DES DEFINITIONS, PROPRIETES ET THEOREMES DOIVENT ETRE CONNUS.

La question de cours demandée peut être :

A. Enoncer une définition et /ou une propriété de cours .

ET /OU

B. Enoncer et démontrer les résultats suivants:.

1) Toute combinaison linéaire et tout produit de fonctions bornées sont bornés.
2) La composée de deux applications injectives est injective. La composée de deux applications surjectives est surjective.
3) Si f est bijective de E sur F et g est bijective de F sur G alors $g \circ f$ est bijective de E sur G et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
4) Soit f une bijection de I sur J. Si f est strictement monotone sur I alors f^{-1} est de même stricte monotonie que f sur J . Si f est impaire sur I alors f^{-1} est impaire sur J.
5) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. En déduire que pour tous réels strictement positifs α, β, γ,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)^\beta}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\gamma x}} = 0, \quad \lim_{x\to 0} x^\alpha |\ln(x)|^\beta = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^{\beta x} = 0$$

6)Montrer que pour tous réels strictement positifs a et b et tout entier naturel n, $\begin{cases} ln(ab) = ln(a) + ln(b) \\ \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \\ \ln(a^n) = nln(a) \\ \ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} ln(a) \end{cases}$.

Rappeler soigneusement le résultat avant de le démontrer.