

**Ex 0 Des calculs de base pour apprendre et penser à simplifier au maximum des expressions exponentielles ou logarithmiques**

Simplifier :

$$a = e^{-3 \ln(x)}$$

$$b = \frac{\ln(x^2)}{\ln(x^4)}$$

$$c = e^{\ln(x^2+1)-3 \ln(x)}$$

$$d = \ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$$

$$h = \ln(\sqrt{\exp(x)})$$

$$m = \operatorname{ch}\left(-\frac{1}{3} \ln(e^{-3})\right)$$

$$p = \operatorname{sh}\left(-\frac{3}{2} \ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3x^2+1}}\right)\right)$$

$$q = \operatorname{sh}^{-1}(2) - \operatorname{ch}_1^{-1}(2)$$

$$r = \log_4(4^{\sqrt{2}})$$

$$a = e^{\ln(x^{-3})} = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

$$b = \frac{\ln(x^2)}{\ln(x^4)} = \frac{2 \ln(x)}{4 \ln(x)} = \frac{1}{2}$$

$$c = e^{\ln(x^2+1)-3 \ln(x)} = e^{\ln(x^2+1)+\ln(x^{-3})} = e^{\ln((x^2+1)x^{-3})}$$

$$c = (x^2+1)x^{-3} = \frac{(x^2+1)}{x^3}$$

$$d = \ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2}) = \ln(e^2) - \ln(e) = \ln\left(\frac{e^2}{e}\right) = \ln(e)$$

$$h = \ln(\sqrt{\exp(x)}) = \frac{1}{2} \ln(e^x) = \frac{x}{2}$$

$$m = \operatorname{ch}\left(-\frac{1}{3} \ln(e^{-3})\right) = \operatorname{ch}\left(\ln\left((e^{-3})^{-\frac{1}{3}}\right)\right) = \operatorname{ch}(\ln(e))$$

$$m = \operatorname{ch}(1) = \frac{e}{2} + \frac{1}{2e}$$

$$p = \operatorname{sh}\left(-\frac{3}{2} \ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3x^2+1}}\right)\right) = \operatorname{sh}\left(-\frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times \ln(3x^2+1)\right)$$

$$p = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2} \times \ln(3x^2+1)\right) = \frac{1}{2} \left[ e^{\frac{1}{2} \ln(3x^2+1)} - e^{-\frac{1}{2} \ln(3x^2+1)} \right]$$

$$p = \frac{1}{2} \left[ e^{\ln \sqrt{3x^2+1}} - e^{\ln \left(\frac{1}{\sqrt{3x^2+1}}\right)} \right] = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{3x^2+1} - \frac{1}{\sqrt{3x^2+1}} \right]$$

$$p = \frac{1}{2} \left[ \frac{3x^2+1-1}{\sqrt{3x^2+1}} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{3x^2}{\sqrt{3x^2+1}} \right]$$

$$q = \operatorname{sh}^{-1}(2) - \operatorname{ch}_1^{-1}(2) = \ln(2+\sqrt{5}) - \ln(2+\sqrt{3})$$

$$q = \ln \left[ \frac{(2+\sqrt{5})}{(2+\sqrt{3})} \right] = \ln \left[ \frac{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{3})}{1} \right]$$

$$q = \ln[4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} - \sqrt{15}]$$

$$r = \log_4(4^{\sqrt{2}}) = \log_4(\exp_4(\sqrt{2})) = \sqrt{2}$$

**Ex 1 Equations et inéquations**

**A.** Soit  $y$  un paramètre réel. Résoudre les (in-)équations suivantes d'inconnue  $x$  réelle (on réfléchira préalablement si l'équation peut se résoudre algébriquement ou non)

1.  $e^{-6x^2+1} - \sqrt{e} > 0$

2.  $\ln(x) + \ln(3x^2-4) > \ln(x^2-2)$

3.  $\log_2(x) + \log_x(2) = \frac{5}{2}$

4.  $3x \log_{10}(x) + 2(x-1) = 0$

5.  $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

6.  $\frac{e^{3x-2}e^{2x}-e^{x+4}+2e^4}{\ln^{2x-1}} > 0$

7.  $\operatorname{sh}(x) = x^2$

8.  $e^{-2x} + e^x \leq 2$

9.  $x + e^x > 2$

10.  $e^{-x} + e^x = y$

11.  $x^2 < \ln(x) + 1$

12.  $\frac{\ln(x+1)}{\ln(x-2)} \leq 2$

13.  $2\operatorname{ch}(x) - x^2 \leq 0$

14.  $x \ln(2-x) = 1$

15.  $\operatorname{sh}^3(x) - 14\operatorname{sh}(x) + 5 < 5\operatorname{ch}^2(x)$

16.  $3\operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x) = 1$

17.  $x^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

18.  $\operatorname{ch}^5 x - \operatorname{sh}^5 x = 1$

**B.** Résoudre:  $(S): \begin{cases} \log_y(x) + \log_x(y) = \frac{50}{7} \\ xy = 256 \end{cases}$  d'inconnue  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

1.  $e^{-6x^2+1} - \sqrt{e} > 0$

2.  $\ln(x) + \ln(3x^2-4) > \ln(x^2-2)$

3. Soit  $(e) : \log_2(x) + \log_x(2) = \frac{5}{2}$ .

Par définition,  $\log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$  et  $\log_x(2) = \frac{\ln(2)}{\ln(x)}$ .

Soit  $x \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .

$x$  solution de  $(e)$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{\ln(2)} + \frac{\ln(2)}{\ln(x)} = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\ln(x))^2 + (\ln(2))^2}{\ln(2)\ln(x)} = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(\ln(x))^2 + 2(\ln(2))^2 = 5\ln(2)\ln(x)$$

$$\Leftrightarrow 2X^2 - 5\ln(2)X + 2(\ln(2))^2 = 0$$

$$\text{Posons } \Delta = 25\ln(2)^2 - 16\ln(2)^2 = 9\ln(2)^2 = (3\ln(2))^2.$$

$$X_1 = \frac{5\ln(2) - 3\ln(2)}{4} = \frac{\ln(2)}{2} \text{ et } X_2 = \frac{5\ln(2) + 3\ln(2)}{4} = 2\ln(2).$$

Donc,

$x$  solution de  $(e)$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{\ln(2)}{2} \text{ ou } \ln(x) = 2\ln(2).$$

$$\Leftrightarrow x = e^{\frac{\ln(2)}{2}} = e^{\ln(\sqrt{2})} \text{ ou } x = e^{2\ln(2)} = e^{\ln(2^2)}.$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ ou } x = 4.$$

Ainsi,  $Sol = \{\sqrt{2}, 4\}$ .

4. Soit  $(e) : 3x \log_{10}(x) + 2(x-1) = 0$

$$\text{Posons } f(x) = \frac{3}{\ln(10)} x \ln(x) + 2x - 2.$$

$f$  est définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R}^{++}$  et  $\forall x > 0, f'(x) = \frac{3}{\ln(10)} [\ln(x) + 1] + 2$ .

$$\text{Donc, } f'(x) > 0 \Leftrightarrow [\ln(x) + 1] > -\frac{2\ln(10)}{3} \Leftrightarrow \ln(x) > -\frac{2\ln(10)}{3} - 1 \Leftrightarrow x > e^{-\frac{2\ln(10)}{3}-1} \Leftrightarrow x > e^{\ln(10^{-\frac{2}{3}})} \times e^{-1} \Leftrightarrow x > \frac{1}{e^{\frac{2}{3}\sqrt[3]{100}}}$$

Donc,  $f$  est strictement croissante sur  $[\frac{1}{e^{\sqrt[3]{100}}}, +\infty[$  et strictement décroissante sur  $]0, \frac{1}{e^{\sqrt[3]{100}}}]$ . Donc  $f$  atteint son minimum en  $\frac{1}{e^{\sqrt[3]{100}}}$  et ce minimum vaut  $f(\frac{1}{e^{\sqrt[3]{100}}})$ . Comme  $f$  est strictement décroissante sur  $]0, \frac{1}{e^{\sqrt[3]{100}}}]$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2 < 0$ ,  $f(\frac{1}{e^{\sqrt[3]{100}}}) < 0$  et  $f$  ne s'annule pas que  $]0, \frac{1}{e^{\sqrt[3]{100}}}]$ . Comme  $f$  est continue et strictement croissante sur  $[\frac{1}{e^{\sqrt[3]{100}}}, +\infty[$  et  $f(\frac{1}{e^{\sqrt[3]{100}}}) < 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty > 0$ ,  $f$  s'annule une et une seule fois que  $[\frac{1}{e^{\sqrt[3]{100}}}, +\infty[$ . Ainsi (e) a une unique solution. Or je remarque que  $f(1) = 0$ . Donc 1 est l'unique solution de (e).

5.  $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

6.  $\frac{e^{3x-2}e^{2x}-e^{x+4}+2e^4}{\ln^2 x - 1} > 0$

7. Soit (e):  $sh(x) = x^2$ .

$\forall x < 0, sh(x) < 0 < x^2$ . Donc (e) n'a pas de solution strictement négative.

De plus,  $sh(0) = 0 = 0^2$ . Donc 0 est solution évidente.

Posons  $f(x) = sh(x) - x^2$ . Etudions  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

$f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = ch(x) - 2x$ .  $f'$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f''(x) = sh(x) - 2$ . Alors,

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow sh(x) > 2 \Leftrightarrow x > \ln(2 + \sqrt{5})$ .

$f'(\ln(2 + \sqrt{5})) = \frac{1}{2} [exp(\ln(2 + \sqrt{5})) + exp(-\ln(2 + \sqrt{5}))] - 2 \ln(2 + \sqrt{5}) = \frac{1}{2} \left[ 2 + \sqrt{5} + \frac{1}{2 + \sqrt{5}} \right] - 2 \ln(2 + \sqrt{5})$

$= \frac{1}{2} \left[ \frac{10+4\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} \right] - 2 \ln(2 + \sqrt{5}) = \left[ \frac{(5+2\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}{1} \right] - 2 \ln(2 + \sqrt{5}) = \sqrt{5} - 2 \ln(2 + \sqrt{5}) < 0$ .

$f'(2) = \frac{1}{2} \left[ e^2 + \frac{1}{e^2} \right] - 2 > 0$ . Donc  $b < 2$ .

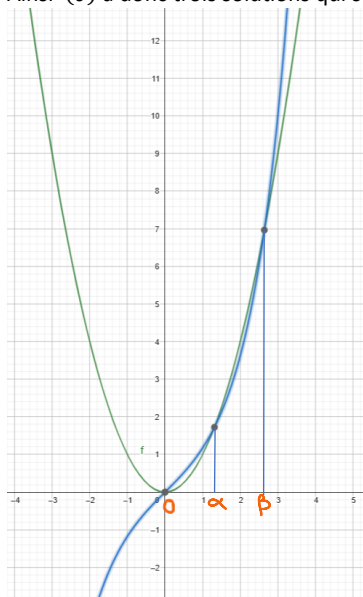
| $x$      | 0 | $a$ | $\ln(2 + \sqrt{5})$ | $b$ | 2 | $+\infty$ |
|----------|---|-----|---------------------|-----|---|-----------|
| $f''(x)$ |   | -   | 0                   | +   |   |           |
| $f'(x)$  | 1 |     |                     |     |   | $+\infty$ |
| $f(x)$   | 0 |     |                     |     |   | $+\infty$ |

Les variations, la continuité et les valeurs de  $f'$  permettent d'affirmer que  $f'$  s'annule exactement deux fois en  $a$  et  $b$  tels que :  $a < \ln(2 + \sqrt{5}) < b < 2$ . On en déduit aussi le signe de  $f'$ .

D'une part,  $f(\ln(2 + \sqrt{5})) = sh(\ln(2 + \sqrt{5})) - (\ln(2 + \sqrt{5}))^2 = 2 - (\ln(2 + \sqrt{5}))^2 < 0$ . Donc  $f(b) < f(\ln(2 + \sqrt{5})) < 0$ .

D'autre part,  $f(a) > f(0) \geq 0$ . Alors  $f$  ne s'annule pas sur  $]0, a[$  ni sur  $] \ln(2 + \sqrt{5}), b[$  et la continuité (TVI) et la stricte monotonie de  $f$  sur  $]a, b[$  puis  $]b, +\infty[$  assurent que  $f$  s'annule exactement une fois sur  $]a, \ln(2 + \sqrt{5})[$  en  $\alpha$  et une autre unique fois sur  $]b, +\infty[$  en  $\beta$ .

Ainsi (e) a donc trois solutions qui sont 0,  $\alpha$  et  $\beta$ . Ces trois solutions vérifient  $0 < \alpha < \ln(2 + \sqrt{5}) < b < \beta < 2$ .



La méthode de dichotomie permet de trouver des valeurs approchées de  $\alpha$  et de  $\beta$ . Il FAUT sortir la calculatrice !  
Plaçons-nous sur  $[0, \ln(2 + \sqrt{5})]$ :

8.  $e^{-2x} + e^x \leq 2$

9.  $x + e^x > 2$

10.  $e^{-x} + e^x = y \Leftrightarrow 2ch(x) = y \Leftrightarrow ch(x) = \frac{y}{2}$

$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y}{2} + \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 - 1}\right) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 4}) - \ln(2)$  ou  $x = -\ln\left(\frac{y}{2} + \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 - 1}\right) = \ln(2) - \ln(y + \sqrt{y^2 - 4})$ .

Ainsi,  $Sol = \{\ln(y + \sqrt{y^2 - 4}) - \ln(2), \ln(2) - \ln(y + \sqrt{y^2 - 4})\}$ .

11.  $x^2 < \ln(x) + 1$

12.  $\frac{\ln(x+1)}{\ln(x-2)} \leq 2$

13.

## Ex 2 Autour du calcul de limite

### I En se plaçant au voisinage du point où l'on étudie la limite

A. 1. Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, [-x] = \begin{cases} -[x] - 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \\ -x & \text{si } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$

2. Soit  $h: (x \mapsto x - |x|)$  et  $g: (x \mapsto |2x - 1|)$ . Montrer que  $f = g \circ h$  est paire, périodique.  
 3. Soit  $k \in \mathbb{Z}$ . Montrer que  $f$  est continue en  $k$ .  $f$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}$  ?  
 4. Tracer  $Cf$ .

B. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$

**II Par encadrement** Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{\sqrt{x-3}\sqrt[3]{x}}$ .

### III En faisant apparaître le produit d'une fonction de limite nulle et d'une fonction bornée

Soit  $a$  un réel. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} x^a \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  quand cette limite existe (on justifiera qu'elle n'existe pas le cas échéant).

### IV Faire apparaître les limites usuelles. Soit $a$ et $b$ des réels.

| $FI \ " \frac{0}{0} \ "$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | $FI \ " \infty - \infty \ "$                                                                                                                                                                                                  | $FI \ " 0 \times \infty \ "$                                                                                                                                                    | $FI \ " \frac{\infty}{\infty} \ "$                                                                                                                                                                                                                                                                                        | $FI \ " 1^\infty, " 0^0 \ " \text{ ou } "(+\infty)^0 \ "$                                                                                                                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x^2-5x+6}$<br>2. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^3-64) \cos(\pi x)}{\sqrt{x}-2}$<br>3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-64}{\sqrt{x}-2}$<br>4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(a-1)x+x^2-a}{x^3+a^3}$<br>5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3-1) \ln(x)}{\ln(1+3x^2+\cos(x^2))-\ln(x)}$<br>6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x^2+\cos(x^2))-\ln(x)}{x^2}$<br>7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)}-\text{ch}(x)}{\sin(x)}$<br>8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x \ln(x^2)-3x^2}$<br>9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$ en utilisant $\frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \right)^2$<br>10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\tan(bx)}$ ( $b \neq 0$ )<br>11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^a-a^a}{x^b-a^b}$ ( $a, b > 0$ )<br>12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{\text{sh}(x)(5+\text{ch}^2(x))}$ | 13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+y)^a - x^a - y^a$ où $y \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé.<br>14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2-1} - (ax+b)$<br>15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - \ln(\ln(x)) - \sqrt[3]{x}$ | 16. $\lim_{x \rightarrow 0^-} (2\sqrt[3]{x} - 3x^2) \ln^2(x^4-3x)$<br>17. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-\sqrt{\ln(x^2)}}$<br>18. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) \ln(1+x)$ | 19. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}-2x^\pi-\ln^2(x)}{1-3\text{sh}(x)}$<br>20. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\ln(x)-3x^2+\sin(x)}$<br>21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\ln(x)}$<br>22. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}-1}{\text{sh}(x)(5+\text{ch}^2(x))}$ | 23. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$<br>24. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \text{sh}(x))^{\ln(x)}$<br>25. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{\ln(x)}$<br>26. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + 3\text{ch}(x))e^x$ |

**APPLICATIONS :** 1) Soit  $m$  un entier naturel et  $a$  un réel. Justifier que la fonction  $f: (x \mapsto x^m)$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) = ma^{m-1}$ .

2) Pour quelles valeurs du réel  $\alpha$ , la fonction  $f: (x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{x^\alpha})$  est-elle prolongeable par continuité en 0 ? R

On suppose ici que  $\alpha < 1$ . Le prolongement par continuité de  $f$  est-il dérivable en 0 ?

3) Soit  $f(x) = x \exp\left(\frac{x}{x^2-1}\right) = x e^{\frac{x}{x^2-1}}$  et  $\varphi(t) = \frac{e^{1-t^2}-1}{t}$ . Calculer la limite de  $\varphi$  en 0. En déduire que  $Cf$  admet une même asymptote en  $+\infty$  et en  $-\infty$  dont on donnera une équation.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x)^{\frac{1}{x\sqrt{2}}}$  ?  $FI \ " 1^\infty \ "$

$\text{sh}(x)^{\frac{1}{x\sqrt{2}}} = e^{\frac{1}{x\sqrt{2}} \ln(\text{sh}(x))}$ . Posons  $h(x) = \frac{1}{x\sqrt{2}} \ln(\text{sh}(x))$ .

Alors,  $h(x) = \frac{1}{x\sqrt{2}} \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{x\sqrt{2}} [\ln(e^x - e^{-x}) - \ln(2)] = \frac{1}{x\sqrt{2}} [\ln(e^x(1 - e^{-2x})) - \ln(2)] = \frac{1}{x\sqrt{2}} [x + \ln(1 - e^{-2x}) - \ln(2)]$ .

Donc  $h(x) = x^{1-\sqrt{2}} + \frac{\ln(1-e^{-2x})}{x\sqrt{2}} - \frac{\ln(2)}{x\sqrt{2}}$ . Donc,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ . Et par conséquent,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x)^{\frac{1}{x\sqrt{2}}} = 1$ .

$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{\ln(x)}$  ?  $FI \ " 1^\infty \ "$  »

$(\cos(x))^{\ln(x)} = e^{\ln(x) \ln(\cos(x))}$ . Posons  $h(x) = \ln(x) \ln(\cos(x))$

$h(x) = \ln(x) \ln(\cos(x)) = \ln(x) \times (\cos(x) - 1) \times \frac{\ln(\cos(x))}{\cos(x)-1} = x^2 \times \ln(x) \times \frac{\cos(x)-1}{x^2} \times \frac{\ln(\cos(x))}{\cos(x)-1}$ . Or,  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1 \\ \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln(t)}{t-1} = 1 \end{cases}$ . Donc,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{\cos(x)-1} =$

1. De plus,  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \times \ln(x) \stackrel{cc}{=} 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$ . Donc,  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$  puis  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{\ln(x)} = 1$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2+x-1} - (ax+b)$  où  $a$  et  $b$  réels ?

Posons  $f(x) = \sqrt{4x^2+x-1} - (ax+b)$ . On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2+x-1} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax+b) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ b & \text{si } a = 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$

Si  $a \leq 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2+x-1} - (ax+b) = +\infty$  (pas de  $FI$ ).

Si  $a > 0$  alors  $FI \rightarrow -\infty$  et

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + x - 1} - (ax + b) = \sqrt{4x^2 \left(1 + \frac{1}{4x} - \frac{1}{4x^2}\right)} - (ax + b) = 2x\sqrt{1 + \frac{1}{4x} - \frac{1}{4x^2}} - (ax + b) = x \left[ 2\sqrt{1 + \frac{1}{4x} - \frac{1}{4x^2}} - a - \frac{b}{x} \right].$$

Si  $a \neq 2$  et  $a \neq 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{1 + \frac{1}{4x} - \frac{1}{4x^2}} - a - \frac{b}{x} = 2 - a \neq 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + x - 1} - (ax + b) = \text{sgn}(a - 2)\infty$ .

Si  $a = 2$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{1 + \frac{1}{4x} - \frac{1}{4x^2}} - a - \frac{b}{x} = 2 - a = 0$  donc on a encore une  $FI \ll \infty \times 0 \gg$ .

$$\text{Alors, } f(x) = x \left[ 2\sqrt{1 + \frac{1}{4x} - \frac{1}{4x^2}} - \left(2 + \frac{b}{x}\right) \right] \cong x \left[ \frac{4\left(1 + \frac{1}{4x} - \frac{1}{4x^2}\right) - \left(2 + \frac{b}{x}\right)^2}{2\sqrt{1 - \frac{1}{4x^2} + 2 + \frac{b}{x}}} \right] = x \left[ \frac{\frac{1-4b - \frac{(b^2+1)}{x^2}}{x}}{2\sqrt{1 - \frac{1}{4x^2} + 2 + \frac{b}{x}}} \right] = \left[ \frac{1-4b - \frac{(b^2+1)}{x}}{2\sqrt{1 - \frac{1}{4x^2} + 2 + \frac{b}{x}}} \right].$$

$$\text{Donc, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + x - 1} - (2x + b) = \frac{1}{4} - b.$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^3 - 64)}{(\sqrt{x} - 2)\cos(\pi x)} ? FI \frac{0}{0}.$$

$$f(x) = \frac{x^3 - 64}{(\sqrt{x} - 2)\cos(\pi x)} = \frac{(x-4)(x^2 + 4x + 16)}{(\sqrt{x} - 2)\cos(\pi x)} = \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)(x^2 + 4x + 16)}{(\sqrt{x} - 2)\cos(\pi x)} = \frac{(\sqrt{x} + 2)(x^2 + 4x + 16)}{\cos(\pi x)}. \text{ Donc, } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^3 - 64)}{(\sqrt{x} - 2)\cos(\pi x)} = \frac{4 \times 36}{1} = 134.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-\sqrt{\ln(x^2 + x)}} ? FI \infty \times 0.$$

$$x e^{-\sqrt{\ln(x^2 + x)}} = -e^{\ln(|x|)} e^{-\sqrt{\ln\left(x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)}} = -e^{\ln(|x|) - \sqrt{2\ln(|x|) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}} = -e^{\ln(|x|) - \sqrt{2\ln(|x|)}} \sqrt{1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{2\ln(|x|)}} = -e^{\ln(|x|) \left[1 - \sqrt{\frac{2}{\ln(|x|)}}\right]} \sqrt{1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{2\ln(|x|)}}. \text{ Donc, } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-\sqrt{\ln(x^2 + x)}} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) \ln(1 + x)$$

$$f(x) = \ln(x) \ln(1 + x) = x \ln(x) \frac{\ln(1+x)}{x}. \text{ Or, } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) \stackrel{CC}{=} 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \stackrel{TA}{=} 1. \text{ J'en conclus que } \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) \ln(1 + x) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\text{sh}(x)} - \text{ch}(x)}{\sin(x)} ?$$

$$\frac{e^{\text{sh}(x)} - \text{ch}(x)}{\sin(x)} = \frac{e^{\text{sh}(x)} - \text{ch}(x)}{x} \times \frac{x}{\sin(x)}. \text{ Posons } g(x) = e^{\text{sh}(x)} - \text{ch}(x). \text{ Alors } g \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } g'(0) = \text{ch}(0)e^{\text{sh}(0)} - \text{sh}(0) = 1. \text{ Donc, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 1 \text{ i.e.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\text{sh}(x)} - \text{ch}(x)}{x} \stackrel{TA}{=} 1. \text{ Comme, de plus, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \stackrel{TA}{=} 1, \text{ je peux conclure que } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\text{sh}(x)} - \text{ch}(x)}{\sin(x)} = 1.$$

### Ex 3 Asymptotes simples

A. Soit  $f: (x \mapsto \ln(2e^x - x - 1))$ . On munit le plan d'un repère orthonormé. On donne  $\ln(2) \approx 0,7$  et  $\ln(\ln(2)) \approx -0,4$ .

1. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$ . En déduire  $Df$ .
2. Montrer que  $f$  induit une bijection notée  $f_1$  de  $[-\ln(2), +\infty[$  sur un domaine  $J$  à déterminer.
3. Montre que  $f_1^{-1}$  est continue sur  $J$  et dérivable sur  $J \setminus \{\ln(\ln(2))\}$ .
4. Calculer  $(f_1^{-1})'(0)$ .
5. Que peut-on dire de  $C_{f_1^{-1}}$  au point  $B(\ln(\ln(2)), -\ln(2))$ ?
6. Déterminer l'asymptote de  $Cf$  en  $+\infty$ . Que peut-on en déduire sur  $C_{f_1^{-1}}$ ?
7. Tracer  $C_f$  et  $C_{f_1^{-1}}$ .

B. Soit  $f: (x \mapsto \ln(1 + e^x) + \frac{1}{2} \ln(1 + e^{-x}))$ .

1. Déterminer l'asymptote de  $Cf$  en  $+\infty$ . Faire de même en  $-\infty$ .
2. Etudier les variations de  $f$ .
3. Tracer  $Cf$ .

A. Soit  $f: (x \mapsto \ln(2e^x - x - 1))$

1. Etudions  $g(x) = e^x - 1 - x$ .  $g$  est définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Et  $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^x - 1$ . Donc  $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ . Ainsi,  $g$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^-$  et croissante sur  $\mathbb{R}^+$ . Donc,  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq g(0) = 0$ . J'en conclus que  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$ .  
2. Alors,  $\forall x \in \mathbb{R}, 2e^x \geq e^x + 1 + x$  donc  $2e^x - 1 - x \geq e^x > 0$ . Donc  $Df = \mathbb{R}$ . De plus,  $f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  (car son expression ...). Et  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2e^x - 1}{2e^x - 1 - x}$ . Donc  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$ . Donc  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[-\ln(2), +\infty[$ . Comme de plus,  $f$  est continue sur l'intervalle  $[-\ln(2), +\infty[$ , le TBSCM assure que :

### Ex 4 Des études complètes de fonctions

1.  $g(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$
2.  $g(x) = e^{\frac{1}{x}\sqrt{x^2 + x}}$
3.  $g(x) = x^x$
4.  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ .
5.  $g(x) = \sqrt[3]{x^2(x - 2)}$
6.  $g(x) = \ln(\text{ch}(x))$ .
7.  $g(x) = \ln(2^x - x - 1)$

### Ex 5 Des sommes et produits

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $x, a$  et  $b$  des réels fixés indépendants de  $n$

- 1) Montrer que  $\sum_{k=0}^n \text{ch}\left(a + kb\right) = \frac{\text{sh}\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)}{\text{sh}\left(\frac{b}{2}\right)} \text{ch}\left(a + \frac{nb}{2}\right)$ .
- 2) Calculer pour  $n \geq 3$ :  $S_n = \sum_{p=3}^n \log_{10}\left(\frac{2p^2 - 2p - 4}{3p^2 + 3p - 6}\right)$ ,  $T_n(a, b) = \sum_{k=n}^n (-1)^k a^{(bk)}$ ,  $W_n = \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-1}{k+1} 5^{n-\frac{k}{a}} n \sqrt{2}$  et  $P_n(a) = \prod_{k=3}^n \left(\frac{k^2-1}{k^2-4}\right)^a$ .

3) On pose  $p_n(x) = \prod_{k=0}^n ch\left(\frac{x}{2^k}\right)$ . Calculer  $p_n(x)sh\left(\frac{x}{2^n}\right)$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(x)$ .

## Ex 6 Des inégalités

- Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $ch^2(x) + shx > 0$  et  $|sh(x)| \geq \left|x + \frac{x^3}{6}\right|$ .
- Montrer que pour tout réel  $x$  de  $]0, 1[$ ,  $x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$ .
- Montrer que :  $\forall x > 0, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$
- Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}, \sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$ . Est-elle vraie pour  $n = 2$  ?
- Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+, \forall t \in [0, 1], t \ln(x) + (1-t) \ln(y) \leq \ln(tx + (1-t)y)$ .
- Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ . Montrer que :  $[\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, (x+y)^\alpha < x^\alpha + y^\alpha] \Leftrightarrow \alpha \in ]0, 1[$ .
- Soit  $a$  et  $b$  deux réels. Montrer que :  $(0 < a < b \Rightarrow \frac{b-a}{b} \leq \ln(b) - \ln(a) \leq \frac{b-a}{a})$ .

2. Montrer que pour tout réel  $x$  de  $]0, 1[$ ,  $x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$ .

Soit  $x \in ]0, 1[$ .

$$x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln(x^x(1-x)^{1-x}) \geq \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x) \geq -\ln(2) \Leftrightarrow x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x) + \ln(2) \geq 0.$$

Posons  $f(x) = x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x) + \ln(2)$ .

Alors  $Df = ]0, 1[$  et  $f$  est continue et dérivable sur  $Df$  et  $\forall x \in ]0, 1[, f'(x) = \ln(x) + 1 - \ln(1-x) - 1 = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ .

$$\text{Alors } f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} > 1 \Leftrightarrow x > 1-x \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

|         |   |               |   |
|---------|---|---------------|---|
| $x$     | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 |
| $f'(x)$ | - |               | + |
| $f(x)$  |   |               |   |

Donc  $f$  est strictement décroissante sur  $]0, \frac{1}{2}[$  et strictement croissante sur  $]\frac{1}{2}, 1[$  et atteint donc son minimum en  $\frac{1}{2}$  et ce minimum vaut  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(2) = 0$ . Ainsi,  $f$  est positive et j'en conclus que :  $\forall x \in ]0, 1[, x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$ .

3. Montrer que :  $\forall x > 0, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$

Par définition,  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$ . Donc,  $\forall x > 0, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  existe et  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > 0$ . Alors,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e \Leftrightarrow x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < 1 \Leftrightarrow x[\ln(x+1) - \ln(x)] < 1.$$

Soit  $f(x) = x[\ln(x+1) - \ln(x)]$   $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$ .

$$\text{Et } \forall x > 0, f'(x) = \ln(x+1) - \ln(x) + \frac{x}{x+1} - 1 = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \text{ et } f''(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+1) - (x+1)^2 + x}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}.$$

Donc  $f''$  est décroissante et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ . Donc,  $\forall x > 0, f'(x) > 0$ . Donc  $f$  est croissante. De plus,  $f(x) = x \left[ \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ . Comme

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1. \text{ Je déduis des limites et variations de } f \text{ que } \forall x > 0, f(x) < 1. \text{ Ainsi, } \forall x > 0, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e.$$

4. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}, \sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$ . Est-elle vraie pour  $n = 2$  ?

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}. \sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1} \Leftrightarrow n^{\frac{1}{n}} > (n+1)^{\frac{1}{n+1}} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{n} \ln(n)} > e^{\frac{1}{n+1} \ln(n+1)} \Leftrightarrow \frac{1}{n} \ln(n) > \frac{1}{n+1} \ln(n+1).$$

Soit  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ .  $f$  est définie, continue et dérivable sur  $[e, +\infty[$  et  $\forall x \in [e, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$ . Donc,  $\forall x > e, f'(x) < 0$ . Alors  $f$  est strictement décroissante sur  $[e, +\infty[$ . Par conséquent,  $\forall n \geq 3, f(n) > f(n+1)$ . J'en conclus que  $\forall n \geq 3, \sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$ .

5. Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+, \forall t \in [0, 1], t \ln(x) + (1-t) \ln(y) \leq \ln(tx + (1-t)y)$ .

Pour  $t = 0$  ou  $t = 1$ , l'inégalité est une égalité et est vérifiée.

Soit  $y \in \mathbb{R}^+$  et  $t \in ]0, 1[$ . Posons  $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = t \ln(x) + (1-t) \ln(y) - \ln(tx + (1-t)y)$ .

$f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et  $\forall x > 0, f'(x) = \frac{t}{x} - \frac{t}{tx + (1-t)y} = t \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{tx + (1-t)y} \right)$ . Donc,

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{tx + (1-t)y} \Leftrightarrow (tx + (1-t)y) > x \Leftrightarrow (1-t)(y-x) > 0 \Leftrightarrow y > x.$$

|         |   |     |           |
|---------|---|-----|-----------|
| $x$     | 0 | $y$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | + | 0   | -         |
| $f(x)$  |   |     |           |

Ainsi,  $f$  est strictement croissante sur  $]0, y[$  et strictement décroissante sur  $]y, +\infty[$ . Donc  $f$  atteint son maximum en  $y$  qui vaut  $f(y) = 0$ .

Ainsi,  $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leq 0$  et par suite,  $t \ln(x) + (1-t) \ln(y) \leq \ln(tx + (1-t)y)$ .

J'en conclus que  $\forall y \in \mathbb{R}^+, \forall t \in [0, 1], \forall x \in \mathbb{R}^+, t \ln(x) + (1-t) \ln(y) \leq \ln(tx + (1-t)y)$ .

6. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ . Montrer que :  $[\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, (x+y)^\alpha < x^\alpha + y^\alpha] \Leftrightarrow \alpha \in ]0, 1[$ .

Soit  $y \in \mathbb{R}^+$ . Posons  $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = (x+y)^\alpha - x^\alpha - y^\alpha$ .

$f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et  $\forall x > 0, f'(x) = \alpha(x+y)^{\alpha-1} - \alpha x^{\alpha-1} = \alpha[(x+y)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}]$ .

**1<sup>er</sup> cas  $\alpha \in ]0, 1[$ .** Alors  $\alpha - 1 < 0$  et  $\forall x > 0, f'(x) < 0$  donc  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . Comme  $\alpha > 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0$  et par suite  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . J'en déduis que  $\forall x > 0, f(x) < 0$  et ainsi  $\forall y \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, (x+y)^\alpha < x^\alpha + y^\alpha$ .

**2<sup>ème</sup> cas  $\alpha \in ]1, +\infty[$ .** Alors  $\alpha - 1 > 0$  et  $\forall x > 0, f'(x) > 0$  donc  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . Comme  $\alpha > 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0$  et par suite  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . J'en déduis que  $\forall x > 0, f(x) > 0$  et ainsi,  $\forall y \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, (x+y)^\alpha > x^\alpha + y^\alpha$ .  
J'en conclus que  $[\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, (x+y)^\alpha < x^\alpha + y^\alpha] \Leftrightarrow \alpha \in ]0, 1[$ .

**7. Soit  $a$  et  $b$  deux réels. Montrer que :**  $(0 < a < b \Rightarrow \frac{b-a}{b} \leq \ln(b) - \ln(a) \leq \frac{b-a}{a})$ .

Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $0 < a < b$ . Posons  $x = \frac{b}{a}$ . Alors  $x > 1$ . Et,

$$\left(\frac{b-a}{b} \leq \ln(b) - \ln(a) \leq \frac{b-a}{a}\right) \Leftrightarrow 1 - \frac{a}{b} \leq \ln\left(\frac{b}{a}\right) \leq \frac{b}{a} - 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1.$$

Le cours assure que  $\ln(x) \leq x - 1$  et de même,  $\ln\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} - 1$  donc  $-\ln(x) \leq \frac{1}{x} - 1$  et ainsi,  $\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$ .

J'en conclus que  $\frac{b-a}{b} \leq \ln(b) - \ln(a) \leq \frac{b-a}{a}$ .

**Ex 7 Des bijections** Montrer que les applications suivantes sont bijectives de  $Df$  sur un ensemble  $J$  à déterminer.

Déterminer une expression de la bijection réciproque lorsque cela est possible. Etudier la dérivabilité de  $f^{-1}$  et calculer  $(f^{-1})'(b)$ .

1.  $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}; b \in J$
2.  $f(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} (\equiv th(x)); b \in J$
3.  $f(x) = ch(e^{x\sqrt{5}}); b = \frac{e^2 + e^{-2}}{2}$
5.  $f(x) = sh(x) + \frac{x^2}{2}; b = \frac{e^2 + e^{-1}}{2e}$
4.  $f(x) = x + 2\sqrt{x}; b = 1$

**Ex 8 Des suites** On définit trois suites  $P, T$  et  $u$ ;  $\forall n > 0, P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right), T_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$  et  $u_0 = -1$  et  $\forall n, \sqrt[n]{u_n^3 \sqrt{u_{n+1}}} = e$ .

- 1) Justifier que la suite  $P$  est strictement croissante et convergente.
- 2) Montrer que  $T$  est convergente et déterminer sa limite.
- 3) Donner une expression explicite de  $u$ .

## des exercices plus complets

**Une fonction à paramètre** Soit  $a \in \mathbb{R}^{+*}$ . Etudions  $g: \left(x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1-ax)}\right)$ .

1. **Domaine de définition de  $g$  :**  $g(x)$  existe  $\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(1+ax) \text{ existe} \\ \ln(1-ax) \text{ existe} \\ \ln(1-ax) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+ax > 0 \\ 1-ax > 0 \\ 1-ax \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} > x \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{a}, 0\right[ \cup \left]0, \frac{1}{a}\right[$ . Donc  $Dg = \left]-\frac{1}{a}, 0\right[ \cup \left]0, \frac{1}{a}\right[$ .

2. **Variations de  $g$  :**  $g$  est continue et dérivable sur  $Dg$  car son expression n'est constituée que de fonctions dérivables sur leur propre domaine de définition.

Et  $\forall x \in Dg, g'(x) = \frac{\frac{a}{1+ax} \ln(1-ax) - \frac{-a}{1-ax} \ln(1+ax)}{[\ln(1-ax)]^2}$ . Posons  $h(x) = \frac{a}{1+ax} \ln(1-ax) - \frac{-a}{1-ax} \ln(1+ax)$ . Alors  $g'(x)$  est du signe de  $h(x)$ .

$$h(x) = \frac{a}{1+ax} \ln(1-ax) + \frac{a}{1-ax} \ln(1+ax) = \frac{a}{(1+ax)(1-ax)} [(1-ax) \ln(1-ax) + (1+ax) \ln(1+ax)]$$

Donc,  $h(x) \underset{\text{en posant } t=ax}{=} \frac{a}{(1+t)(1-t)} N(t)$ .

$$N(t) = (1-t) \ln(1-t) + (1+t) \ln(1+t)$$

$N$  est dérivable sur  $] -1, 1[$  et  $\forall t \in ] -1, 1[, N'(t) = -\ln(1-t) - 1 + \ln(1+t) + 1 = \ln(1+t) - \ln(1-t)$ .

Alors,  $N'(t) > 0 \Leftrightarrow \ln(1+t) > \ln(1-t) \Leftrightarrow 1+t > 1-t \Leftrightarrow t > 0$ . Donc  $N$  est strictement décroissant sur  $] -1, 0[$  et strictement croissant sur  $] 0, 1[$ .

| $t$    | -1 | 0 | 1 |
|--------|----|---|---|
| $N(t)$ |    |   |   |

Des variations et valeurs de  $N$ , j'en déduis que  $\forall t \in ] -1, 1[, N(t) \geq 0$ . J'en déduis que  $\forall x \in ] -\frac{1}{a}, \frac{1}{a}[$ ,  $h(x) \geq 0$  et  $\forall x \in ] -\frac{1}{a}, \frac{1}{a}[\setminus \{0\}$ ,  $g'(x) \geq 0$ .

| $x$     | $-\frac{1}{a}$ | $0$  | $\frac{1}{a}$ |
|---------|----------------|------|---------------|
| $g'(x)$ | $+$            |      | $+$           |
| $g(x)$  | $-\infty$      | $-1$ | $0$           |

**3. Déterminons la limite de  $g$  en  $0^+$  et en  $0^-$ :**  $g(x) = \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1-ax)} = (-1) \frac{\ln(1+ax)}{ax} \times \frac{-ax}{\ln(1-ax)}$ .

Or,  $\lim_{x \rightarrow 0} ax = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} -ax$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ . Donc  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+t)} = \frac{1}{1} = 1$ . Donc par composition,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{ax} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-ax}{\ln(1-ax)}$ . J'en conclus que  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -1$ . Et par conséquent  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ . Donc la courbe de  $g$  s'approche du point  $A(0, -1)$  et  $g$  est prolongeable par continuité en 0 par la valeur -1.

**Déterminons comment la courbe de  $g$  s'approche de A ?** Notons  $\tilde{g}: (x \mapsto \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases})$ . Etudions la dérivabilité de  $\tilde{g}$  en 0.

On admet qu'il existe une fonction  $\varepsilon$  définie sur  $] -1, +\infty[$  et telle que :  $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t)$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$ .

$$\forall x \in Dg, \tau(x) = \frac{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\ln(1+ax)}{\ln(1-ax)} + 1}{x} = \frac{\ln(1+ax) + \ln(1-ax)}{x \ln(1-ax)} = \frac{ax - \frac{(ax)^2}{2} + (ax)^2\varepsilon(ax) + (-ax) - \frac{(-ax)^2}{2} + (-ax)^2\varepsilon(-ax)}{x[-ax - \frac{(-ax)^2}{2} + (-ax)^2\varepsilon(-ax)]} = \frac{-a + a\varepsilon(ax) + a\varepsilon(-ax)}{[-1 - \frac{a}{2}x + ax\varepsilon(-ax)]}. \text{ Or,}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} ax = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} -ax$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$ , donc, par composition,  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(ax) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(-ax)$ . J'en déduis que  $\lim_{x \rightarrow 0} \tau(x) = -2$ .

J'en conclus que  $\tilde{g}$  est dérivable en 0 et  $\tilde{g}'(0) = a$ . J'en conclus que  $Cg$  approche le point A en venant se confondre avec la droite d'équation  $y = ax - 1$  (droite tangente à  $C\tilde{g}$  en A).

**4. Déterminons la limite de  $g$  en  $\frac{1}{a}^+$  et en  $\frac{1}{a}^-$ :**  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{a}^+} g(x) = \frac{\ln(2)}{-\infty} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{a}^-} g(x) = \frac{-\infty}{\ln(2)} = -\infty$ . J'en déduis d'une part que  $Cg$  a une

asymptote verticale en  $-\frac{1}{a}$  et d'autre part que  $g$  est prolongeable par continuité en  $\frac{1}{a}$  par la valeur 0 et la courbe  $Cg$  s'approche du point  $B(\frac{1}{a}, 0)$ .

**Déterminons comment la courbe de  $g$  s'approche de B ?** Notons  $\tilde{g}: (x \mapsto \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq \frac{1}{a} \\ 0 & \text{si } x = \frac{1}{a} \end{cases})$ . Etudions la dérivabilité de  $\tilde{g}$  en  $\frac{1}{a}$ .

On admet qu'il existe une fonction  $\varepsilon$  définie sur  $] -1, +\infty[$  et telle que :  $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t)$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$ .

$$\forall x \in Dg, \tau(x) = \frac{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(\frac{1}{a})}{x - \frac{1}{a}} = a \frac{\frac{\ln(1+ax)}{\ln(1-ax)}}{ax - 1} = -a \ln(1+ax) \frac{1}{(1-ax)\ln(1-ax)}. \text{ Or, } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{a}^-} -a \ln(1+ax) = -a \ln(2) < 0. \text{ De plus,}$$

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{a}^-} 1 - ax = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} t \ln(t) \stackrel{CC}{=} 0^-$ , donc, par composition,  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{a}^-} (1-ax) \ln(1-ax) = 0^-$ .

Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{a}^-} \tau(x) = +\infty$ . Comme  $\tilde{g}$  est continue en  $1/a$ , j'en déduis que  $C\tilde{g}$  a une tangente verticale en  $1/a$ . Et par suite, la courbe de  $g$  s'approche de B en venant se confondre avec la droite d'équation  $x = \frac{1}{a}$ .



Déterminer tous les réels  $a$  tels que  $\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) \leq e^{ax^2}$ .

$ch(x) \leq e^{ax^2} \Leftrightarrow \ln(ch(x)) \leq ax^2 \Leftrightarrow \frac{\ln(ch(x))}{x^2} \leq a$  ou  $x = 0$ . Donc pour que  $a$  vérifie :  $\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) \leq e^{ax^2}$ , il faut et il suffit que  $a$  vérifie que :  $\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{\ln(ch(x))}{x^2} \leq a$  donc que  $a$  soit un majorant de la fonction  $f: (x \mapsto \frac{\ln(ch(x))}{x^2})$ . Etudions  $f$  :

$Df = \mathbb{R}^*$  et  $f$  est paire. Etudions  $f$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .  $f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et  $\forall x > 0, f'(x) = \frac{\frac{sh(x)}{ch(x)}x^2 - 2x \ln(ch(x))}{x^4} = \frac{\frac{sh(x)}{ch(x)}x - 2 \ln(ch(x))}{x^3}$

$f'(x)$  est du signe de  $g(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}x - 2 \ln(ch(x))$ . Alors,  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et

$$\forall x > 0, g'(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} + \frac{x}{ch^2(x)} - \frac{2sh(x)}{ch(x)} = \frac{x}{ch^2(x)} - \frac{sh(x)}{ch(x)} \text{ et } g''(x) = \frac{1}{ch^2(x)} - \frac{2xsh(x)}{ch^3(x)} - \frac{1}{ch^2(x)} = -\frac{2xsh(x)}{ch^3(x)} < 0.$$

D'où le tableau ci -contre donnant, en particulier, les variations de  $f$  :

D'après les variations et la parité de  $f$ ,  $f$  est majorée dès que la limite de  $f$  en 0 existe et est finie.

$$\text{Etudions cette limite : } \frac{\ln(ch(x))}{x^2} = \frac{\ln(ch(x))}{ch(x)-1} \frac{ch(x)-1}{x^2} = \frac{\ln(ch(x))}{ch(x)-1} \frac{2sh^2(\frac{x}{2})}{x^2} = \frac{\ln(ch(x))}{ch(x)-1} \frac{2sh^2(\frac{x}{2})}{4(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{2} \frac{\ln(ch(x))}{ch(x)-1} \left(\frac{sh(\frac{x}{2})}{(\frac{x}{2})}\right)^2.$$

$$\text{Or, } \lim_{x \rightarrow 0} ch(x) \stackrel{C}{=} 1 \text{ et } \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\ln(u)}{u-1} \stackrel{TA}{=} 1, \text{ donc par composition, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(ch(x))}{ch(x)-1} = 1. \text{ Et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} \stackrel{C}{=} 0 \text{ et } \lim_{u \rightarrow 0} \frac{sh(u)}{u} \stackrel{TA}{=} 1 \text{ donc par composition, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{sh(\frac{x}{2})}{(\frac{x}{2})} = 1.$$

Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$ . Donc  $[\frac{1}{2}, +\infty[$  est l'ensemble des majorants de  $f$ . Je conclus que les réels  $a$  recherchés sont tous les réels supérieurs à  $\frac{1}{2}$ .

| $x$      | 0 | $+\infty$ |
|----------|---|-----------|
| $g''(x)$ | — | —         |
| $g'(x)$  | 0 | —         |
| $g(x)$   | 0 | —         |
| $f'(x)$  | — | —         |
| $f(x)$   | — | —         |

1. Etudier le signe de  $f(x) = (x-1)\ln(x+1) - x\ln(x)$  sur  $[1; +\infty[$ .

2. En déduire les variations de  $\varphi(x) = \ln(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$  sur  $[1; +\infty[$ .

3. En calculant  $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ , en déduire les variations de  $\varphi$  sur  $]0,1]$ .

4. Montrer que pour tous réels strictement positifs,  $\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leq (\ln(2))^2$ .

1.  $f$  est dérivable sur  $[1, +\infty[$  et  $\forall x \geq 1, f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x-1}{x+1} - \ln(x) - 1 = \ln(x+1) + \frac{x-1}{x+1} - \ln(x) - \frac{x+1}{x+1} = \ln(x+1) - \frac{2}{x+1} - \ln(x)$

$f'$  est dérivable sur  $[1, +\infty[$  et  $\forall x \geq 1, f''(x) = \frac{1}{x+1} - 2\frac{(-1)}{(x+1)^2} - \frac{1}{x} = \frac{x(x+1)+2x-(x+1)^2}{x(x+1)^2} = \frac{x-1}{x(x+1)^2} > 0$ .

$f'$  est donc strictement croissante sur  $[1, +\infty[$ .

$\forall x \geq 1, f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x+1}$ . Donc,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ . Donc d'après les variations de  $f'$ , j'en déduis que  $\forall x \geq 1, f'(x) < 0$ . Ainsi,  $f$  est strictement décroissante sur  $[1, +\infty[$ .

Comme  $f(1) = 0, \forall x \geq 1, f(x) < 0$ .

| $x$      | 1 | $+\infty$ |
|----------|---|-----------|
| $f''(x)$ | — | +         |
| $f'(x)$  | — | 0         |
| $f(x)$   | — | —         |

2.  $\varphi$  est dérivable sur  $[1, +\infty[$  et  $\forall x \geq 1, \varphi'(x) = \frac{1}{x+1} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \ln(x+1) \left(-\frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x+1} [\ln(x+1) - \ln(x)] + \ln(x+1) \left(-\frac{1}{x(x+1)}\right)$   
 $\varphi'(x) = \frac{1}{x(x+1)} [x\ln(x+1) - x\ln(x) - \ln(x+1)] = \frac{1}{x(x+1)} f(x) < 0$ . Donc  $\varphi$  est strictement décroissante sur  $[1, +\infty[$ .

3.  $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)\ln\left(1+\frac{1}{(\frac{1}{x})}\right) = \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)\ln(1+x) = \varphi(x)$  (\*\*).

Soit  $t$  et  $t'$  deux réels tels que  $0 < t < t' < 1$ . Posons  $x = \frac{1}{t}$  et  $x' = \frac{1}{t'}$ . Alors  $1 < x' < x$ . Par décroissance de  $\varphi$  sur  $[1, +\infty[$ ,  $\varphi(x') > \varphi(x)$ . Donc,  $\varphi\left(\frac{1}{t'}\right) > \varphi\left(\frac{1}{t}\right)$ . Et ainsi, d'après (\*\*),  $\varphi(t') > \varphi(t)$ . J'en déduis que  $\varphi$  est strictement croissante sur  $]0,1]$ .

5. Alors  $\varphi$  admet un maximum en 1 qui vaut  $\varphi(1) = \ln(2)^2$ . Donc,  $\forall x \geq 0, \varphi(x) \leq \ln^2(2)$ .

Alors  $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \varphi\left(\frac{a}{b}\right) \leq \ln^2(2)$  i.e.  $\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leq (\ln(2))^2$ .

Soit  $t \in ]0; 1[$ . Pour tout  $x \in ]0,1[$ , on pose  $f_t(x) = \min\{n \in \mathbb{N}^* / x^n \leq t\}$ .

Montrer que pour tout  $x \in ]0; 1[, \frac{\ln(t)}{\ln(x)} \leq f_t(x) < \frac{\ln(t)}{\ln(x)} + 1$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f_t(x)$ .

Soit  $x \in ]0,1[. x^n \leq t \Leftrightarrow \ln(x^n) \leq \ln(t) \Leftrightarrow n \ln(x) \leq \ln(t) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(t)}{\ln(x)}$ . Donc,  $f_t(x) = \min\{n \in \mathbb{N}^* / n \geq \frac{\ln(t)}{\ln(x)}\}$ .

Or,  $[\frac{\ln(t)}{\ln(x)}, \frac{\ln(t)}{\ln(x)} + 1[$  contient un seul entier non nul (puisque  $\ln(t) \neq 0$ ). Il en découle que  $\frac{\ln(t)}{\ln(x)} \leq f_t(x) < \frac{\ln(t)}{\ln(x)} + 1$ .

Alors  $\forall x \in ]0,1[, (1-x) \frac{\ln(t)}{\ln(x)} \leq (1-x)f_t(x) < (1-x) \left[\frac{\ln(t)}{\ln(x)} + 1\right]$  i.e.  $\frac{1}{x-1} [-\ln(t)] \leq (1-x)f_t(x) < \frac{1}{x-1} [-\ln(t)] + (1-x)$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x) = 0$ , les deux fonctions qui encadrent  $(1-x)f_t(x)$  ont la même limite  $[-\ln(t)]$  quand  $x \rightarrow 1^-$  et par suite,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f_t(x) = -\ln(t)$ .

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'applications de  $[0,1]$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = \begin{cases} nx^n & \text{si } x \in [0, \frac{n}{n+1}] \\ n^{n+1}(1-x)^n & \text{si } x \in ]\frac{n}{n+1}, 1] \end{cases}$

1. Etudier la continuité de chaque  $f_n$ .
2. Déterminer, pour  $x$  fixé, la limite de la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ .
3. Puis déterminer la limite de  $(f_n(\frac{n}{n+1}))_{n \in \mathbb{N}}$ .

1.  $g_n$  et  $h_n$  sont polynomiales donc continues sur  $\mathbb{R}$ . J'en déduis que  $f_n$  est continue au moins sur  $[0, \frac{n}{n+1}]$  et sur  $]\frac{n}{n+1}, 1]$ .  
 $f_n$  est-elle continue en  $\frac{n}{n+1}$ ? Autrement dit  $Cg_n$  et  $Ch_n$  se raccordent-elles au point d'abscisse  $\frac{n}{n+1}$ ?

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{n}{n+1})^-} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{n}{n+1})^-} g_n(x) = n \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = f_n \left( \frac{n}{n+1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{n}{n+1})^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{n}{n+1})^+} h_n(x) = n^{n+1} \left( 1 - \frac{n}{n+1} \right)^n = n^{n+1} \left( \frac{1}{n+1} \right)^n = n \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = f_n \left( \frac{n}{n+1} \right).$$

J'en déduis que  $f_n$  est continue en  $\frac{n}{n+1}$ .

2. Fixons  $x \in [0,1[$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1^-$ , pour  $n$  assez grand,  $\frac{n}{n+1} > x$  et par conséquent  $x \in [0, \frac{n}{n+1}]$  et  $f_n(x) = nx^n$ .

Or  $nx^n = ne^{n \ln(x)} = \frac{n}{e^{(-\ln(x))n}} = \frac{n}{e^{\gamma n}}$ . Or  $\gamma = -\ln(x) > 0$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{\gamma t}} \stackrel{CC}{=} 0$ . Donc, par composition  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^{(-\ln(x))n}} = 0$ . Et ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

Prenons  $x = 1$ . Alors  $f_n(1) = n^{n+1}0^n = 0$  dès que  $n \geq 1$ . Donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(1) = 0$ .

**CCL** :  $\forall x \in [0,1], \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ .

3.  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \left( \frac{n}{n+1} \right) = n \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = ne^{n \ln \left( \frac{n}{n+1} \right)} = ne^{-n \ln \left( \frac{n+1}{n} \right)} = ne^{-\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}}$ . Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ . Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1. \text{ Par conséquent, } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}} = e^{-1} = \frac{1}{e}. \text{ J'en conclus que : } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \left( \frac{n}{n+1} \right) = \frac{1}{e}.$$

