

TD 5 Fonctions usuelles 1

<https://view.genially.com/6735b09e44907f45b8213883/interactive-content-courbes-de-fonctions>

Ex 0

A. Des calculs de base pour apprendre et penser à simplifier au maximum des expressions exponentielles ou logarithmiques

Simplifier :

$$a = e^{-3 \ln(x)}$$

$$b = \frac{\ln(x^2)}{\ln(x^4)}$$

$$c = e^{\ln(x^2+1)-3 \ln(x)}$$

$$d = \ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$$

$$h = \ln(\sqrt{\exp(x)})$$

$$m = \operatorname{ch}\left(-\frac{1}{3} \ln(e^{-3})\right)$$

$$p = \operatorname{sh}\left(-\frac{3}{2} \ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3x^2+1}}\right)\right)$$

$$q = \operatorname{sh}^{-1}(2) - \operatorname{ch}_1^{-1}(2)$$

$$r = \log_4(4^{\sqrt{2}})$$

B. Tracer les courbes des fonctions suivantes :

$f: (x \mapsto \ln(x))$ $Df =$ et $Df' =$ $\forall x \in$, $f'(x) =$	$f: (x \mapsto x^\pi = \dots\dots\dots)$ $Df =$ et $Df' =$ $\forall x \in$, $f'(x) =$
$f: (x \mapsto \operatorname{ch}(x) = \dots\dots\dots)$ $Df =$ et $Df' =$ et $\forall x \in$, $f'(x) =$	$f: (x \mapsto e^{-x} = \dots\dots\dots)$ $Df =$ et $Df' =$ $\forall x \in$, $f'(x) =$
$f: (x \mapsto \pi^x = \dots\dots\dots)$ $Df =$ et $Df' =$ et $\forall x \in$, $f'(x) =$	$f: (x \mapsto \operatorname{sh}(x = \dots\dots\dots))$ $Df =$ et $Df' =$ et $\forall x \in$, $f'(x) =$
$f: (x \mapsto x^{-\sqrt{2}} = \dots\dots\dots)$ et $Df =$ et $Df' =$ et $\forall x \in$, $f'(x) =$	$f: (x \mapsto x^{\frac{1}{\pi}} = \dots\dots\dots)$ et $Df =$ et $Df' =$ et $\forall x \in$, $f'(x) =$

$f: (x \mapsto x^5 = \dots) \text{ et } Df = \dots \text{ et}$ $Df' = \dots \text{ et } \forall x \in \dots, f'(x) = \dots$	$f: (x \mapsto x^{\frac{1}{5}} = \dots) \text{ et } Df = \dots \text{ et}$ $Df' = \dots \text{ et } \forall x \in \dots, f'(x) = \dots$
--	--

Ex 1 Equations et inéquations

A. Soit y un paramètre réel. Résoudre les (in)-équations suivantes d'inconnue x réelle (on réfléchira préalablement : l'équation peut-elle se résoudre algébriquement ou non ?)

- $e^{-6x^2+1} - \sqrt{e} > 0$
- $\ln(x) + \ln(3x^2 - 4) > \ln(x^2 - 2)$
- $\log_2(x) + \log_x(2) = \frac{5}{2}$
- $3x \log_{10}(x) + 2(x-1) = 0$
- $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$
- $\frac{e^{3x} - 2e^{2x} - e^{x+4} + 2e^4}{\ln^2 x - 1} > 0$
- $sh(x) = x^2$
- $e^{-2x} + e^x \leq 2$
- $x + e^x > 2$
- $3^{-x} + 3^x = y$
- $x^2 < \ln(x) + 1$
- $\frac{\ln(x+1)}{\ln(x-2)} \leq 2$
- $2ch(x) \leq x^2$
- $x \ln(2-x) = 1$
- $sh^3(x) - 14sh(x) + 5 < 5ch^2(x)$
- $3sh(x) - ch(x) = 1$
- $x^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $ch^5 x - sh^5 x = 1$

B. Résoudre: $(S): \begin{cases} \log_y(x) + \log_x(y) = \frac{50}{7} \\ xy = 256 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Ex 2 Autour du calcul de limite

I En se plaçant au voisinage du point où l'on étudie la limite

A. Soit $h: (x \mapsto x - [x])$ et $g: (x \mapsto [2x - 1])$. Montrer que $f = g \circ h$ est continue sur $\mathbb{R}$.

B. Montrer que $\varphi: (x \mapsto [1 - 2x])$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

II Par encadrement Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[2x]}{1-3x+\sqrt{x}}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{\sqrt{x-3}\sqrt[3]{x}}$.

III En faisant apparaître le produit d'une fonction de limite nulle et d'une fonction bornée Soit a un réel. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} x^a \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ quand cette limite existe (On justifiera qu'elle n'existe pas le cas échéant)

IV Faire apparaître les limites usuelles Soit a et b des réels.

$FI \text{ " } \frac{0}{0} \text{ "}$	$FI \text{ " } \infty - \infty \text{ "}$	$FI \text{ " } 0 \times \infty \text{ "}$	$FI \text{ " } \frac{\infty}{\infty} \text{ "}$	$FI \text{ " } 1^\infty, 0^0 \text{ ou } (+\infty)^0 \text{ "}$
$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{2x-2} - x^{-4}}{(x^3-64)\cos(\pi x)}$ $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{(x^3-64)\cos(\pi x)}$ $\lim_{x \rightarrow -a} \frac{(a-1)x+x^2-a}{x^3+a^3}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3-1)}{\ln(x)}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x^2+\cos(x^2))-\ln(2)}{x^2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{sh(x)}-ch(x)}{\sin(x)}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{e^{-\frac{1}{x^2}}}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x^2)-3x^2}{\sin(ax)} (b \neq 0)$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^a-a^a}{x^b-a^b} (a, b > 0)$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{sh(x)(5+ch^2(x))}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+y)^a - x^a - y^a$ où $y \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2-1} - (ax+b)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - \ln(\ln(x)) - \sqrt[3]{x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} (2\sqrt[3]{x} - 3x^2)\ln^2(x^4-3x)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-\sqrt{\ln(x^2)}}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) \ln(1+x)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}-2x^\pi-\ln^2(x)}{1-3sh(x)}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\ln(x)-3x^2+\sin(x)}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{x^2}}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}-1}{sh(x)(5+ch^2(x))}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-64}{\sqrt{x}-2}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{bx}\right)^{ax} b \neq 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + sh(x))^{\ln(x)}$ $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{\ln(x)}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + 3ch(x))^{e^x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} sh(x)^{\sin(x)}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} sh(x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

V APPLICATIONS à l'étude de fonction du calcul de limites :

1) Continuité et dérivabilité :

a. Soit m un entier naturel **non nul** et a un réel. Justifier que la fonction $f: (x \mapsto x^m)$ est dérivable en a et $f'(a) = ma^{m-1}$. Puis montrer que la fonction $g: (x \mapsto x^{\frac{1}{m}})$ est dérivable en tout réel non nul a de Dg et $g'(a) = \frac{1}{m} a^{\frac{1}{m}-1}$.

b. Pour quelles valeurs du réel α , la fonction $f: (x \mapsto \frac{sh(x)}{x^\alpha})$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ? On suppose maintenant que $\alpha < 1$. Le prolongement par continuité de f est-il dérivable en 0 ?

c. Soit $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\ln(\cos(x))}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ mais dérivable sur $\mathbb{R}^*$ uniquement et donner une expression de f' .

Quelle est l'allure de Cf au voisinage de 0 ?

2) **Asymptote** Soit $f(x) = x \exp\left(\frac{x}{x^2-1}\right) = x e^{\frac{x}{x^2-1}}$ et $\varphi(t) = \frac{e^{\frac{1}{1-t^2}}-1}{t}$. Calculer la limite de φ en 0. En déduire que Cf admet une même asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$ dont on donnera une équation.

Ex 3 Asymptotes simples

- A. Soit $f : (x \mapsto \ln(3^x - x - 1))$. On munit le plan d'un repère orthonormé. On donne $a = -\frac{\ln(\ln(3))}{\ln(3)} \approx -0,086$.
- Montrer qu'il existe un réel b tel $b < a$ et $Df =]-\infty; b[\cup]0, +\infty[$.
 - Montrer que f induit une bijection notée $f|_J$ de $]0, +\infty[$ sur un domaine J à déterminer. (NB : $f|_J = f|_{]0, +\infty[}$).
 - Etudier la continuité, monotonie et dérivabilité de $f|_J^{-1}$ sur J . Calculer $f|_J^{-1}(1)$ et $(f|_J^{-1})'(1)$.
 - Déterminer l'asymptote de Cf en $+\infty$. Que peut-on en déduire sur $C_{f|_J^{-1}}$?
 - Tracer C_f et $C_{f|_J^{-1}}$.
- B. Soit $f : (x \mapsto \ln(1 + e^x) + \frac{1}{2} \ln(1 + e^{-x}))$.
- Déterminer l'asymptote de Cf en $+\infty$. Faire de même en $-\infty$.
 - Etudier les variations de f . Tracer Cf .
- C. Soit $f : (x \mapsto \sqrt{3x^2 - 4x + 5})$. Déterminer l'asymptote de Cf en $+\infty$. Faire de même en $-\infty$. De même avec $f : (x \mapsto \frac{4x - 5x^2}{1 - 2x})$.

Ex 4 Des études complètes de fonctions

Etudier g et représenter la courbe de g :

- $g(x) = th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$
- $g(x) = e^{\frac{1}{x}\sqrt{x^2 + x}}$
- $g(x) = x^x$
- $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ (déjà faite à retravailler)
- $g(x) = \sqrt[3]{x^2(x - 2)}$
- $g(x) = \ln(ch(x))$.

Ex 5 Des sommes et produits

Soit $n \in \mathbb{N}$ et x, a et b des réels fixés indépendants de n

- Montrer que si b est non nul alors $\sum_{k=0}^n ch(a + kb) = \frac{sh(\frac{(n+1)b}{2})}{sh(\frac{b}{2})} ch(a + \frac{nb}{2})$.
- Calculer pour $n \geq 3$: $S_n = \sum_{p=3}^n \log_{10} \left(\frac{2p^2 - 2p - 4}{3p^2 + 3p - 6} \right)$, $T_n(a, b) = \sum_{k=n}^n (-1)^k a^{(bk)}$, $W_n = \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-1}{k+1} 5^{n-\frac{k}{a}} \sqrt[n]{2}$ et $P_n(a) = \prod_{k=3}^n \left(\frac{k^2 - 1}{k^2 - 4} \right)^a$.
- On pose $p_n(x) = \prod_{k=0}^n ch\left(\frac{x}{2^k}\right)$. Calculer $p_n(x) sh\left(\frac{x}{2^n}\right)$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(x)$.

Ex 6 Des inégalités à prouver

- Montrer que pour tout réel x , $ch^2(x) + shx > 0$ et $|sh(x)| \geq \left|x + \frac{x^3}{6}\right|$.
- Montrer que pour tout réel x de $]0, 1[$, $x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.
- Montrer que : $\forall x > 0, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$.
- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}, \sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$. Est-elle vraie pour $n = 2$?
- Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+, \forall t \in [0, 1], t \ln(x) + (1-t) \ln(y) \leq \ln(tx + (1-t)y)$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{++} \setminus \{1\}$. Montrer que : $[\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{++})^2, (x+y)^\alpha < x^\alpha + y^\alpha] \Leftrightarrow \alpha \in]0, 1[$.
- Soit a et b deux réels. Montrer que : $(0 < a < b \Rightarrow \frac{b-a}{b} \leq \ln(b) - \ln(a) \leq \frac{b-a}{a})$.

Ex 7 Des bijections

Montrer que les applications suivantes sont bijectives de Df sur un ensemble J à déterminer.

Déterminer une expression de la bijection réciproque lorsque cela est possible. Etudier la dérivabilité de f^{-1} et calculer $(f^{-1})'(b)$.

- $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$; $b \in J$
- $f(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} (\equiv th(x))$; $b \in J$
- $f(x) = ch(e^{x\sqrt{5}})$; $b = \frac{e^2 + e^{-2}}{2}$
- $f(x) = sh(x) + \frac{x^2}{2}$; $b = \frac{e^2 + e^{-1}}{2e}$
- $f(x) = x + 2\sqrt{x}$; $b = 1$

Ex 8 Des suites

On définit trois suites P, T et u ; $\forall n > 0$ $P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$ $T_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ et $u_0 = -1$ et $\forall n, \sqrt[5]{u_n^3} \sqrt{u_{n+1}} = e$.

- Justifier que la suite P est strictement croissante et convergente.
- Montrer que T est convergente et déterminer sa limite.
- Donner une expression explicite de u .

Ex 9 Une fonction à paramètre

Soit $a \in \mathbb{R}^{++}$. Etudier $g : (x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1-ax)})$.

Ex 10 Une inégalité à paramètre

Déterminer tous les réels a tels que $\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) \leq e^{ax^2}$.

Ex 11 Etudes de fonctions imbriquées

- Etudier le signe de $f(x) = (x-1)\ln(x+1) - x\ln(x)$ sur $[1; +\infty[$.
- En déduire les variations de $\varphi(x) = \ln(x+1)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ sur $[1; +\infty[$.
- En calculant $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, en déduire les variations de φ sur $]0, 1[$.
- Montrer que pour tous réels strictement positifs, $\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right)\ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq (\ln(2))^2$.

Ex 12 Limite par encadrement

Soit $t \in]0; 1[$. Pour tout $x \in]0; 1[$, on pose $f_t(x) = \min\{n \in \mathbb{N}^* / x^n \leq t\}$.

Montrer que pour tout $x \in]0; 1[$, $\frac{\ln(t)}{\ln(x)} \leq f_t(x) < \frac{\ln(t)}{\ln(x)} + 1$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f_t(x)$.

Ex 13 une suite de fonctions

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = \begin{cases} nx^n & \text{si } x \in [0, \frac{n}{n+1}] \\ n^{n+1}(1-x)^n & \text{si } x \in]\frac{n}{n+1}, 1] \end{cases}$

1. Etudier la continuité de chaque f_n .
2. Déterminer, pour x fixé, la limite de la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Puis déterminer la limite de $(f_n(\frac{n}{n+1}))_{n \in \mathbb{N}}$.