

# TD 6

## Fonctions *Arccos*, *Arcsin* et *Arctan*.

<https://view.genially.com/6735b09e44907f45b8213883/interactive-content-courbes-de-fonctions>

### Ex 1 De la trigo....

- Calculer les réels :  $\alpha = \text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{48}{7}\pi\right)\right)$ ,  $\beta = \text{Arccos}\left(\sin\left(\frac{36}{5}\pi\right)\right)$  et  $\gamma = \text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{58}{13}\pi\right)\right)$ .
- Simplifier :  $a(x) = \text{Arcsin}(\sin x)$  pour  $x \in \left[-\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}\right]$  et  $b(x) = \text{Arccos}(2\sin^2(x) - 1)$  pour  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .
- Simplifier les expressions suivantes :  
 $A(x) = \cos(2\text{Arcsin}(x))$   
 $B(x) = \cos(2\text{Arctan}(x))$   
 $C(x) = \tan(2\text{Arcsin}(x))$   
 $D(x) = \sin(2\text{Arccos}(x))$   
 $E(x) = \sin(2\text{Arctan}(x))$ .

### Ex 2 Résoudre

- $(E_1): 9\sin^2(x) - 1 = 0$ .
- $(E_2): 3\sin(5x) - 2\cos(5x) = 1$ .
- $(E_3): 3\cos^2(x) - \tan(x) > 3$ .

### Ex 3 Etudier le domaine de définition, la périodicité et la parité des fonctions suivantes et représenter ces fonctions :

- $f = \text{Arcsin} \circ \sin$ ,  $g = \text{Arccos} \circ \cos$  et  $h = \text{Arctan} \circ \tan$ .
- $m = \sin \circ \text{Arcsin}$ ,  $n = \cos \circ \text{Arccos}$  et  $q = \tan \circ \text{Arctan}$ .
- $r: (x \mapsto \text{Arccos}(\sin(3x)))$ ,  $t: (x \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}\right))$ ,  $u: (x \mapsto \text{Arccos}\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right))$
- $f: (x \mapsto \text{Arccos}(\cos(x)) + \frac{1}{2}\text{Arccos}(\cos(2x)))$

### Ex 4 Egalités et inégalités

- Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $\text{Arcsin}\left(\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}\right) = \text{Arctan}(\text{sh}(x))$ .
- Montrer que pour tout réel  $x > 0$ ,  $\text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ .
- Montrer que  $f: \left(x \mapsto 2\text{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \text{Arccos}(2x-1)\right)$  est constante sur  $Df$ .
- Démontrer que  $\forall x \in ]-1; 1[ \setminus \{0\}$ ,  $|\text{Arcsin}(x)| < \left|\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right|$
- Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ ,  $\frac{1}{(x+1)^2+1} \leq \text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x) \leq \frac{1}{x^2+1}$ .

#### Applications :

- Montrer que la suite  $u$ , telle que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{1+k^2}$ , est convergente.
  - Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(\text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x)) = 1$ .
6. Montrer que :  $\forall x \in ]0; 1]$ ,  $2\text{Arcsin}(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2} + \text{Arcsin}(2x-1) = \pi - 2\text{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$  (on appliquera deux méthodes : changement de variable et dérivation)

### Ex 5 Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\text{Arcsin}(\sin(x))}{x-\pi}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arccos}(1-x)}{\sqrt{x}}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\text{Arctan}(x\sin(x))\ln(1 + \text{Arcsin}(e^{-x}))$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\text{Arcsin}(\text{Arctan}(x)) - 1)$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi}\text{Arccos}(x)\right)^{\frac{1}{\text{Arctan}(x)}}$ .

### Ex 6 Etude de fonctions par deux méthodes changement de variables ou dérivation :

- Soit  $f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ 
  - Déterminer  $Df$ .
  - Soit  $y$  un réel tel que  $x = \tan\left(\frac{y}{2}\right)$  existe. Montrer que :  $\cos(y) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$  et  $\sin(y) = \frac{2x}{1+x^2}$ .

- c. En déduire que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \begin{cases} 2\operatorname{Arctan}(x) & \text{si } x \in [-1, 1] \\ \pi - 2\operatorname{Arctan}(x) & \text{si } x \in ]1, +\infty[ \\ -\pi - 2\operatorname{Arctan}(x) & \text{si } x \in ]-\infty, -1[ \end{cases}$ .
- d. Représenter cette fonction.
- e. Retrouver le résultat c) par dérivation.
2. a. Démontrer que : pour tout réel  $t$ ,  $4\cos^3(t) - 3\cos t = \cos(3t)$ .
- b. En déduire une simplification de l'expression et une représentation de la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \operatorname{Arccos}(4x^3 - 3x)$ .  
Proposer une autre méthode pour simplifier l'expression de  $f$ .
- c. Soit  $f: \left(x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right)$ . Représenter la fonction  $f$ .
3. Proposer dans chaque cas un bon changement de variable afin de simplifier l'expression :
- $$A(x) = \operatorname{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}) \quad , \quad B(x) = \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}\right) \quad , \quad C(x) = \operatorname{Arccos}(1-2x^2) \quad , \quad D(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

**Ex 7 Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :**

- $\operatorname{Arccos}(\sin(x)) = \frac{5\pi}{9}$
- $\operatorname{Arcsin}(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)$
- $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{3}$
- $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x\sqrt{3}) = \frac{7\pi}{12}$
- $\operatorname{Arcsin}(\tan(x)) = x$
- $\operatorname{Arccos}(x) = \operatorname{Arcsin}(2x)$
- $\operatorname{Arcsin}(2x) - \operatorname{Arcsin}(x\sqrt{3}) = \operatorname{Arcsin}(x)$ .
- $\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{2}$ .

**Ex 8**

- Montrer que :  $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
- Montrer que :  $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$ .
- Trouver une relation entre  $\operatorname{Arctan}(\sqrt{3}) + \operatorname{Arctan}(1)$  et  $\operatorname{Arctan}(-2 - \sqrt{3})$ .
- Montrer que :  $\frac{\pi}{4} + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) = 4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$ .

**Ex 9** On pose  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ .

- Montrer que si  $n$  est pair alors  $\forall x \geq 0, P_{n+1}(x) \leq \operatorname{Arctan}(x) \leq P_n(x)$ .
- En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |\operatorname{Arctan}(x) - P_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$ .

**Ex 10**

- Montrer que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \left| \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} \right| \leq 1$ .
- Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 
  - Montrer que :  $xy < 1 \Rightarrow \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(y) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ .
  - Montrer que :  $xy > 1$  et  $x > 0 \Rightarrow \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(y) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + \pi$ .
  - Montrer que :  $xy > 1$  et  $x < 0 \Rightarrow \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(y) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) - \pi$ .
- Montrer que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}\right) = \frac{\operatorname{sgn}(x+y)}{\operatorname{signe de}(x+y)} (\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(y))$ .

