

Programme de colle 9

Chap 6 Dernières fonctions usuelles

Logarithme népérien :

- Définition comme l'unique primitive de $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ s'annulant en 1.
- Dérivabilité et dérivée, monotonie, limite par taux d'accroissement : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t}$.
- Une primitive de $\ln$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Propriétés algébriques : $\ln(xy)$, $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right)$, $\ln(x^r)$ où $r \in \mathbb{Q}$.
- Inégalités usuelles $\forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ et interprétation géométrique.
- Limites usuelles et premières croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$.
- Représentation : courbe de $\ln$.

Exponentielle :

- Définition comme la bijection réciproque de $\ln$. Autre notation : $e^x = \exp(x)$.
- Continuité, monotonie, dérivabilité et dérivée, limite par taux d'accroissement : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t}$.
- Une primitive de $\exp$ et de $u'(x)e^{u(x)}$.
- Propriétés algébriques : $\exp(x+y)$, $\exp(-x)$, $\exp(x-y)$, $\exp(rx)$ où $r \in \mathbb{Q}$, $\ln(e^x)$, $e^{\ln(x)}$.
- Inégalités usuelles $\forall x, \exp(x) \geq 1+x$ et interprétation géométrique.
- Limites usuelles et autres croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$.
- Représentation : courbe de $\exp$.

Logarithme et exponentielle de base $a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$:

- Définitions
- Relation entre $\log_a$ et $\exp_a$.
- Représentation : courbe de $\log_a$ et $\exp_a$ en fonction de a .
- Propriétés algébriques.

Puissances réelles :

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Définition de x^α .
- Propriétés algébriques : $x^{\alpha+\beta}$, $x^{-\alpha}$, $x^{\alpha-\beta}$, $x^\alpha y^\alpha$, $\frac{x^\alpha}{y^\alpha}$, $\ln(x^\alpha)$, $(e^x)^\alpha$.
- Fonctions $f_\alpha: (x \mapsto x^\alpha)$. Continuité, monotonie, dérivabilité et dérivée, limite par taux d'accroissement : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\alpha - 1}{x - 1}$ ou $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t}$, prolongement par continuité éventuel en 0, dérivabilité en 0 du prolongement, asymptotes éventuelles, branches paraboliques éventuelles.
- Représentation : courbe de f_α .
- Croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^{\gamma x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\gamma x}}{x^\alpha}$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha |\ln(x)|^\beta$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\beta(x)}{x^\alpha}$.
- Définition des fonctions de la forme $u(x)^{v(x)}$. Nouvelles formes indéterminées.

Cosinus et sinus hyperboliques.

- Définition
- Propriétés algébriques : $ch^2 - sh^2$, $ch(a+b)$, $sh(a+b)$, $ch(2a)$, $sh(2a)$.
- Propriétés des fonctions : parité, continuité, dérivabilité et fonction dérivée et tracé de la courbe fonctions
- Bijections $ch_{/\mathbb{R}^+} = ch|$ et sh et leur bijection réciproque respective.
- Inégalités : $\forall x, ch(x) \geq 1$ et $|x| \leq |sh(x)| < \frac{e^{|x|}}{2} < ch(x)$.
- Bijection (induite) et le cas échéant, bijection réciproque.
- Primitive de $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$ et de $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

Arcsinus, Arccosinus et Arctangente.

- Définition de chacune de ces fonctions.
- Valeurs particulières.
- Résolution des équations $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$ et $y = \tan(x)$ d'inconnue x réelle.
- Propriétés algébriques : simplification de

- $\sin(\operatorname{Arctan}(x))$ et $\operatorname{Arctan}(\sin(x))$
- $\cos(\operatorname{Arccos}(x))$ et $\operatorname{Arccos}(\cos(x))$
- $\tan(\operatorname{Arctan}(x))$, $\operatorname{Arctan}(\tan(x))$.
- $\operatorname{Arctan}(-x)$, $\operatorname{Arccos}(-x)$, $\operatorname{Arctan}(-x)$
- $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arccos}(x)$
- $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.
- $\cos(\operatorname{Arctan}(x))$ et $\sin(\operatorname{Arccos}(x))$
- $\cos(\operatorname{Arctan}(x))$ et $\sin(\operatorname{Arctan}(x))$
- $\tan(\operatorname{Arctan}(x))$ et $\tan(\operatorname{Arccos}(x))$
- Propriétés des fonctions :
 - domaine de définition
 - parité, symétrie de la courbe
 - continuité
 - monotonie
 - dérivabilité et expression des dérivées
- Courbe des fonctions Arctan , Arccos , Arctan .
- Primitive de $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ et de $\left(x \mapsto \frac{1}{1+x^2}\right)$.

Fonction composée ()** : Soit u une fonction réelle et dérivable sur I . Dérivabilité et fonction dérivée de :

$$\begin{aligned} (x \mapsto \operatorname{Arccos}(u(x))) \\ (x \mapsto \operatorname{Arctan}(u(x))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x \mapsto \operatorname{Arctan}(u(x))). \\ (x \mapsto \ln|u(x)|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x \mapsto e^{u(x)}) \\ (x \mapsto u(x)^\alpha) \end{aligned}$$

TOUS LES ENONCES DES DEFINITIONS, PROPRIETES ET THEOREMES DOIVENT ETRE CONNUS.

Question de cours : énoncer une définition et /ou une propriété de cours

OU

énoncer et démontrer les résultats suivants:

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \in \mathbb{N}^*$,
 - ✓ $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
 - ✓ $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)$
 - ✓ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
2. Montrer que $\forall x > 0, \ln(1+x) \leq x$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.
3. Énoncer et démontrer le caractère bijectif de $\ln$ - Déterminer l'expression de sa bijection réciproque et de la dérivée de cette bijection réciproque.
4. Compléter et démontrer : $\forall x \in \dots, \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arccos}(x) = \dots$ et $\forall x \in \dots, \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \dots$
5. Compléter et savoir démontrer :
 - ✓ $\forall x \in \dots, \cos(\operatorname{Arctan}(x)) = \dots$ et $\sin(\operatorname{Arccos}(x)) = \dots$
 - ✓ $\forall x \in \dots, \cos(\operatorname{Arctan}(x)) = \dots$ et $\sin(\operatorname{Arctan}(x)) = \dots$
 - ✓ $\forall x \in \dots, \tan(\operatorname{Arccos}(x)) = \dots$ et $\forall x \in \dots, \tan(\operatorname{Arctan}(x)) = \dots$

+ connaître parfaitement les dérivées usuelles et les composées ()**

+ savoir tracer rapidement ET précisément (avec tangentes particulières, asymptotes et branches paraboliques, points limites) la courbe de chacune des fonctions usuelles.

Pour vous exercer :

<https://view.genially.com/6735b09e44907f45b8213883/interactive-content-courbes-de-fonctions>

+

le tableau ci-dessous (un tableau interactif avec exemples sera mis très bientôt dans cahier de prépa)

$f(x)$	$D_{f'}$	$f'(x)$	u est une fonction dérivable sur E et v est une fonction dérivable sur F .	f est dérivable au moins sur	$f'(x)$
			$v \circ u(x) = v(u(x))$	$x \in E / u(x) \in F$	$u'(x)v'(u(x))$
$ax + b$	$\mathbb{R}$	a	$v(ax + b)$ où a et b constantes réelles.	$\{x \in \mathbb{R} / ax + b \in F\}$	$av'(ax + b)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\sin(u(x))$	E	$u'(x)\cos(u(x))$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\cos(u(x))$	E	$-u'(x)\sin(u(x))$
$\tan(x)$	$D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(u(x))$	$\{x \in E / u(x) \in D_{\tan}\}$	$\frac{u'(x)(1 + \tan^2(u(x)))}{\cos^2(u(x))} = \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$
x^n avec $n \in \mathbb{N}$	Tapez un $\mathbb{R}$	nx^{n-1} si $n \neq 0$ 0 si $n = 0$	$u(x)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	E	$nu'(x)u(x)^{n-1}$
$\sqrt[n]{x}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$	$\mathbb{R}^+$ si n impair $\mathbb{R}^{++}$ si n pair	$\frac{1}{n}x^{n-1}$	$u(x)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{u(x)}$	$\{x \in E / u(x) \in \mathbb{R}^+\}$ ou $\{x \in E / u(x) \in \mathbb{R}^{++}\}$	$\frac{1}{n}u'(x)u(x)^{\frac{1}{n}-1}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ avec $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}^+$	$-\frac{nx^{-n-1}}{x^{n+1}} = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{u(x)^n} = u(x)^{-n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\{x \in E / u(x) \neq 0\}$	$\frac{nu'(x)u(x)^{-n-1}}{u(x)^{n+1}} = n \frac{u'(x)}{u(x)^{n+1}}$
x^α avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^{++}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$u(x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$	$\{x \in E / u(x) > 0\}$	$\alpha u'(x)u(x)^{\alpha-1}$
$ x $	$\mathbb{R}$	$\begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$	$ u(x) $	$\{x \in E / u(x) \neq 0\}$	$\begin{cases} u'(x) \text{ si } u(x) > 0 \\ -u'(x) \text{ si } u(x) < 0 \end{cases}$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}^{++}$	$\frac{1}{x}$	$\ln(u(x))$	$\{x \in E / u(x) > 0\}$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
			$\ln(u(x))$	$\{x \in E / u(x) \neq 0\}$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$e^{u(x)}$	E	$u'(x)e^{u(x)}$
$ch(x)$	$\mathbb{R}$	$sh(x)$	$ch(u(x))$	E	$u'(x)sh(u(x))$
$sh(x)$	$\mathbb{R}$	$ch(x)$	$sh(u(x))$	E	$u'(x)ch(u(x))$
$\text{Arcsin}(x)$	$] -1; 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{Arcsin}(u(x))$	$\{x \in E / -1 < u(x) < 1\}$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
$\text{Arccos}(x)$	$] -1; 1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{Arccos}(u(x))$		$\frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
$\text{Arctan}(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{Arctan}(u(x))$	E	$\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$
			$u(x)^{v(x)}$		$[v'(x)\ln(u(x)) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}]u(x)^{v(x)}$

