Dérivées des fonctions usuelles et de composées

Tableau 1 : fonctions affines et fonctions circulaires

Tableau 2 : fonctions puissances

Tableau 3 : logarithme, exponentielle
et fonctions hyperboliques

Tableau 4 : fonctions circulaires réciproques

Tableau 1 : fonctions affines et fonctions circulaires

Sommaire

$f(x)$	$D_{f'}$	$f'(x)$	$f(x)$; u est une fonction dérivable sur E et v est une fonction dérivable sur F.	f est dérivable au moins sur …..	$f'(x)$	Exemple
			$v \circ u(x) = v(u(x))$	$x \in E/u(x) \in F\}$	$u'(x)v'(u(x))$	
$ax+b$	$\mathbb{R}$	a	$v(ax+b)$ où a et b constantes réelles.	$\{x \in \mathbb{R}/ax+b \in F\}$	$av'(ax+b)$	
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\sin(u(x))$	E	$u'(x)\cos(u(x))$	$\sin(\sqrt{3x-1})$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\cos(u(x))$	E	$-u'(x)\sin(u(x))$	$\cos(\ln(x))$
$\tan(x)$	$D_{tan} = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$	$1+tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$	$\tan(u(x))$	$\{x \in E/u(x) \in D_{tan}\}$	$u'(x)(1+tan^2(u(x)) = \frac{u'(x)}{cos^2(u(x))}$	$\sqrt{x}\tan(Arcsin(x))$

Tableau 2 : fonctions puissances

Sommaire

$f(x)$	$D_{f'}$	$f'(x)$	$f(x)$; u est une fonction dérivable sur E et v est une fonction dérivable sur F.	f est dérivable au moins sur	$f'(x)$	Exemple
x^n avec $n \in \mathbb{N}$	Tapez un $\mathbb{R}$	nx^{n-1} si $n \neq 0$ 0 si $n = 0$	$u(x)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	E	$nu'(x)u(x)^{n-1}$	$\frac{Arctan^3(x)}{\tan^4(x)}$
$\sqrt[n]{x}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$	$\mathbb{R}^*$ si n impair $\mathbb{R}^{+*}$ si n pair	$\frac{1}{n}x^{n-1}$	$u(x)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{u(x)}$	$\{x \in E / u(x) \in \mathbb{R}^*\}$ ou $\{x \in E / u(x) \in \mathbb{R}^{+*}\}$	$\frac{1}{n}u'(x)u(x)^{\frac{1}{n}-1}$	$\sqrt[6]{1 + Arcsin^2(x)}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ avec $n \in x^n$	$\mathbb{R}^*$	$-nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{u(x)^n} = u(x)^{-n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\{x \in E / u(x) \neq 0\}$	$nu'(x)u(x)^{-n-1} = n\frac{u'(x)}{u(x)^{n+1}}$	$\frac{1}{\ln^5(x)}$
x^α avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$u(x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$	$\{x \in E / u(x) > 0\}$	$\alpha u'(x)u(x)^{\alpha-1}$	$\frac{1}{Arccos^\pi(x)}$

Tableau 3 : logarithme, exponentielle et fonctions hyperboliques

Sommaire

$f(x)$	$D_{f'}$	$f'(x)$	$f(x)$; u est une fonction dérivable sur E et v est une fonction dérivable sur F.	f est dérivable au moins sur	$f'(x)$	Exemple
$\|x\|$	$\mathbb{R}$	$\begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$	$\|u(x)\|$	$\{x \in E / u(x) \neq 0\}$	$\begin{cases} u'(x) \text{ si } u(x) > 0 \\ -u'(x) \text{ si } u(x) < 0 \end{cases}$	$\|\sqrt[3]{1-2x}Arcsin(x)\|$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{1}{x}$	$\ln(u(x))$	$\{x \in E / u(x) > 0\}$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(Arctan(x))$
			$\ln(\|u(x)\|)$	$\{x \in E / u(x) \neq 0\}$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(\|tan(x)\|)$
e^X	$\mathbb{R}$	e^x	$e^{u(x)}$	E	$u'(x)e^{u(x)}$	$x \times e^{\frac{x}{x^2-1}}$
$ch(x)$	$\mathbb{R}$	$sh(x)$	$ch(u(x))$	E	$u'(x)sh(u(x))$	$\frac{Arccos(x)}{ch(\cos(x))}$
$sh(x)$	$\mathbb{R}$	$ch(x)$	$sh(u(x))$	E	$u'(x)ch(u(x))$	$\sqrt{1-4x^2}sh(Arcsin(x)$

Tableau 4 : fonctions circulaires réciproques

Sommaire

$f(x)$	$D_{f'}$	$f'(x)$	$f(x)$; u est une fonction dérivable sur E et v est une fonction dérivable sur F.	f est dérivable au moins sur …..	$f'(x)$	Exemple
$Arcsin(x)$	$]-1;1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Arcsin(u(x))$	$\{x \in E / -1 < u(x) < 1\}$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$	$\sqrt{2}^x \times Arcsin(x^{\sqrt{2}})$
$Arccos(x)$	$]-1;1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Arccos\,(u(x))$	$\{x \in E / -1 < u(x) < 1\}$	$\frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$	$Arccos\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$
$Arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$Arctan(u(x))$	E	$\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$	$\tan\left(\frac{1}{x}\right) \times Arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

Tout d'abord, $\sin(\sqrt{1-3x})$ $existe$ $\Leftrightarrow 1-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, \frac{1}{3}\right]$. Donc, $f: (x \mapsto \sin(\sqrt{1-3x}))$ est définie sur $Df = \left]-\infty, \frac{1}{3}\right]$.

Puis f est continue sur Df car son expression n'est constituée que de fonctions continues sur leur propre domaine de définition.

Ensuite, dans l'expression de f , seule la racine n'est pas dérivable sur tout son domaine de définition mais uniquement sur $\mathbb{R}^{+*}$. Or, $\forall x \in \left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$, $1-3x \in \mathbb{R}^{+*}$.Donc f est dérivable au moins sur $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$ et $\forall x \in \left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$, $f'(x) = u'(x)\cos(u(x))$ $avec$ $u(x) = \sqrt{1-3x}, u'(x) = -\frac{3}{2\sqrt{1-3x}}$.

Donc, $\forall x \in \left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$, $f'(x) = -\frac{3}{2\sqrt{1-3x}}\cos(\sqrt{1-3x})$.

RQUE : en appliquant le critère de limite du taux d'accroissement , on montrer que le taux d'accroissement de f en $\frac{1}{3}$ a une limite infinie en $\frac{1}{3}$. Et par conséquent, f n'est pas dérivable en $\frac{1}{3}$.

Tableau 1

Tout d'abord, $\cos(\ln(x))$ $existe \Leftrightarrow x > 0$. Donc, $f: (x \mapsto \cos(\ln(x)))$ est définie sur $Df = \mathbb{R}^{+*}$.

Puis f est continue et dérivable sur Df car son expression n'est constituée que de fonctions continues et dérivables sur leur propre domaine de définition.

et $\forall x \in Df, f'(x) = ln'(x)\,(-\sin(ln(x)) = -\frac{1}{x}\sin(\ln(x))$.

Tableau 1

Tout d'abord,

$$\sqrt{x}\tan(Arcsin(x))\ existe\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \in [-1;1] \\ \forall k \in \mathbb{Z}, Arcsin(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0;1] \\ Arcsin(x) \neq \pm\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0;1[.$$

Donc, $f : (x \mapsto \sqrt{x}\tan(Arcsin(x)))$ est définie sur $Df = [0;1[$

Puis f est continue sur Df car son expression n'est constituée que de fonctions continues sur leur propre domaine de définition. Enfin, dans l'expression de f , seules les fonctions racine carrée et $Arcsin$ ne sont pas dérivables sur tout leur propre domaine de définition mais la fonction racine carrée n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^{+*}$et la fonction $Arcsin$ n'est dérivable que sur $]-1\,;1[$. Par conséquent, f est dérivable au moins sur $]0,1[$ et $\forall x \in]0,1[, f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$$avec \begin{cases} u(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \\ u'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases} et \begin{cases} v(x) = \tan(Arcsin(x)) \\ v'(x) = Arcsin'(x)\tan'(Arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(1 + tan^2(Arcsin(x))) \end{cases}$$

Donc, $\forall x \in]0,1[, f'(x) = \frac{\tan(Arcsin(x))}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}(1 + tan^2(Arcsin(x))$.

RQUE : $\frac{f(x)-(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x}\tan(Arcsin(x))}{x} = \frac{\tan(Arcsin(x))}{\sqrt{x}} = \frac{\tan(Arcsin(x))}{Arcsin(x)}\frac{Arcsin(x)}{x}\sqrt{x}$ donc , en utilisant les taux d'accroissements usuels et un peu de composition, on obtient : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-(0)}{x-0} = 1 \times 1 \times 0 = 0$. Donc f est dérivable en 0 et $Df = Df' = [0,1[$.

Sommaire

Tableau 1

Tableau 2

Tout d'abord, $\frac{Arctan^3(x)}{\tan^4(x)}$ *existe* $\Leftrightarrow \begin{cases} \tan(x) \text{ existe} \\ \tan(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2}+k\pi, k\pi[\cup]k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[.$

Donc, $f : (x \mapsto \frac{Arctan^3(x)}{\tan^4(x)})$ est définie sur $Df = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2}+k\pi, k\pi[\cup]k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[.$

Puis f est continue et dérivable sur Df car son expression n'est constituée que de fonctions continues et dérivables sur leur propre domaine de définition. et $\forall x \in Df, f(x) = Arctan^3(x) \times (\tan(x))^{-4}$

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \text{ avec}$$

$$\begin{cases} u(x) = Arctan^3(x) \\ u'(x) = 3 \times Arctan'(x) \times Arctan^{3-1}(x) = \frac{3Arctan^2(x)}{1+x^2} \end{cases} \text{et} \begin{cases} v(x) = tan^{-4}(x) \\ v'(x) = -4 \times tan'(x) \times tan^{-4-1}(x) = \frac{-4(1+tan^2(x))}{tan^5(x)} \end{cases}$$

Donc, $\forall x \in Df, f'(x) = \frac{3Arctan^2(x)}{(1+x^2)tan^4(x)} - \frac{4Arctan^3(x)(1+tan^2(x))}{tan^5(x)}.$

Tout d'abord, $\sqrt[6]{1+Arcsin^2(x)}existe \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Arcsin}(x)\ existe \\ \underbrace{1+\text{Arcsin}^{2(x)} \geq 0}_{TJS\ VRAI} \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1;1]$. Donc, $f:(x \mapsto \sqrt[6]{1+Arcsin^2(x)})$ est définie sur $Df = [-1;1]$. Puis f est continue sur Df car son expression n'est constituée que de fonctions continues sur leur propre domaine de définition. Enfin, dans l'expression de f , seules les fonctions racine sixième réelle et $Arcsin$ ne sont pas dérivables sur tout leur propre domaine de définition mais la fonction racine 6ième n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^{+*}$et la fonction $Arcsin$ n'est dérivable que sur $]-1;1[$.Mais Comme $\forall x \in]-1;1[, 1+Arcsin(x) \in \mathbb{R}^{+*}$,on peut affirmer que f est dérivable au moins sur $]-1,1[$

et $\forall x \in]-1;1[,\ f'(x) = \frac{1}{6}u'(x)u(x)^{\frac{1}{6}-1} avec \begin{cases} u(x) = 1+Arcsin^2(x) \\ u'(x) = 2Arcsin'(x)\big(Arcsin(x)\big)^{2-1} = \frac{2Arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}. \end{cases}$

Donc, $\forall x \in]-1;1[,\ f'(x) = \frac{1}{3}\frac{Arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}(1+Arcsin^2(x))^{\frac{5}{6}}}$.

RQUE : en appliquant le critère de limite du taux d'accroissement , on montre que le taux d'accroissement de f en ±1 a une limite infinie en ±1. Et par conséquent, f n'est pas dérivable en 1 ni en -1.

Tableau 2

Tout d'abord, $\frac{1}{\ln{(x)}^5}$ $existe$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln{(x)} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]0;1[\cup]1,+\infty[$. Donc, $f:(x \mapsto \frac{1}{\ln{(x)}^5})$ est définie sur $Df =]0;1[\cup]1,+\infty[$.

Puis f est continue et dérivable sur Df car son expression n'est constituée que de fonctions continues et dérivables sur leur propre domaine de définition.

et $\forall x \in Df, f(x) = (\ln(x))^{-5}$ et $f'(x) = -5ln'(x)\ln(x)^{-5-1} = -\frac{5}{xln(x)^6}$.

Tableau 2

Tout d'abord, $\frac{1}{(\text{Arccso}(\text{x}))^{\pi}}$ *existe* $\Leftrightarrow \begin{cases} Arccos(x)\ existe \\ Arccos(x) > 0 \\ (\text{Arccso}(\text{x}))^{\pi} \neq 0 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car\ Arrcos \\ ne\ s'annule\ qu'en 1\ et \\ est\ toujours\ positive}} x \in [-1,1[$. Donc, $f: (x \mapsto \frac{1}{(\text{Arccso}(\text{x}))^{\pi}})$ est définie sur $Df = [-1,1[$.

Ensuite, f est continue sur Df car son expression n'est constituée que de fonctions continues e sur leur propre domaine de définition.

Enfin, dans l'expression de f , seule la fonction $Arccos$ n'est pas dérivable sur tout son domaine de définition mais uniquement sur $]-1;1[$. Donc, f est au moins dérivable sur $]-1;1[$

et $\forall x \in]-1;1[, f(x) = (\text{Arccso}(\text{x}))^{-\pi}$ *donc* $f'(x) = -\pi \times Arccos'(x)\text{Arccos}(x)^{-\pi-1} = \frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}\text{Arccos}(x)^{\pi+1}}$.

Sommaire

Tableau 3

Tout d'abord, $\left|\sqrt[3]{1-2x}Arcsin(x)\right|$ $existe \iff Arcsin(x)\ existe \iff x \in [-1,1]$.

Donc, $f: (x \mapsto \left|\sqrt[3]{1-2x}Arcsin(x)\right|$) est définie sur $Df = [-1,1]$.

Ensuite, f est continue sur Df car son expression n'est constituée que de fonctions continues sur leur propre domaine de définition.

Enfin, dans l'expression de f , seules les fonctions $Arcsin$, valeur absolue et racine cubique ne sont pas dérivables sur tout leur propre domaine de définition :

- $Arcsin$ n'est dérivable que sur $]-1\,;1[$
- $\sqrt[3]{\ldots}$ n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^*$
- $|\ldots|$ n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^*$

Tableau 3

Or, $1-2x \in \mathbb{R}^* \iff x \neq \frac{1}{2}$; et $Arcsin(x) \in \mathbb{R}^* \iff x \neq \frac{1}{2} et\ x \neq 0$.

Donc, f est dérivable au moins sur $]-1;1[\setminus\{0;\frac{1}{2}\}$.

et $\forall x \in]-1;1[\setminus\{0;\frac{1}{2}\}, f(x) = \begin{cases} g'(x) si\ g(x) > 0 \\ -g'(x) si\ g(x) < 0 \end{cases}$ avec $\begin{cases} g(x) = \sqrt[3]{1-2x}Arcsin(x) \\ g'(x) = -2 \times \frac{1}{3} \times (1-2x)^{\frac{1}{3}-1}Arcsin(x) + \frac{\sqrt[3]{1-2x}\cdot}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$

Donc, $\forall x \in]-1;1[\setminus\{0;\frac{1}{2}\}, f(x) = \begin{cases} \frac{-2}{3}\frac{Arcsin(x)}{(1-2x)^{\frac{2}{3}}} + \frac{\sqrt[3]{1-2x}}{\sqrt{1-x^2}} \quad si\ x \in]0,\frac{1}{2}[\\ \frac{2}{3}\frac{Arcsin(x)}{(1-2x)^{\frac{2}{3}}} + \frac{\sqrt[3]{1-2x}}{\sqrt{1-x^2}} \quad x \in]-1,0[\cup]\frac{1}{2},1[\end{cases}$.

x	-1		0		$\frac{1}{2}$		1
$Arcsin(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$\sqrt[3]{1-2x}$		$+$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Tout d'abord, $\ln(Arctan(x))\ existe \Leftrightarrow Arctan(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0, +\infty[$. Donc, $f : (x \mapsto \ln(Arctan(x)))$ est définie sur $Df =]0, +\infty[$.

Puis f est continue et dérivable sur Df car son expression n'est constituée que de fonctions continues et dérivables sur leur propre domaine de définition.

et $\forall x \in Df, f'(x) = \frac{Arctan'(x)}{Arctan(x)} = \frac{1}{(1+x^2)Arctan(x)}$.

Tableau 3

Tout d'abord, $\ln(|tan(x)|)\ existe \iff \begin{cases} tan(x)\ existe \\ tan(x) \neq 0 \end{cases} \iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2}+k\pi, k\pi[\cup]k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$.

Donc, $f: (x \mapsto \ln(|tan(x)|))$ est définie sur $Df = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2}+k\pi, k\pi[\cup]k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$.

Puis f est continue sur Df car son expression n'est constituée que de fonctions continues sur leur propre domaine de définition. Enfin, dans l'expression de f, seule la fonction valeur absolue n'est pas dérivable sur tout son domaine de définition mais uniquement sur $\mathbb{R}^*$. Or, $\forall x \in Df, \tan(x) \in \mathbb{R}^*$. Par conséquent, f est dérivable sur Df et $\forall x \in Df, f'(x) = \frac{tan'(x)}{tan(x)} = \frac{1+tan^2(x)}{\tan(x)} = cotan(x) + tan(x)$.

Ou encore $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)\tan(x)} = \frac{1}{cos(x)\sin(x)} = \frac{2}{\sin(2x)}$.

Tableau 3

Tout d'abord, $xe^{\frac{x}{x^2-1}}$ $existe \Leftrightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$. Donc, $f: (x \mapsto xe^{\frac{x}{x^2-1}})$ est définie sur $Df = \mathbb{R} \backslash \{\pm 1\}$.

Puis f est continue et dérivable sur Df car son expression n'est constituée que de fonctions continues et dérivables sur leur propre domaine de définition.

et $\forall x \in Df, f'(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}} + x \times \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} \times e^{\frac{x}{x^2-1}} = \frac{x^4-x^3-2x^2-x+1}{(x^2-1)^2} e^{\frac{x}{x^2-1}}$.

Tableau 3

Tout d'abord, $\sqrt{1-x^2} \times sh(Arcsin(x))\ existe \Leftrightarrow \begin{cases} Arcsin(x)\ existe \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1,1]$.

Donc, $f : (x \mapsto \sqrt{1-x^2} sh(Arcsin(x))\,)$ est définie sur $Df = [-1,1]$.

Ensuite, f est continue sur Df car son expression n'est constituée que de fonctions continues sur leur propre domaine de définition.

Enfin, dans l'expression de f , seules les fonctions $Arcsin$ et racine carrée ne sont pas dérivables sur tout leur propre domaine de définition :

- $Arcsin$ n'est dérivable que sur $]-1\,;1[$
- $\sqrt{\ldots}$ n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^{+*}$

Or, $1-x^2 \in \mathbb{R}^{+*} \Leftrightarrow x \in]-1;1[$. Donc, f est dérivable au moins sur $]-1;1[$.

et $\forall x \in]-1\,;1[\,, f'(x) = \frac{1}{2} \times (-2x) \times (1-x^2)^{\frac{1}{2}-1} \times sh\big(Arcsin(x)\big) + \sqrt{1-x^2} \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} ch(Arcsin(x))$

$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} sh\big(Arcsin(x)\big) + ch(Arcsin(x))$.

Sommaire

Tableau 4

Tout d'abord, $\frac{Arccos(x)}{ch(\cos(x))}existe \Leftrightarrow \begin{cases} Arccos(x) existe \\ \underbrace{ch(\cos(x)) \neq 0}_{\substack{tjs\ vrai \\ car\ \forall t, ch(t) \geq 1}} \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1,1]$. Donc, $f : \left(x \mapsto \frac{Arccos(x)}{ch(\cos(x))}\right)$ est définie sur $Df = [-1,1]$.

Ensuite, f est continue sur Df car son expression n'est constituée que de fonctions continues sur leur propre domaine de définition.

Enfin, dans l'expression de f , seule la fonction $Arccos$ n'est pas dérivable sur tout son propre domaine de définition : $Arccos$ n'est dérivable que sur $]-1\,;1[$. Donc f est dérivable au moins sur $]-1\,;1[$.

et $\forall x \in]-1\,;1[.$, $f'(x) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} ch(\cos(x)) - Arccos(x) \times (-\sin(x)) sh(\cos(x))}{\left(ch(\cos(x))\right)^2} = \frac{Arccos(x)\sin(x) sh(\cos(x)) - ch(\cos(x))}{\sqrt{1-x^2}\left(ch(\cos(x))\right)^2}$.

Tableau 3

Tout d'abord, $\sqrt{2}^{\sin(x)} \times Arcsin(x^{\sqrt{2}})\ existe \Leftrightarrow \begin{cases} x^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln(x)} existe \\ -1 \leq x^{\sqrt{2}} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]0,1]$. Donc,

$f: \left(x \mapsto \sqrt{2}^{x} \times Arcsin(x^{\sqrt{2}})\right)$ est définie sur $Df =]0,1]$.

Ensuite, f est continue sur Df car son expression n'est constituée que de fonctions continues sur leur propre domaine de définition.

Enfin, dans l'expression de f , seule la fonction $Arcsin$ n'est pas dérivable sur tout son propre domaine de définition : $Arcsin$ n'est dérivable que sur $]-1\,;1[$. Donc f est dérivable au moins sur $]0\,;1[$.

et $\forall x \in]0\,;1[\,, f(x) = e^{\sin(x)\ln(\sqrt{2})} \times Arcsin(x^{\sqrt{2}}) = e^{\frac{1}{2}\sin(x)\ln(2)} \times Arcsin(x^{\sqrt{2}})$

donc $f'(x) = \frac{\ln(2)}{2}\cos(x)\, e^{\frac{1}{2}\sin(x)\ln(2)} \times Arcsin\left(x^{\sqrt{2}}\right) + e^{\frac{1}{2}\sin(x)\ln(2)} \times \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1} \times Arcsin'(x^{\sqrt{2}})$

donc $f'(x) = \frac{\ln(2)}{2}\cos(x)\, 2^{\frac{\sin(x)}{2}} \times Arcsin\left(x^{\sqrt{2}}\right) + \frac{2^{\frac{\sin(x)+1}{2}} x^{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{1-x^{2\sqrt{2}}}}$.

RQUE : en appliquant le critère de limite du taux d'accroissement , on montre que le taux d'accroissement de f en 1 a une limite infinie en 1. Et par conséquent, f n'est pas dérivable en 1.Tapez une équation ici.

Sommaire

Tableau 4

Tout d'abord,

Tjs vrai

$$Arccos\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\ existe \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ 1+\sqrt{x} \neq 0 \\ -1 \leq \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ -1-\sqrt{x} \leq 1-\sqrt{x} \leq 1+\sqrt{x} \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ -1 \leq 1 \\ 0 \leq 2\sqrt{x} \end{cases} \iff x \geq 0.$$ Donc,

$f : \left(x \mapsto Arccos\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\right)$ est définie sur $Df = \mathbb{R}^+$.

Ensuite, f est continue sur Df car son expression n'est constituée que de fonctions continues sur leur propre domaine de définition.

Enfin, dans l'expression de f , seules les fonctions $Arccos$ et racine carrée ne sont pas dérivables sur tout leur propre domaine de définition :

- $Arccos$ n'est dérivable que sur $]-1\,;1[$
- $\sqrt{\dots}$ n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^{+*}$

Donc, $\left(x \mapsto \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\right)$ est dérivable au moins sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x > 0, \begin{cases} -1 < 1 \\ 0 < 2\sqrt{x} \end{cases}$ donc $-1 < \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} < 1$. Par conséqent, f est dérivable au moins sur $\mathbb{R}^{+*}$. Et, $\forall x > 0$,

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^2} \times \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{(1+\sqrt{x})^2-(1-\sqrt{x})^2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})\sqrt{4\sqrt{x}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})\sqrt{\sqrt{x}}}.$$

RQUE : en appliquant le critère de limite du taux d'accroissement , on montre que le taux d'accroissement de f en 0 a une limite infinie en 0. Et par conséquent, f n'est pas dérivable en 0.

Tableau 4

Tout d'abord, $\tan\left(\frac{1}{x}\right) \times Arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ $existe \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{1}{x} \in D_{tan} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \forall k \in \mathbb{Z}, \frac{1}{x} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \forall k \in \mathbb{Z}, x \neq \frac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi} \end{cases}$.

Donc, $f : (x \mapsto \tan\left(\frac{1}{x}\right) \times Arctan\left(\frac{1}{x}\right)$) est définie sur $Df = \mathbb{R}\backslash\{0; \frac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi} / k \in \mathbb{Z}\}$.

Puis f est continue et dérivable sur Df car son expression n'est constituée que de fonctions continues et dérivables sur leur propre domaine de définition.

et $\forall x \in Df, f'(x) = -\frac{1}{x^2}\left(1 + tan^2\left(\frac{1}{x}\right)\right)Arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \tan\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\left(1 + tan^2\left(\frac{1}{x}\right)\right)Arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \tan\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{1+x^2}\right).$$

o

Sommaire

Tableau 4