

## Corrigé du TD Fonctions Arcsin, Arccos et Arctan

Simplifions  $\alpha = \text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{48}{7}\pi\right)\right)$ . Le cours assure que :  $\text{Arcsin}(\sin(x)) = x \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

**Méthode** : utiliser les propriétés de sinus ( $\forall t \in \mathbb{R}, \sin(t) \stackrel{(*)}{=} \sin(t + 2k\pi) \text{ tq } k \in \mathbb{Z} \text{ et } \sin(t) \stackrel{(**)}{=} \sin(\pi - t)$ ) pour écrire  $\alpha = \text{Arcsin}(\sin(\theta))$  tq  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

$$\alpha = \text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{48}{7}\pi\right)\right) = \text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{42+6}{7}\pi\right)\right) = \text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{6}{7}\pi + 6\pi\right)\right) \stackrel{(*)}{=} \text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{6}{7}\pi\right)\right) \stackrel{(**)}{=} \text{Arcsin}\left(\sin\left(\pi - \frac{6}{7}\pi\right)\right)$$

$$\alpha = \text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) \stackrel{\text{car}}{=} \frac{\pi}{7}.$$

$$\frac{\pi}{7} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Avec la même méthode : simplifions  $a(x) = \text{Arcsin}(\sin x)$  pour  $x \in \left[-\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}\right]$

Soit  $x \in \left[-\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}\right]$ . Alors  $\pi - x \in \left[\pi + \frac{5\pi}{2}, \pi + \frac{7\pi}{2}\right] = \left[\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right]$ . et  $\pi - x - 4\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Donc,  $a(x) = \text{Arcsin}(\sin(x)) \stackrel{(**)}{=} \text{Arcsin}(\sin(\pi - x)) \stackrel{(*)}{=} \text{Arcsin}(\sin(\pi - x - 4\pi)) \stackrel{\text{car}}{=} -3\pi - x$ .

Simplifions  $\beta = \text{Arccos}\left(\sin\left(\frac{36}{5}\pi\right)\right)$

Le cours assure que :  $\text{Arccos}(\cos(x)) = x \Leftrightarrow x \in [0, \pi]$ .

**Méthode** : utiliser la relation,  $\forall t \in \mathbb{R}, \sin(t) \stackrel{(***)}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$  pour obtenir  $\beta = \text{Arccos}(\cos(t))$  puis utiliser les propriétés de cosinus ( $\forall t \in \mathbb{R}, \cos(t) \stackrel{(***)}{=} \cos(t + 2k\pi) \text{ tq } k \in \mathbb{Z} \text{ et } \cos(t) \stackrel{(**)}{=} \cos(-t)$ ) pour écrire  $\beta = \text{Arccos}(\cos(\theta))$  tq  $\theta \in [0, \pi]$ .

$$\beta = \text{Arccos}\left(\sin\left(\frac{36}{5}\pi\right)\right) \stackrel{(***)}{=} \text{Arccos}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{36}{5}\pi\right)\right) = \text{Arccos}\left(\cos\left(\frac{(5-72)\pi}{10}\right)\right) = \text{Arccos}\left(\cos\left(\frac{-67\pi}{10}\right)\right) = \text{Arccos}\left(\cos\left(\frac{(-60-7)\pi}{10}\right)\right) =$$

$$\text{Arccos}\left(\cos\left(-6\pi - \frac{7\pi}{10}\right)\right) \stackrel{(***)}{=} \text{Arccos}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{10}\right)\right) \stackrel{(**)}{=} \text{Arccos}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right)\right) \stackrel{\text{car}}{=} \frac{7\pi}{10}.$$

$$\frac{7\pi}{10} \in [0, \pi]$$

Avec la même méthode simplifions  $b(x) = \text{Arccos}(2\sin^2(x) - 1)$  pour  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Soit  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .  $b(x) = \text{Arccos}(2\sin^2(x) - 1) = \text{Arccos}(-\cos(2x)) \stackrel{\text{car } \forall t \in [0, \pi], \text{Arccos}(-t) = \pi - \text{Arccos}(t)}{=} \pi - \text{Arccos}(\cos(2x))$ . Mais  $2x \in [-\pi, \pi]$ .

1er cas  $2x \in [0, \pi]$  i.e.  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Alors,  $b(x) = \pi - 2x$ .

2ème cas  $2x \in [-\pi, 0]$  i.e.  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ . Alors,  $b(x) = \pi - \text{Arccos}(\cos(2x)) = \pi - \text{Arccos}(\cos(-2x)) = \pi + 2x$ .

$$\text{Ainsi, } b(x) = \begin{cases} \pi - 2x & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \pi + 2x & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]. \end{cases}$$

Simplifions  $\gamma = \text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{58}{13}\pi\right)\right)$ .

Le cours assure que :  $\text{Arctan}(\tan(x)) = x \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ .

**Méthode** : utiliser les propriétés de tangente ( $\forall t \in \mathbb{R}, \tan(t) \stackrel{(*)}{=} \tan(t + k\pi) \text{ tq } k \in \mathbb{Z}$ ) pour écrire  $\beta = \text{Arctan}(\tan(\theta))$  tq  $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ .

$$\gamma = \text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{58}{13}\pi\right)\right) = \text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{52+6}{13}\pi\right)\right) = \text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{6}{13}\pi + 4\pi\right)\right) \stackrel{(*)}{=} \text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{6}{13}\pi\right)\right) \stackrel{\text{car}}{=} \frac{6}{13}\pi.$$

$$\frac{6}{13}\pi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{array}{lll} A(x) = \cos(2\text{Arcsin}(x)) & B(x) = \cos(2\text{Arctan}(x)) & C(x) = \tan(2\text{Arcsin}(x)) \\ D(x) = \sin(2\text{Arccos}(x)) & E(x) = \sin(2\text{Arctan}(x)) & \end{array}$$

**Méthode** : utiliser les formules de trigonométrie pour faire apparaître  $\sin(\text{Arcsin}(x))$ ,  $\cos(\text{Arcsin}(x))$ ,  $\cos(\text{Arccos}(x))$ ,  $\sin(\text{Arccos}(x))$ .

Le cours assure que :  $\forall x \in [-1, 1], \sin(\text{Arcsin}(x)) = x = \cos(\text{Arccos}(x))$ .  $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\text{Arctan}(x)) = x$ .

$$\forall x \in [-1, 1], \sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1 - x^2} = \cos(\text{Arcsin}(x)).$$

$$\bullet D_A = [-1, 1]. \forall x \in [-1, 1], A(x) = \cos(2\text{Arcsin}(x)) \stackrel{\text{car } \cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)}{=} 1 - 2\sin^2(\text{Arcsin}(x)) = 1 - 2x^2.$$

$$\bullet D_B = \mathbb{R}. B(x) = \cos(2\text{Arctan}(x)) = 2\cos^2(\text{Arctan}(x)) - 1 \stackrel{\text{car } \frac{1}{\cos^2(t)} = 1 + \tan^2(t)}{=} \frac{2}{1 + \tan^2(\text{Arctan}(x))} - 1 = \frac{2}{1 + x^2} - 1 = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

$$\bullet D_E = \mathbb{R}. E(x) = \sin(2\text{Arctan}(x)) = 2\sin(\text{Arctan}(x))\cos(\text{Arctan}(x)) \stackrel{\text{car } \sin(t) = \tan(t)\cos(t)}{=} 2\tan(\text{Arctan}(x))\cos^2(\text{Arctan}(x))$$

$$E(x) \stackrel{\text{car } \cos^2(t) = \frac{1}{1 + \tan^2(t)}}{=} \frac{2\tan(\text{Arctan}(x))}{1 + \tan^2(\text{Arctan}(x))} = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

•  $D_C = [-1,1] \setminus \{\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\}$ . En effet,  $C(x)$  existe

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \text{car} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \in [-1,1] \\ \forall k \in \mathbb{Z}, 2\text{Arcsin}(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array} \right. \\ & \text{Arcsin est défini sur } [-1,1] \\ & \text{et} \\ & \text{Arctan est défini sur } \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

$$C(x) \text{ existe} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in [-1,1] \\ \forall k \in \mathbb{Z}, \text{Arcsin}(x) \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in [-1,1] \\ \text{Arcsin}(x) \neq \pm \frac{\pi}{4} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in [-1,1] \\ x \neq \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

$$\text{Soit } x \in [-1,1] \setminus \{\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\}, C(x) = \tan(2\text{Arcsin}(x)) \Leftrightarrow \frac{\sin(2\text{Arcsin}(x))}{\cos(2\text{Arcsin}(x))} \Leftrightarrow \frac{2\sin(\text{Arcsin}(x))\cos(\text{Arcsin}(x))}{1-2\sin^2(\text{Arcsin}(x))} = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}.$$

Etudier le domaine de définition, la périodicité et la parité des fonctions suivantes et représenter ces fonctions :

1.  $m = \sin \circ \text{Arcsin}$ ,  $n = \cos \circ \text{Arccos}$  et  $q = \tan \circ \text{Arctan}$ .

Le cours assure que :  $\forall x \in [-1,1], \sin(\text{Arcsin}(x)) = x = \cos(\text{Arccos}(x))$ .  $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\text{Arctan}(x)) = x$ .

Donc  $m = \text{id}_{[-1,1]} = n$  et Donc  $q = \text{id}_{\mathbb{R}}$ .  $m$  et  $n$  sont définies sur  $[-1,1]$ ,  $q$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , toutes les trois sont impaires.

2.  $f = \text{Arcsin} \circ \sin$ ,  $g = \text{Arccos} \circ \cos$  et  $h = \text{Arctan} \circ \tan$ .

•  $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) \in [-1,1], \cos(x) \in [-1,1]$  Comme  $\text{Arcsin}$  et  $\text{Arccos}$  sont définies sur  $[-1,1]$ ,

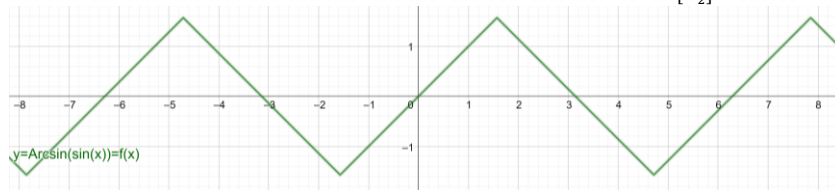
$\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arcsin}(\sin(x))$  et  $\text{Arccos}(\cos(x))$  existent. Ainsi,  $D_f = D_g = \mathbb{R}$ .

Comme  $\text{Arctan}$  est définie sur  $\mathbb{R}$ ,  $\forall x \in D_{\tan}, \text{Arctan}(\tan(x))$  existe. Donc  $D_h = D_{\tan}$ .

•  $\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arcsin}(\sin(x + 2\pi)) = \text{Arcsin}(\sin(x))$  et  $\text{Arcsin}(\sin(-x)) = \text{Arcsin}(-\sin(x)) = -\text{Arcsin}(\sin(x))$ .

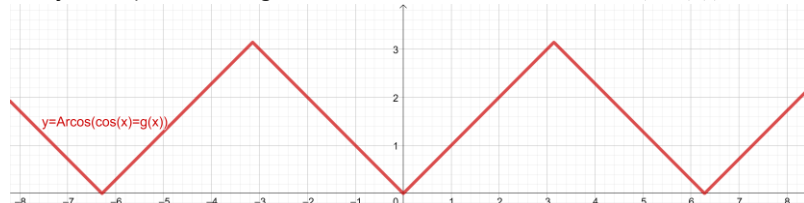
Donc,  $f$  est impaire et  $2\pi$  - périodique. On peut étudier  $f$  sur  $[0, \pi]$ .

Or,  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \text{Arcsin}(\sin(x)) = x$  et  $\forall x \in [\frac{\pi}{2}, \pi], \text{Arcsin}(\sin(x)) = \text{Arcsin}(\sin(\pi - x)) \stackrel{\text{car}}{=} \pi - x$ . D'où la courbe ci-dessous.



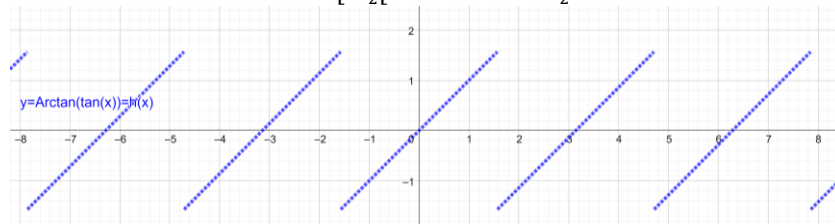
•  $\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arccos}(\cos(x + 2\pi)) = \text{Arccos}(\cos(x))$  et  $\text{Arccos}(\cos(-x)) = \text{Arccos}(\cos(x))$ .

Donc,  $g$  est paire et  $2\pi$  - périodique. On peut étudier  $g$  sur  $[0, \pi]$ . Enfin,  $\forall x \in [0, \pi], \text{Arccos}(\cos(x)) = x$ . D'où la courbe ci-dessous.



•  $\forall x \in D_{\tan}, \text{Arctan}(\tan(x + \pi)) = \text{Arctan}(\tan(x))$  et  $\text{Arctan}(\tan(-x)) = \text{Arctan}(-\tan(x)) = -\text{Arctan}(\tan(x))$ .

Donc,  $h$  est impaire et  $\pi$  - périodique. On peut étudier  $h$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Enfin,  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \text{Arctan}(\tan(x)) = x$ . D'où la courbe ci-dessous.



Le cours assure que  $\forall x \in [-1,1], \cos(\text{Arccos}(x)) = x$  et  $\sin(\text{Arcsin}(x)) = x$

Résoudre  $(E_1)$ :  $9\sin^2(x) - 1 = 0$

$$9\sin^2(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow (3\sin(x) - 1)(3\sin(x) + 1) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = \frac{1}{3} \text{ ou } \sin(x) = -\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\text{Arcsin}\left(\frac{1}{3}\right)\right) \text{ ou } \sin(x) = \sin\left(\text{Arcsin}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \left\{ \begin{array}{l} x = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \text{Arcsin}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \text{Arcsin}\left(-\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \text{Arcsin}\left(-\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \end{array} \right. \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \left\{ \begin{array}{l} x = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \text{Arcsin}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\text{Arcsin}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi + \text{Arcsin}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \end{array} \right.$$

$$\text{Ainsi, } \text{Sol} = \left\{ \text{Arcsin}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi, -\text{Arcsin}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi, \pi - \text{Arcsin}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi, \pi + \text{Arcsin}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\begin{aligned} & \sin(x) = \sin(a) \\ & \Leftrightarrow \\ & \exists k \in \mathbb{Z} / \left\{ \begin{array}{l} x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$(E_2): 3 \sin(5x) - 2 \cos(5x) = 1.$$

Le cours assure que :

pour tout  $a \in [-1, 1]$ ,  $\text{Arccos}(a)$  est l'unique réel de  $[0, \pi]$  dont le cosinus vaut  $a$ .

pour tout  $b \in [-1, 1]$ ,  $\text{Arcsin}(b)$  est l'unique réel de  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  dont le sinus vaut  $b$ .

pour tout  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\text{Arcsin}(c)$  est l'unique réel de  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  dont le sinus vaut  $b$ .

**Méthode** : je reconnais la forme  $A \cos(wx) + B \sin(wx)$  que je transforme sous la forme  $C \sin(wx)$  ou  $C \cos(wx)$  en mettant  $\sqrt{A^2 + B^2}$  en facteur puis en reconnaissant le cosinus et le sinus d'un même angle en facteur de  $\cos(wx)$  et de  $\sin(wx)$ .

$$3 \sin(5x) - 2 \cos(5x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{13} \left( \frac{3}{\sqrt{13}} \sin(5x) - \frac{2}{\sqrt{13}} \cos(5x) \right) = 1 \Leftrightarrow \left( \frac{3}{\sqrt{13}} \sin(5x) - \frac{2}{\sqrt{13}} \cos(5x) \right) = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} & \left( \frac{3}{\sqrt{13}} \right)^2 + \left( \frac{2}{\sqrt{13}} \right)^2 = 1 \\ & \text{Donc } \exists! \theta \in [0, 2\pi] / \cos(\theta) = \frac{3}{\sqrt{13}} \\ & \text{et } \sin(\theta) = \frac{2}{\sqrt{13}} \end{aligned} \quad \cos(\theta) \sin(5x) - \sin(\theta) \cos(5x) = \frac{1}{\sqrt{13}} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(5x - \theta) = \sin\left(\text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \begin{cases} 5x - \theta = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 5x - \theta = \pi - \text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right) + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \begin{cases} x = \frac{\theta}{5} + \frac{1}{5} \text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right) + \frac{2k\pi}{5} \\ \text{ou} \\ x = \frac{\theta}{5} + \frac{\pi}{5} - \frac{1}{5} \text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right) + \frac{2k\pi}{5} \end{cases}$$

Comme  $\cos(\theta) = \frac{3}{\sqrt{13}}$  et  $\sin(\theta) = \frac{2}{\sqrt{13}}$ ,  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  et  $\theta = \text{Arccos}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = \text{Arcsin}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{2}{3}\right)$  convient.

$$\text{Ainsi, Sol} = \left\{ \frac{\text{Arcsin}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)}{5} + \frac{1}{5} \text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right) + \frac{2k\pi}{5}, \frac{\text{Arccos}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)}{5} + \frac{\pi}{5} - \frac{1}{5} \text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right) + \frac{2k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sin(a) \\ \Leftrightarrow & \\ \exists k \in \mathbb{Z} / & \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

$$(E_3): 3 \cos^2(x) - \tan(x) > 3.$$

La fonction  $f: (x \mapsto 3 \cos^2(x) - \tan(x))$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$ . et  $\pi$ -périodique. Cherchons les solutions de  $(E_3)$  sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

$$\text{Soit } x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[. \text{ Alors, } x \text{ sol}^\circ \text{ de } (E_3) \Leftrightarrow 3 \cos^2(x) - \tan(x) > 3 \Leftrightarrow \frac{3}{1 + \tan^2(x)} - \tan(x) > 3$$

$$x \text{ sol}^\circ \text{ de } (E_3) \Leftrightarrow \frac{3}{1 + \tan^2(x)} - \tan(x) > 3 \Leftrightarrow 3 - \tan(x)(1 + \tan^2(x)) > 3(1 + \tan^2(x)) \Leftrightarrow \tan^3(x) + 3 \tan^2(x) + \tan(x) < 0.$$

$$x \text{ sol}^\circ \text{ de } (E_3) \Leftrightarrow \tan(x)[\tan^2(x) + 3 \tan(x) + 1] < 0 \Leftrightarrow \tan(x)[\tan^2(x) + 3 \tan(x) + 1] < 0 \Leftrightarrow \underbrace{\tan(x) \left[ \tan(x) - \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \right] \left[ \tan(x) - \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \right]}_{=h(x)} < 0.$$

Faisons un tableau de signe :

$$\text{Tout d'abord, } \tan(x) - \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} < 0 \Leftrightarrow \tan(x) < \tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right)\right) \Leftrightarrow x < \text{Arctan}\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

De même,  $\tan(x) - \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} < 0 \Leftrightarrow x < \text{Arctan}\left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right)$ . De plus,  $\frac{-3 - \sqrt{5}}{2} < \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} < 0$ . Alors, comme  $\text{Arctan}$  est strictement croissante,  $-\frac{\pi}{2} < \text{Arctan}\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right) < \text{Arctan}\left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right) < 0$ . D'où le tableau :

| $x$                                 | $-\frac{\pi}{2}$ | $\text{Arctan}\left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right)$ | $\text{Arctan}\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right)$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|-------------------------------------|------------------|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|-----|-----------------|
| $\tan(x)$                           | -                | -                                                   | -                                                   | 0   | +               |
| $\tan(x) - \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$ | -                | -                                                   | 0                                                   | +   | +               |
| $\tan(x) - \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ | -                | 0                                                   | +                                                   | +   | +               |
| $h(x)$                              | -                | 0                                                   | +                                                   | 0   | +               |

Donc les solutions de  $(E_3)$  dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  sont les tous les réels de  $]-\frac{\pi}{2}, \text{Arctan}\left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup ]\text{Arctan}\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right), 0[$ . Alors, par périodicité de

$f$ , j'en conclus que les solutions de  $(E_3)$  sont les tous les réels appartenant à un intervalle de la forme de  $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \text{Arctan}\left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right) + k\pi[$  ou de la forme  $]\text{Arctan}\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right) + k\pi, k\pi[$  tel que  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{Ainsi, Sol}(E_3) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[ -\frac{\pi}{2} + k\pi, \text{Arctan}\left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right) + k\pi \cup ]\text{Arctan}\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right) + k\pi, k\pi \right].$$

$$3. \quad r: (x \mapsto \text{Arccos}(\sin(3x))), t: (x \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}\right)), u: (x \mapsto \text{Arccos}\left(1 - 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right))$$

•  $r: (x \mapsto \text{Arccos}(\sin(3x)))$ .  $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(3x) \in [-1, 1]$ . Donc  $D_r = \mathbb{R}$ . De plus,  $r$  est continue sur  $D_r$  car son expression n'est constituée que de fonctions continues sur leur propre domaine de définition.

$r$  est  $\frac{2\pi}{3}$ -périodique car  $r\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \text{Arccos}(\sin(3(x + \frac{2\pi}{3}))) = \text{Arccos}(\sin(3x + 2\pi)) = \text{Arccos}(\sin(3x)) = r(x)$ .

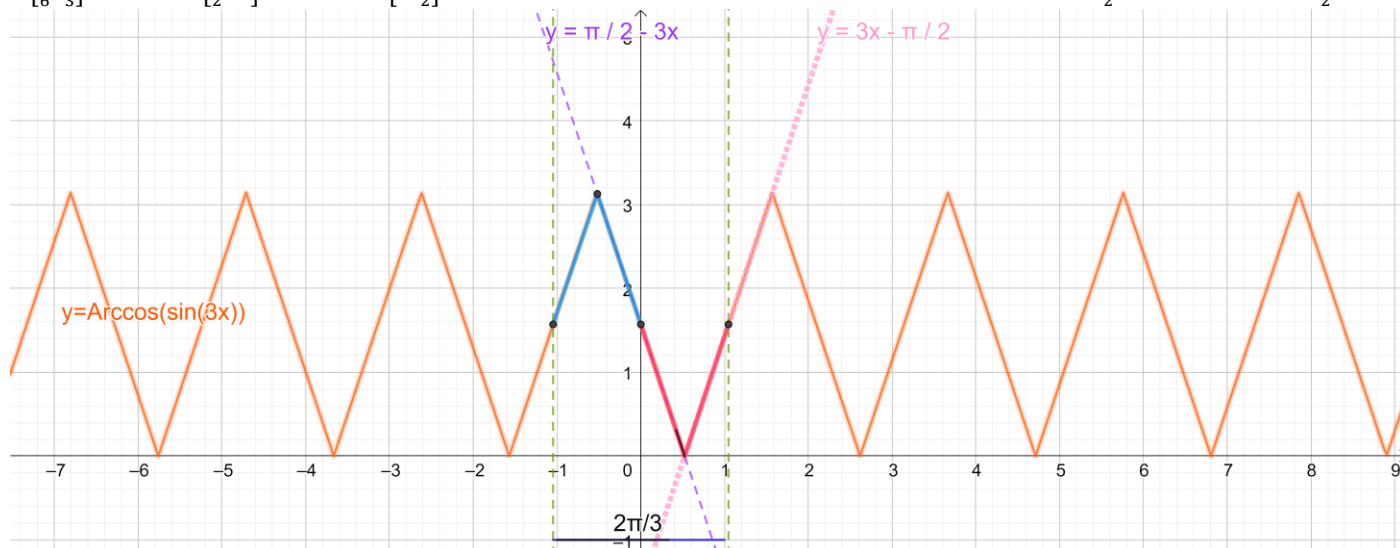
De plus,  $r(-x) = \text{Arccos}(\sin(-3x)) = \text{Arccos}(-\sin(3x)) = \pi - \text{Arccos}(\sin(3x)) = \pi - 3x = \pi - r(x)$ .

Donc,  $\frac{r(-x) + r(x)}{2} = \frac{\pi}{2}$ . Donc Les points  $M(-x)$  et  $M(x)$  sont symétriques par rapport au point  $A\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . On peut donc étudier  $r$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ .

$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right], 3x \in [0, \pi]$  et  $\text{Arccos}(\sin(3x)) = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(\sin(3x))$ .

Si  $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ , alors  $3x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  donc  $\text{Arcsin}(\sin(3x)) = 3x$  et  $r(x) = \frac{\pi}{2} - 3x$ .

Si  $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ , alors  $3x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  et  $\pi - 3x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  donc  $\text{Arcsin}(\sin(3x)) = \text{Arcsin}(\sin(\pi - 3x)) = \pi - 3x$  et  $r(x) = \frac{\pi}{2} - (\pi - 3x) = 3x - \frac{\pi}{2}$ .



•• $t: \left(x \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}\right)\right)$

$t(x)$  existe  $\Leftrightarrow \tan(x)$  existe et  $\tan(x) \neq \pm 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\pm \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$ . Donc,  $D_t = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

$\forall x \in D_t, x + \pi \in D_t$  et  $-x \in D_t$  et  $t(x + \pi) = \text{Arctan}\left(\frac{2 \tan(x + \pi)}{1 - \tan^2(x + \pi)}\right) \stackrel{\text{car } \tan(x + \pi) = \tan(x)}{=} t(x)$

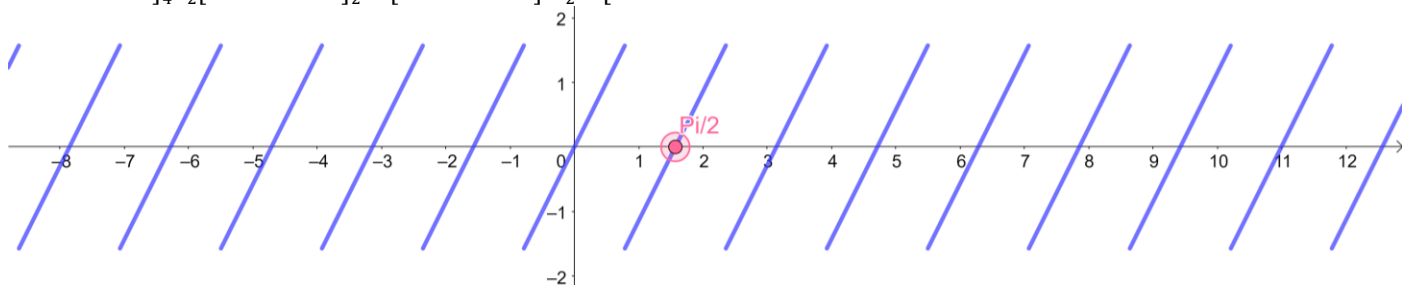
et  $t(-x) = \text{Arctan}\left(\frac{2 \tan(-x)}{1 - \tan^2(-x)}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{-2 \tan(x)}{1 - (-\tan(x))^2}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{-2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}\right) = -\text{Arctan}\left(\frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}\right) = -t(x)$ .

Donc  $t$  est impaire et  $\pi$ -périodique. Etudions donc  $t$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$ .

$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}, \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)} = \tan(2x)$  et  $t(x) = \text{Arctan}(\tan(2x))$  avec  $2x \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ .

1<sup>er</sup> cas :  $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ . Alors,  $2x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et par conséquent,  $t(x) = \text{Arctan}(\tan(2x)) = 2x$ .

2<sup>ème</sup> cas :  $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ . Alors,  $2x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  et  $2x - \pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ ; par conséquent,  $t(x) = \text{Arctan}(\tan(2x)) = \text{Arctan}(\tan(2x - \pi)) = 2x - \pi$

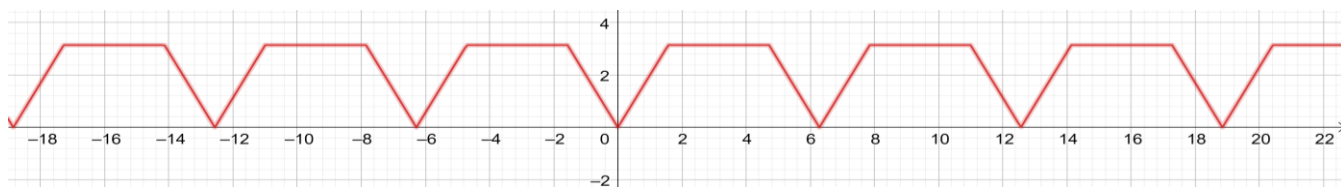


• $f: \left(x \mapsto \text{Arccos}(\cos(x)) + \frac{1}{2} \text{Arccos}(\cos(2x))\right)$

$D_f = \mathbb{R}$ .  $f$  est  $2\pi$ -périodique et paire. Donc on peut étudier  $f$  sur  $[0, \pi]$ .  $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 2x \in [0, \pi]$  donc  $f(x) = x + \frac{1}{2}(2x) = 2x$ .

$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], 2x \in [\pi, 2\pi]$  donc  $f(x) \stackrel{\text{car cos est paire et } 2\pi\text{-p}}{=} x + \frac{1}{2} \text{Arccos}(\cos(-2x + 2\pi)) \stackrel{\text{car } -2x + 2\pi \in [0, \pi]}{=} x + \frac{1}{2}(-2x + 2\pi) = \pi$ .

D'où la courbe suivante :



#### Ex 4 Egalités et inégalités

1. Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $\text{Arcsin}\left(\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}\right) = \text{Arctan}(\text{sh}(x))$ .

2. Montrer que pour tout réel  $x > 0$ ,  $\text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ .

3. Démontrer que  $\forall x \in [-1; 1] \setminus \{0\}, |\text{Arcsin}(x)| < \left|\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right|$

4. Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{1}{(x+1)^2+1} \leq \text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x) \leq \frac{1}{x^2+1}$ . Applications :

a) Montrer que la suite  $u$ , telle que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{1+k^2}$ , est convergente.

b) Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(\text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x)) = 1$ .

5. Montrer que :  $\forall x \in ]0; 1], 2\text{Arcsin}(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2} + \text{Arcsin}(2x - 1) = \pi - 2\text{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$  par deux méthodes : changement de variable et dérivation

1.

**Première méthode par composition :**

Pour tout réel  $x$ ,  $0 \leq |sh(x)| < ch(x)$  donc  $\frac{sh(x)}{ch(x)} \in ]-1; 1[$  et  $\text{Arcsin}\left(\frac{sh(x)}{ch(x)}\right)$  existe et  $\text{Arcsin}\left(\frac{sh(x)}{ch(x)}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Pour tout réel  $x$ ,  $\text{Arctan}(sh(x))$  existe et  $\text{Arctan}(sh(x)) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ . Par conséquent, comme  $\sin$  est injective sur  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , pour prouver que pour tout réel  $x$ ,  $\text{Arcsin}\left(\frac{sh(x)}{ch(x)}\right) = \text{Arctan}(sh(x))$ , il suffit de prouver que pour tout réel  $x$ ,  $\sin\left(\text{Arcsin}\left(\frac{sh(x)}{ch(x)}\right)\right) = \sin\left(\text{Arctan}(sh(x))\right)$ .

Soit  $x$  un réel.  $\sin\left(\text{Arcsin}\left(\frac{sh(x)}{ch(x)}\right)\right) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$  et  $\sin\left(\text{Arctan}(sh(x))\right) = \frac{sh(x)}{\sqrt{1+sh^2(x)}} = \frac{sh(x)}{\sqrt{ch^2(x)}} = \frac{sh(x)}{ch(x)}$ .

$$\text{car } \forall t \in \mathbb{R}, \cos(\text{Arctan}(t)) \stackrel{\substack{\text{car} \\ \text{cas est} \\ \text{positif}}}{=} \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\text{Arctan}(t))}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \text{ et } \sin(\text{Arctan}(t)) = \cos(\text{Arctan}(t)) \times \tan(\text{Arctan}(t)) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \times t.$$

J'en conclus que pour tout réel  $x$ ,  $\text{Arcsin}\left(\frac{sh(x)}{ch(x)}\right) = \text{Arctan}(sh(x))$ .

**Deuxième méthode par étude de fonction**

Posons  $f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{sh(x)}{ch(x)}\right) - \text{Arctan}(sh(x))$ . Montrons que  $f$  est constante égale à 0 sur  $\mathbb{R}$ .

$Df = \mathbb{R}$  car  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq |sh(x)| < ch(x)$  donc  $\frac{sh(x)}{ch(x)} \in ]-1; 1[$ . De plus, dans l'expression de  $f$  seule la fonction  $\text{Arcsin}$  n'est pas dérivable sur tout son domaine de définition mais uniquement sur  $] -1; 1[$ . Or,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{sh(x)}{ch(x)} \in ]-1; 1[$ . Par conséquent,  $f$  est dérivable sur tout  $\mathbb{R}$ . Et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'(x) = \frac{ch^2(x) - sh^2(x)}{ch^2(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{sh(x)}{ch(x)}\right)^2}} - ch(x) \cdot \frac{1}{1 + sh^2(x)} = \frac{1}{ch^2(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{ch^2(x) - sh^2(x)}{ch^2(x)}}} - ch(x) \cdot \frac{1}{1 + sh^2(x)} = \frac{1}{ch^2(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{ch^2(x)}}} - ch(x) \cdot \frac{1}{ch^2(x)} = \frac{1}{ch(x)} - \frac{1}{ch(x)} = 0.$$

Comme  $f'$  est nulle sur tout  $\mathbb{R}$ ,  $f$  est constante sur cet intervalle et par conséquent,  $f(x) = f(0) = 0$ . De plus,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = f(0) = 0$ .

Ainsi, pour tout réel  $x$ ,  $\text{Arcsin}\left(\frac{sh(x)}{ch(x)}\right) = \text{Arctan}(sh(x))$ .

2. Les deux méthodes précédentes s'appliquent ici aussi.

**Troisième méthode par changement de variable.**

Soit  $x > 0$ . Posons  $t = \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ . Alors,  $t \in ]0; \frac{\pi}{2}[$  et  $x = \frac{1}{\tan^2(t)}$ .

$$\text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\tan^2(t)} + 1}}\right) = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1 + \tan^2(t)}{\tan^2(t)}}}\right) = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2(t)\tan^2(t)}}}\right) = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2(t)}}}\right)$$

$$\text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) = \text{Arcsin}(|\sin(t)|) \stackrel{\substack{\text{car} \\ \forall t \in ]0; \frac{\pi}{2}[ , \sin(t) > 0}}{=} \text{Arcsin}(\sin(t)) = t = \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Ainsi, pour  $x > 0$ ,  $\text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ .

3. Soit  $x \in ]-1; 1[ \setminus \{0\}$ . Posons  $t = \text{Arcsin}(x)$ . Alors  $t \in ]0; \frac{\pi}{2}[ \cup ]-\frac{\pi}{2}, 0[$  et  $x = \sin(t)$ .

$$\text{Alors } |\text{Arcsin}(x)| - \left|\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right| = |\text{Arcsin}(\sin(t))| - \left|\frac{\sin(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\right| = |t| - \left|\frac{\sin(t)}{\sqrt{\cos^2(t)}}\right| = |t| - \left|\frac{\sin(t)}{|\cos(t)|}\right| = |t| - \left|\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\right| = |t| - |\tan(t)|.$$

Montrons que  $\forall t \in ]0; \frac{\pi}{2}[ \cup ]-\frac{\pi}{2}, 0[$ ,  $|t| - |\tan(t)| < 0$ . Posons  $\forall t \in ]0; \frac{\pi}{2}[ \cup ]-\frac{\pi}{2}, 0[$ ,  $f(t) = |t| - |\tan(t)|$ . Alors,  $f$  est paire. Il suffit donc de prouver que  $\forall t \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ ,  $f(t) = |t| - |\tan(t)| > 0$ . Or,  $\forall t \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ ,  $\tan(t) > 0$  donc  $f(t) = t - \tan(t)$ . Posons  $\forall t \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ ,  $g(t) = t - \tan(t)$ .  $g$  est dérivable sur  $]0; \frac{\pi}{2}[$  et  $g'(t) = 1 - (1 + \tan^2(t)) = -\tan^2(t) < 0$ . Par conséquent,  $g$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $]0; \frac{\pi}{2}[$ . Comme  $g(0) = 0$ , je peux conclure que,  $\forall t \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ ,  $g(t) < 0$ . J'en déduis tout d'abord que  $\forall t \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ ,  $f(t) = |t| - |\tan(t)| > 0$  puis par parité de  $f$  que  $\forall t \in ]0; \frac{\pi}{2}[ \cup ]-\frac{\pi}{2}, 0[$ ,  $f(t) = |t| - |\tan(t)| > 0$ .

Ainsi,  $\forall x \in ]-1; 1[ \setminus \{0\}$ ,  $|\text{Arcsin}(x)| < \left|\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right|$ .

Attention, on pourrait définir  $f$  en 0 mais à cause des valeurs absolues  $f$  ne serait peut-être pas dérivable en 0. Par contre,  $g$  est dérivable en 0.

4. Posons  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ ,  $f(x) = \text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x) - \frac{1}{(x+1)^2+1}$  et  $g(x) = \text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x) - \frac{1}{x^2+1}$ .

$f$  et  $g$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}^+$  et  $\forall x \geq 0$ ,  $f'(x) = \frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x+2}{((x+1)^2+1)^2}$  et  $g'(x) = \frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x+2}{(x^2+1)^2}$ .

$$f'(x) = \frac{((x+1)^2+1)(1+x^2) - ((1+(x+1)^2)(1+x^2))}{(1+(x+1)^2)(1+x^2)((x+1)^2+1)^2} = \frac{((x+1)^2+1)(1+x^2) - ((1+(x+1)^2)(1+x^2))}{(1+x^2)((x+1)^2+1)^2} = \frac{-3x^2-4x}{(1+x^2)((x+1)^2+1)^2} \leq 0$$

$$g'(x) = \frac{(x^2+1)^2 - (1+x^2)(1+(x+1)^2) + (2x+2)(1+(x+1)^2)}{(1+(x+1)^2)(x^2+1)^2} = \frac{5x^2+6x+3}{(1+(x+1)^2)(x^2+1)^2} \geq 0.$$

Donc  $f$  est décroissante sur l'intervalle  $\mathbb{R}^+$  et  $g$  est croissante sur ce même intervalle. Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ , je peux conclure que  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ ,  $f(x) \geq 0$  et  $g(x) \leq 0$ . Ainsi,  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ ,  $\frac{1}{(x+1)^2+1} \leq \text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x) \leq \frac{1}{x^2+1}$ .

**Applications :**

a) D'après ce qui précède,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{(k+1)^2+1} \leq \text{Arctan}(k+1) - \text{Arctan}(k) \leq \frac{1}{k^2+1}$  et par conséquent, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2+1} \leq \sum_{k=0}^n \text{Arctan}(k+1) - \text{Arctan}(k) \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2+1} = u_n (**)$$

$$\text{Or, } \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2+1} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i^2+1} + \frac{1}{(n+1)^2+1} - 1 = u_n + \frac{1}{(n+1)^2+1} - 1.$$

$$\text{Et } \sum_{k=0}^n \text{Arctan}(k+1) - \text{Arctan}(k) \stackrel{\text{télécopage}}{=} \text{Arctan}(n+1) - \text{Arctan}(0) = \text{Arctan}(n+1).$$

Donc, (\*\*) s'écrit :  $\forall n, u_n + \frac{1}{(n+1)^2+1} - 1 \leq \text{Arctan}(n+1) \leq u_n$ . Par conséquent, :  $\forall n, u_n \leq \text{Arctan}(n+1) + 1 - \frac{1}{(n+1)^2+1} \leq \frac{\pi}{2} + 1$ .

J'en déduis que la suite  $(u_n)$  est majorée. Comme, de plus, cette suite est croissante car  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2+1} > 0$ , j'en conclus que la suite  $(u_n)$  est convergente.

c) Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (\text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x)) = 1$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{1}{(x+1)^2+1} \leq \text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x) \leq \frac{1}{x^2+1} \text{ donc } \forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{x^2}{(x+1)^2+1} \leq x^2 [\text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x)] \leq \frac{x^2}{x^2+1}.$$

Or,  $\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$  et  $\frac{x^2}{(x+1)^2+1} = \frac{1}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ . L'encadrement permet alors d'affirmer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (\text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x)) = 1$ .

#### Ex 5 Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\text{Arcsin}(\sin(x))}{x-\pi}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arccos}(1-x)}{\sqrt{x}} \text{ ou de manière équivalente } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{Arccos}(x)}{\sqrt{1-x}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \text{Arctan}(x \sin(x)) \ln(1 + \text{Arcsin}(e^{-x}))$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\text{Arcsin}(\text{Arctan}(x)) - 1).$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x) \right)^{\frac{1}{\text{Arctan}(x)}}.$$

1. Posons  $f(x) = \text{Arcsin}(\sin(x))$ . Alors  $\frac{\text{Arcsin}(\sin(x))}{x-\pi} = \frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}$  taux d'accroissement de  $f$  en  $\pi$ . Or,  $\sin$  est dérivable en  $\pi$  et  $\text{Arcsin}$  est dérivable en  $0 = \sin(\pi)$ . Donc  $f$  est dérivable en  $\pi$  et  $f'(\pi) = \frac{\cos(\pi)}{\sqrt{1-\sin^2(\pi)}} = -1$ . J'en déduis que  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\text{Arcsin}(\sin(x))}{x-\pi} = -1$ .

2. Soit  $x \in ]0,1[$ . On pose  $t = 2\text{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)$  de sorte que  $x = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} t = 0$ .

$$\frac{\text{Arccos}(1-x)}{\sqrt{x}} = \frac{\text{Arccos}\left(1-2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)}{\sqrt{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}} = \frac{\text{Arccos}(\cos(t))}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{t}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{2 \times \frac{t}{2}}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \sqrt{2} \frac{1}{\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}}.$$

$$\text{Comme } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t}{2} = 0 \\ \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} \stackrel{TA}{=} 1 \end{cases}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\left(\frac{t}{2}\right)} = 1 \text{ et ainsi, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arccos}(1-x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{2}.$$

3.  $(x \mapsto \text{Arctan}(x \sin(x)))$  est bornée car  $\text{Arctan}$  est bornée.

$$\text{De plus, } x \ln(1 + \text{Arcsin}(e^{-x})) = \frac{x}{e^x} \times \frac{\text{Arcsin}(e^{-x})}{e^{-x}} \times \frac{\ln(1 + \text{Arcsin}(e^{-x}))}{\text{Arcsin}(e^{-x})}.$$

$$\text{Comme } \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \stackrel{TA}{=} 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arcsin}(e^{-x}) = 0 \end{cases}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \text{Arcsin}(e^{-x}))}{\text{Arcsin}(e^{-x})} = 1. \text{ De même, comme } \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{Arcsin}(t)}{t} \stackrel{TA}{=} 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \end{cases}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Arcsin}(e^{-x})}{e^{-x}} = 1. \text{ Et enfin, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{CC}{=} 0.$$

Par conséquent,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 + \text{Arcsin}(e^{-x})) = 0$ . J'en déduis, par la propriété de produit d'une fonction bornée par une fonction de limite nulle,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \text{Arctan}(x \sin(x)) \times \ln(1 + \text{Arcsin}(e^{-x})) = 0$ .

4. Posons  $f(x) = x(\text{Arcsin}(\text{Arctan}(x)) - 1)$ .

$$\begin{aligned} \text{Alors } f(x) &= \frac{\text{Arcsin}(\text{Arctan}(x)) - 1}{\text{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2}} x \left[ \text{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2} \right] \stackrel{\text{car } \forall x > 0, \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}}{=} \left[ \frac{\text{Arcsin}(\text{Arctan}(x)) - 1}{\text{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2}} \right] x \left[ -\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \right] \\ &= - \left[ \frac{\text{Arcsin}(\text{Arctan}(x)) - 1}{\text{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2}} \right] \left[ \frac{\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \right] = \end{aligned}$$

$$\text{Comme } \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\text{Arcsin}(t) - 1}{t - \frac{\pi}{2}} \stackrel{TA}{=} +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2} \end{cases}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Arcsin}(\text{Arctan}(x)) - 1}{\text{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2}} = +\infty. \text{ De même, comme } \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan}(t)}{t} \stackrel{TA}{=} 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1.$$

J'en conclus que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

$$5. f(x) = \left( \frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x) \right)^{\frac{1}{\text{Arctan}(x)}} = e^{\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x)\right)}{\text{Arctan}(x)}} = e^{\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x)\right)}{\text{Arctan}(x)}}. \text{ Or, } \frac{\ln\left(\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x)\right)}{\text{Arctan}(x)} = \frac{\ln\left(\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x)\right)}{\left[\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x) - 1\right]} \times \frac{\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x) - 1}{x} \times \frac{x}{\text{Arctan}(x)}. \text{ En utilisant les } \\ \text{taux d'accroissements usuels, et de la composition, j'en conclus que } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{2}{\pi}.$$

#### Ex 6 Etude de fonctions par deux méthodes changement de variables ou dérivation :

$$1. \text{ Soit } f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

a) Déterminer  $Df$ .

b) Soit  $y$  un réel tel que  $x = \tan\left(\frac{y}{2}\right)$  existe. Montrer que :  $\cos(y) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$  et  $\sin(y) = \frac{2x}{1+x^2}$ .

c) En déduire que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \begin{cases} 2\text{Arctan}(x) & \text{si } x \in [-1,1] \\ \pi - 2\text{Arctan}(x) & \text{si } x \in ]1, +\infty[ \\ -\pi - 2\text{Arctan}(x) & \text{si } x \in ]-\infty, -1[ \end{cases}$ .

d) Représenter cette fonction.

e) Retrouver le résultat c) par dérivation.

2. Démontrer que : pour tout réel  $t$ ,  $4\cos^3(t) - 3\cos t = \cos(3t)$ . En déduire une simplification de l'expression et une représentation de la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \text{Arccos}(4x^3 - 3x)$ .

3. Soit  $f: \left(x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right)$ . Représenter la fonction  $f$ .

4. Proposer dans chaque cas un bon changement de variable afin de simplifier l'expression :

$$A(x) = \operatorname{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}) \quad , \quad B(x) = \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}\right) \quad , \quad C(x) = \operatorname{Arccos}(1-2x^2) \quad , \quad D(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

2. Soit  $f(x) = \operatorname{Arccos}(4x^3 - 3x)$ .

1. Déterminer  $Df$ .

$$f(x) \text{ existe} \Leftrightarrow -1 \leq 4x^3 - 3x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^3 - 3x + 1 \geq 0 \text{ et } 4x^3 - 3x - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(4x^2 - 4x + 1) \geq 0 \text{ et } (x-1)(4x^2 + 4x + 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(2x-1)^2 \geq 0 \text{ et } (x-1)(2x+1)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x \geq -1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}\right) \text{ et } \left(x \leq 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \in [-1, 1].$$

J'en conclus que  $Df = [-1, 1]$ .

2. Montrer que  $Cf$  a un centre de symétrie.

$$\forall x \in [-1, 1], -x \in [-1, 1] \text{ et } f(-x) = \operatorname{Arccos}(4(-x)^3 - 3(-x)) = \operatorname{Arccos}(-4x^3 + 3x)$$

$$f(-x) = \pi - \operatorname{Arccos}(4x^3 - 3x) = \pi - f(x). \text{ Alors } \forall x \in [-1, 1], \begin{cases} \frac{x+(-x)}{2} = 0 \\ \frac{f(x)+f(-x)}{2} = \frac{\pi}{2} \end{cases}; \text{ autrement dit, le point } A\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ est le milieu du}$$

segment d'extrémités  $M(x, f(x))$  et  $M'(-x, f(-x))$ . Par conséquent,  $Cf$  est symétrique par rapport au point  $A\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

3. Montrer que  $f$  est dérivable au moins sur  $Df \setminus \{-1, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$  et  $\forall x \in Df \setminus \{-1, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}, f'(x) = -\frac{(4x^2-1)}{|4x^2-1|} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ .

$f$  est continue sur  $Df$  car son expression n'est constituée que de fonctions continues sur leur domaine de définition respectif.

Dans l'expression de  $f$ , seule la fonction  $\operatorname{Arccos}$  n'est pas dérivable sur tout son domaine de définition :  $\operatorname{Arccos}$  n'est dérivable que sur  $] -1, 1[$ .

Or,  $\forall x \in [-1, 1], \left[-1 < 4x^3 - 3x < 1 \Leftrightarrow \left(x \neq -1 \text{ et } x \neq \frac{1}{2} \text{ et } x \neq 1 \text{ ou } x \neq -\frac{1}{2}\right)\right]$ . Par conséquent,  $f$  est dérivable au moins sur

$$Df \setminus \{-1, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\} \text{ et } \forall x \in Df \setminus \{-1, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\},$$

$$f'(x) = -\frac{12x^2-3}{\sqrt{1-(4x^3-3x)^2}} = -\frac{3(4x^2-1)}{\sqrt{(1-4x^3+3x)(1+4x^3-3x)}} = -\frac{3(4x^2-1)}{\sqrt{-(x+1)(2x-1)^2(x-1)(2x+1)^2}} = -\frac{3(4x^2-1)}{\sqrt{-(x+1)(x-1)}|2x-1||2x+1|} = -\frac{3(4x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{|4x^2-1|}. \text{ Ainsi}$$

$$f'(x) = -\frac{(4x^2-1)}{|4x^2-1|} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4. En déduire une autre expression de  $f$ .

$$\forall x \in Df \setminus \left\{-1, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}, |4x^2 - 1| = \begin{cases} 4x^2 - 1 & \text{si } 4x^2 - 1 > 0 \text{ i.e. si } x \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[ \cup \left]\frac{1}{2}, 1\right[ \\ -4x^2 + 1 & \text{si } 4x^2 - 1 < 0 \text{ i.e. si } x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[ \end{cases}.$$

$$\text{Donc, } f'(x) = \begin{cases} -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[ \cup \left]\frac{1}{2}, 1\right[ \\ \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[ \end{cases} = \begin{cases} 3\operatorname{Arccos}'(x) & \text{si } x \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[ \cup \left]\frac{1}{2}, 1\right[ \\ -3\operatorname{Arccos}'(x) & \text{si } x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[ \end{cases}.$$

Par conséquent,  $f$  et  $3\operatorname{Arccos}$  sont deux primitives d'une même fonction  $\left(x \mapsto -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)$  sur l'intervalle  $\left]-1, -\frac{1}{2}\right[$ . Il existe donc une constante réelle  $c_1$  telle que :  $\forall x \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[, f(x) = 3\operatorname{Arccos}(x) + c_1$ .

De même, il existe deux réels  $c_2$  et  $c_3$  telles que  $\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, f(x) = -3\operatorname{Arccos}(x) + c_2$  et  $\forall x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[, f(x) = 3\operatorname{Arccos}(x) + c_3$ .

Comme  $f$  et  $\operatorname{Arccos}$  sont continues en  $-1$ ,  $c_1 = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) - 3\operatorname{arccos}(x) = f(-1) - 3\operatorname{Arccos}(-1) = -2\operatorname{Arccos}(-1) = -2\pi$ .

Comme  $f$  et  $\operatorname{Arccos}$  sont continues en  $1$ ,  $c_3 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - 3\operatorname{arccos}(x) = f(1) - 3\operatorname{Arccos}(1) = -2\operatorname{Arccos}(1) = 0$ .

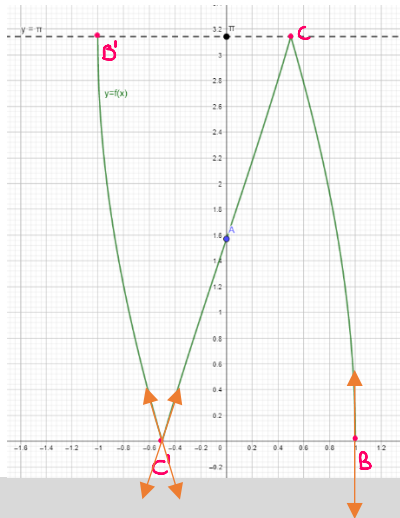
Et,  $c_2 = f(0) + 3\operatorname{Arccos}(0) = 4\operatorname{Arccos}(0) = 4\frac{\pi}{2} = 2\pi$ .

De plus  $f$  est continue en  $-\frac{1}{2}$  et en  $\frac{1}{2}$ . Donc,  $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = 3\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\pi$  et  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = 3\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right)$ .

$$\text{Ainsi, } \forall x \in [-1, 1], f(x) = \begin{cases} 3\operatorname{Arccos}(x) - 2\pi & \text{si } x \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[ \\ -3\operatorname{Arccos}(x) + 2\pi & \text{si } x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[ \\ 3\operatorname{Arccos}(x) & \text{si } x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[ \end{cases}.$$

5. Tracer  $Cf$  dans un repère orthonormé.





## 6. Etudier la dérivabilité de $f$ en $-1, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ .

Il semble graphiquement que  $f$  ne soit dérivable en aucun de ces quatre points. Démontrons-le :

$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \tau_1(x) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{3\text{Arccos}(x)}{x-1} = 3 \frac{\text{Arccos}(x)}{x-1}$ . Donc,  $\lim_{x \rightarrow 1} \tau_1(x) = -\infty$ . Il en résulte que  $f$  n'est pas dérivable en 1 et  $Cf$  a une tangente verticale au point  $B(1,0)$ . Comme  $Cf$  est symétrique par rapport à  $A$ ,  $f$  n'est pas dérivable non plus  $(-1)$  et  $Cf$  a une tangente verticale au point  $B'(-1,\pi)$ .

$\forall x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[ \tau_1(x) = \frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} = \frac{3\text{Arccos}(x)-\pi}{x-\frac{1}{2}} = 3 \frac{\text{Arccos}(x)-\frac{\pi}{3}}{x-\frac{1}{2}}$ . Donc,  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \tau_1(x) = 3\text{Arccos}'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ .

$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[ \tau_1(x) = \frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} = \frac{-3\text{Arccos}(x)+2\pi-\pi}{x-\frac{1}{2}} = -3 \frac{\text{Arccos}(x)-\frac{\pi}{3}}{x-\frac{1}{2}}$ . Donc,  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \tau_1(x) = -3\text{Arccos}'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

$\tau_1$  n'a donc pas de limite en  $\frac{1}{2}$ .

J'en déduis que  $f$  n'est pas dérivable en  $\frac{1}{2}$ . Par contre,  $Cf$  a deux demi-tangentes au point  $C\left(\frac{1}{2}, \pi\right)$  : l'une (à droite) de pente  $-\frac{2}{\sqrt{3}}$  et l'autre (à gauche) de pente  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ . Comme  $Cf$  est symétrique par rapport à  $A$ ,  $f$  n'est pas dérivable non plus  $(-\frac{1}{2})$  et  $Cf$  a deux demi-tangentes au point  $C'\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ .

## 7. Démontrer que : pour tout réel $t$ , $4\cos^3(t) - 3\cos t = \cos(3t)$ .

Soit  $t$  un réel.

$$\cos^3(t) = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3it} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-3it}) = \frac{1}{8}(2\cos(3t) + 6\cos(t)) = \frac{1}{4}(\cos(3t) + 3\cos(t))$$

Par conséquent,  $4\cos^3(t) - 3\cos t = \cos(3t)$

## 8. Retrouver, par changement de variable, l'expression de $f$ obtenue la question 4.

Soit  $x \in [-1, 1]$ .

Posons  $t = \text{Arccos}(x)$ . Alors  $t \in [0, \pi]$  et  $x = \cos(t)$ .

Par conséquent,  $f(x) = f(\cos(t)) = \text{Arccos}(4\cos^3(t) - 3\cos(t)) = \text{Arccos}(\cos(3t))$  avec  $3t \in [0, 3\pi]$

1<sup>er</sup> cas :  $3t \in [0, \pi]$  i.e.  $t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$  i.e.  $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ . Alors  $f(x) = 3t = 3\text{Arccos}(x)$ .

2<sup>ème</sup> cas :  $3t \in ]\pi, 2\pi[$  i.e.  $t \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[$  i.e.  $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ . Alors  $f(x) = \text{Arccos}(\cos(3t - 2\pi)) = \text{Arccos}(\cos(2\pi - 3t)) \stackrel{\text{car}}{=} 2\pi - 3t = 2\pi - 3\text{Arccos}(x)$

3<sup>ème</sup> cas :  $3t \in [2\pi, 3\pi]$  i.e.  $t \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$  i.e.  $x \in \left[-\frac{1}{2}, -1\right]$ . Alors  $f(x) = \text{Arccos}(\cos(3t - 2\pi)) \stackrel{\text{car}}{=} 3t - 2\pi = 3\text{Arccos}(x) - 2\pi$

Ainsi, on retrouve le résultat précédent à savoir :  $\forall x \in [-1, 1], f(x) = \begin{cases} 3\text{Arccos}(x) - 2\pi & \text{si } x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \\ -3\text{Arccos}(x) + 2\pi & \text{si } x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[ \\ 3\text{Arccos}(x) & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$

0,

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1.  $\text{Arccos}(\sin(x)) = \frac{5\pi}{9}$

2.  $\text{Arcsin}(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)$

3.  $\text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{3}$

4.  $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x\sqrt{3}) = \frac{7\pi}{12}$

5.  $\text{Arcsin}(\tan(x)) = x$

6.  $\text{Arccos}(x) = \text{Arcsin}(2x)$   
 7.  $\text{Arcsin}(2x) - \text{Arcsin}(x\sqrt{3}) = \text{Arcsin}(x)$ .  
 8.  $\text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{2}$ .

1. Pour tout réel  $x$ ,  $\sin(x) \in [-1, 1]$  donc  $\text{Arccos}(\sin(x))$  existe. De plus,  $\frac{5\pi}{9} \in [0, \pi]$  donc  $\text{Arccos}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)\right) = \frac{5\pi}{9}$ . Par conséquent,

$$\text{Arccos}(\sin(x)) = \frac{5\pi}{9} \Leftrightarrow \text{Arccos}(\sin(x)) = \text{Arccos}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)\right) \underset{\substack{\text{car Arccos} \\ \text{est injective}}}{\Leftrightarrow} \sin(x) = \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{9}\right) \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(-\frac{\pi}{18}\right) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x = -\frac{\pi}{18} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi + \frac{\pi}{18} + 2k\pi.$$

$$\text{Ainsi, } \text{Sol} = \left\{-\frac{\pi}{18} + 2k\pi, \frac{19\pi}{18} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2. Comme  $\text{Arcsin}$  est à valeurs dans  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , l'équation n'a de solution que si  $\text{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  et la cas échéant, cette solution sera unique et vaut  $\sin\left(\text{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$  puisque  $\text{Arcsin}$  est bijective de  $[-1, 1]$  sur  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  et de bijection réciproque  $\sin$ .

Regardons si  $\text{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  :  $\left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{3}{4} = \frac{64-75}{100} < 0$  donc  $0 < \frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Alors par stricte croissance de  $\text{Arcsin}$ ,  $\text{Arcsin}(0) < \text{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right) < \text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  i.e.  $0 < \text{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right) < \frac{\pi}{3}$ . De même,  $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ , donc par stricte croissance de  $\text{Arctan}$ ,  $0 < \text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) < \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  i.e.  $0 < \text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{6}$ . Par conséquent,  $0 < \text{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ .

J'en déduis que la seule solution de notre équation est  $\sin\left(\text{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ . Simplifions l'expression de cette solution :

$$\begin{aligned} \sin\left(\text{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)\right) &\stackrel{\substack{\text{formule d'addition} \\ \text{du sinus}}}{=} \sin\left(\text{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right)\right) \cos\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)\right) + \cos\left(\text{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right)\right) \sin\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)\right) \\ &= \frac{4}{5} \cos\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)\right) + \cos\left(\text{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right)\right) \sin\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)\right) \\ &= \frac{4}{5} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}} + \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}} \quad \text{car } \forall t \in \mathbb{R}, \cos(\text{Arcsin}(t)) = \sqrt{1-t^2} \text{ et } \cos(\text{Arctan}(t)) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \text{ et } \sin(\text{Arctan}(t)) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ &\quad \text{car } \cos \text{ est positif sur } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \\ &= \frac{4}{5} \frac{1}{\sqrt{\frac{10}{9}}} + \sqrt{\frac{9}{25} - \frac{16}{25}} \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{10}{9}}} = \frac{12}{5\sqrt{10}} + \frac{3}{5\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}. \text{ Ainsi, } \text{Sol} = \left\{\frac{3}{\sqrt{10}}\right\}. \end{aligned}$$

3.  $\text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$  existe  $\Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} \in [-1, 1] \Leftrightarrow -1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow -1-x^2 \leq 2x \leq 1+x^2 \Leftrightarrow \underbrace{(1-x)^2 \geq 0 \text{ et } (1+x)^2 \geq 0}_{\text{tjs vrai}}.$

Comme pour tout réel  $x$ ,  $(1-x)^2 \geq 0$  et  $(1+x)^2 \geq 0$ , pour tout réel  $x$ ,  $\text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$  existe. De plus,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . Comme  $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , il n'est pas impossible que notre équation admette des solutions.. Cherchons ces solutions :

$$\text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{3} \underset{\text{car}}{\Leftrightarrow} \text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{3}x^2 - 4x + \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3} \text{ ou } x = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Ainsi, } \text{Sol} = \left\{\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}.$$

4. La fonction  $f: (x \mapsto \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x\sqrt{3}))$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  (comme de deux fonctions strictement croissantes) donc  $f$  est injective et par conséquent, l'équation admet au plus une solution. Or,  $f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$ . Donc 1 est l'unique solution de notre équation. Donc,  $\text{Sol} = \{1\}$ .

**Autre méthode**

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x\sqrt{3}) = \frac{7\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x\sqrt{3})) = \tan\left(\frac{7\pi}{12}\right) \\ \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x\sqrt{3}) \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x\sqrt{3})) = \tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \\ \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x\sqrt{3}) \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\tan(\text{Arctan}(x)) + \tan(\text{Arctan}(x\sqrt{3}))}{1 - \tan(\text{Arctan}(x))\tan(\text{Arctan}(x\sqrt{3}))} = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} \\ \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x\sqrt{3}) \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+x\sqrt{3}}{1-x^2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} \\ \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x\sqrt{3}) \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}) = (\sqrt{3}+1)(1-x^2\sqrt{3}) \\ \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x\sqrt{3}) \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3+\sqrt{3})x^2 - 2x - (\sqrt{3}+1) = 0 \\ \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x\sqrt{3}) \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[ \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 4 + 4(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+3) = 28 + 16\sqrt{3} = 4(7+4\sqrt{3}) = 2^2(2+\sqrt{3})^2. \\ x_1 &= \frac{2 - 2(2+\sqrt{3})}{2(3+\sqrt{3})} = \frac{-2(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ x_2 &= \frac{2 + 2(2+\sqrt{3})}{2(3+\sqrt{3})} = \frac{2(3+\sqrt{3})}{2(3+\sqrt{3})} = 1. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x\sqrt{3}) \in ]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[ \quad (**) \end{cases}$$

Or,  $\text{Arctan}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + \text{Arctan}(-1) < 0$  donc  $x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$  ne vérifie pas (\*\*). En revanche,  $\text{Arctan}(1) + \text{Arctan}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12} \in ]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$ . Ainsi,  $x = 1$  est solution et d'après l'étude précédente, est la seule solution. Donc, **Sol = {1}**.

5.  $\text{Arccos}(x)$  et  $\text{Arcsin}(2x)$  existent si et seulement si  $\begin{cases} x \in [-1, 1] \\ 2x \in [-1, 1] \end{cases}$  si et seulement si  $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ . Désormais,  $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ . Si  $\frac{\text{Arccos}(x)}{\in [0, \pi]} = \frac{\text{Arcsin}(2x)}{\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$  alors

$$\text{Arccos}(x) \in [0, \pi] \cap \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } \text{Arcsin}(2x) \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \cap [0, \pi] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ par conséquent, } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Désormais,  $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ . Alors,

$$\text{Arccos}(x) = \text{Arcsin}(2x) \Leftrightarrow \sin(\text{Arccos}(x)) = \sin(\text{Arcsin}(2x)) \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 2x \Leftrightarrow 1-x^2 = 4x^2 \Leftrightarrow x = \frac{\pm 1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

car sin est injective sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  car  $x \geq 0$

Donc, **Sol =  $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$ .**

9.  $\text{Arcsin}(2x) - \text{Arcsin}(x\sqrt{3}) = \text{Arcsin}(x)$ .

10. Soit  $f(x) = \text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x+1)$ .

Alors  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ ; en effet,  $\text{Arctan}$ ,  $(x \mapsto x-1)$ , et  $(x \mapsto x+1)$  sont tritement croissantes et la composée ou la somme de fonctions strictement croissantes est strictement croissante.

Donc  $f$  est injective et par conséquent, l'équation  $\frac{\pi}{2}$  admet au plus un antécédent i.e. l'équation  $f(x) = \frac{\pi}{2}$  admet au plus une solution. De plus,  $f$  est continue sur l'intervalle  $\mathbb{R}$ . Donc le TBCSM assure que  $f(\mathbb{R}) = ]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f[ = ]\frac{-3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$  et  $f$  est bijective de  $\mathbb{R}$  sur  $]\frac{-3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ . Alors,  $\frac{\pi}{2}$  admet donc un unique antécédent par  $f$  i.e. l'équation  $f(x) = \frac{\pi}{2}$  admet exactement une solution  $a$ . Comme  $f(0) = 0 < f(a)$  et  $f(1) = \text{Arctan}(1) + \text{Arctan}(2) > \text{Arctan}(1) + \text{Arctan}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{2} > f(a)$ . Donc  $a \in ]0, 1[$ . Déterminons cette solution  $a$ :

$$\text{Arctan}(a-1) + \text{Arctan}(a) + \text{Arctan}(a+1) = \frac{\pi}{2}. \text{ Donc } \text{Arctan}(a) + \text{Arctan}(a+1) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(a-1) \quad (**).$$

Comme  $a \in ]0, 1[$ ,  $a-1 \in ]-1, 0[$  donc  $\frac{-\pi}{4} < \text{Arctan}(a-1) < 0$  donc  $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(a-1) < \frac{3\pi}{4}$ . Et par conséquent, d'après (\*\*),

$\text{Arctan}(a) + \text{Arctan}(a+1) \in ]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}[$ . Alors  $\tan(\text{Arctan}(a) + \text{Arctan}(a+1))$ ,  $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(a-1)\right)$  existent et

$$\tan(\text{Arctan}(a) + \text{Arctan}(a+1)) = \frac{\tan(\text{Arctan}(a)) + \tan(\text{Arctan}(a+1))}{1 - \tan(\text{Arctan}(a))\tan(\text{Arctan}(a+1))} = \frac{2a+1}{1-a(a+1)} = \frac{2a+1}{1-a^2-a}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(a-1)\right) = \frac{1}{\tan(\text{Arctan}(a-1))} = \frac{1}{a-1}. \text{ Alors en appliquant } \tan \text{ dans l'égalité } (**), \text{ j'obtiens : } \frac{2a+1}{1-a^2-a} = \frac{1}{a-1}. \text{ Donc,}$$

$$(a-1)(2a+1) = 1-a-a^2 \text{ puis } 3a^2 = 2. \text{ Donc, } a = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ puisque } a > 0. \text{ Ainsi, } \text{Sol} = \left\{\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}.$$

6. Montrer que :  $\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

7. Montrer que :  $\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$ .

8. Trouver une relation entre  $\text{Arctan}(\sqrt{3}) + \text{Arctan}(1)$  et  $\text{Arctan}(-2 - \sqrt{3})$ .

9. Montrer que :  $\frac{\pi}{4} + \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) = 4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$ .

1. Comme  $a = \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  et  $b = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  se trouvent dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , l'injectivité de  $\sin$  sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  permet alors d'affirmer que :  $a = b$  si et seulement si  $\sin(a) = \sin(b)$ .

$$\text{Or, } \sin(b) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Et, } \sin(a) = \sin\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \stackrel{\substack{= \\ \text{car} \\ a = \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \\ \text{donc } \sin(a) \geq 0}}}{=} \sqrt{1 - \cos^2\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)} \stackrel{\substack{= \\ \text{car} \\ \text{pour tout } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \\ 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}}}{=} \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \tan^2\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)}} = \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

J'en conclus que  **$a = b$ .**

2. Tout d'abord,  $\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \underbrace{\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)}_{\text{ce que nous allons prouver}} = \frac{\pi}{4} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right).$

Posons  $a = \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$  et  $b = \frac{\pi}{4} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)$ . Pour prouver que  $a = b$ , je vais prouver que  $a$  et  $b$  sont dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et que  $\tan(a) = \tan(b)$ . L'injectivité de  $\tan$  sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  permettra alors de conclure.

Comme  $0 < \frac{1}{8} < \frac{1}{5} < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$  et que  $\text{Arctan}$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , on a :

$$\text{Arctan}(0) < \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) < \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) < \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) < \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ i.e. } 0 < \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) < \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) < \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{\pi}{6}.$$

Méthode à retenir.

Par conséquent,  $0 < \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$  et  $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{4} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ . Ainsi,  $a$  et  $b$  sont dans  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ .

Et par conséquent,  $\tan(a)$  et  $\tan(b)$  existent. De plus,  $\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ ,  $\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)$ ,  $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$  et  $\tan\left(-\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)\right)$  existent, donc nous pouvons appliquer la formule d'addition de  $\tan$  à savoir «  $\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$  dès que  $\tan(x)$ ,  $\tan(y)$  et  $\tan(x+y)$  existent ».

$$\text{Alors, } \tan(a) = \frac{\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)}{1 - \tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \times \tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}} = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{7}{9}. \text{ Et } \tan(b) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(-\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)\right)}{1 - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \tan\left(-\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)\right)} = \frac{1 - \frac{1}{8}}{1 - 1 \times \left(-\frac{1}{8}\right)} = \frac{\frac{7}{8}}{1 + \frac{1}{8}} = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{9}{8}} = \frac{7}{9}.$$

Nous pouvons donc conclure que  $a = b$  par injectivité de  $\tan$  sur  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ .

3.  $\operatorname{Arctan}(\sqrt{3}) + \operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$ . Comme  $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ ,  $\tan\left(\operatorname{Arctan}(\sqrt{3})\right)$  et  $\tan\left(\operatorname{Arctan}(1)\right)$  existent, la formule d'addition de  $\tan$  assure que :

$$\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\tan\left(\operatorname{Arctan}(\sqrt{3})\right) + \tan\left(\operatorname{Arctan}(1)\right)}{1 - \tan\left(\operatorname{Arctan}(\sqrt{3})\right) \times \tan\left(\operatorname{Arctan}(1)\right)} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \stackrel{\text{quantité conjuguée}}{=} \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{1^2 - \sqrt{3}^2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3}.$$

Par conséquent,  $\operatorname{Arctan}(-2 - \sqrt{3}) = \operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$ . Mais  $\frac{7\pi}{12} \notin ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ . Donc,  $\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right) \neq \frac{7\pi}{12}$ .

Par contre,  $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{7\pi}{12} - \pi\right) = \tan\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$  et  $-\frac{5\pi}{12} \in ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ . Ainsi,,

$$\operatorname{Arctan}(-2 - \sqrt{3}) = \operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right) = \operatorname{Arctan}\left(\tan\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right) = -\frac{5\pi}{12} = \frac{7\pi}{12} - \pi = \operatorname{Arctan}(\sqrt{3}) + \operatorname{Arctan}(1) - \pi.$$

4.  $0 < \frac{1}{5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$  donc  $0 < \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{\pi}{6}$  et par suite,  $0 < 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{\pi}{3}$ ,  $\tan\left(2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)$  existe et par conséquent, on peut appliquer la formule d'angle double de  $\tan$  «  $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$  dès que  $\tan(x)$  et  $\tan(2x)$  existent » :

$$\tan\left(2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{2\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)}{1 - \tan^2\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)} = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{2}{5} \times \frac{25}{24} = \frac{5}{12} \neq 1.$$

Donc,  $2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) \neq \frac{\pi}{4}$  donc  $4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) \neq \frac{\pi}{2}$ . De plus,  $0 < 4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{4\pi}{5} = \frac{2\pi}{3}$ . Donc  $\tan\left(4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)$  existe et par la formule

$$\text{d'angle double, } \tan\left(4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{2\tan\left(2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)}{1 - \tan^2\left(2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)} = \frac{2 \times \frac{5}{12}}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{119}{144}} = \frac{5}{6} \times \frac{144}{119} = \frac{120}{119}.$$

$0 < 4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{4\pi}{5} = \frac{2\pi}{3}$ . Donc  $-\frac{\pi}{4} < 4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4} < \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ . Donc,  $\tan\left(4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}\right)$  existe et puisque  $\tan\left(4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)$  et  $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$  existent, la formule d'addition de  $\tan$  assure que :

$$\tan\left(4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\left(4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan\left(4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right) \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{\frac{1}{119}}{\frac{239}{119}} = \frac{1}{239} = \tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)\right).$$

Donc,  $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$  et  $4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}$  ont la même tangente et se trouvent dans  $]0, \frac{\pi}{2} [$ , intervalle sur lequel la fonction tangente est injective ( car strictement croissante). J'en déduis que  $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) = 4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}$  i.e.  $\frac{\pi}{4} + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) = 4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$ .

**Ex 9** On pose  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ .

1. Montrer que si  $n$  est pair alors  $\forall x \geq 0, P_{n+1}(x) \leq \operatorname{Arctan}(x) \leq P_n(x)$ .

2. En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |\operatorname{Arctan}(x) - P_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$ .

Soit  $n$  un entier pair. Posons  $\varphi(x) = \operatorname{Arctan}(x) - P_n(x)$  et  $\beta(x) = \operatorname{Arctan}(x) - P_{n+1}(x)$ .

$P_{n+1}$  et  $P_n$ , étant polynomiales, sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  et  $\operatorname{Arctan}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  ( d'après le cours). Donc,  $\varphi$  et  $\beta$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$ . Et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} (2k+1)x^{2k} = \frac{1}{1+x^2} - \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2} - \underbrace{\sum_{k=0}^n (-x^2)^k}_{\text{somme géométrique}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1 - (-x^2)}$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} + \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2} = \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)}}{1+x^2} \stackrel{\text{car } n+1 \text{ impair}}{=} -\frac{(x^2)^{(n+1)}}{1+x^2} < 0.$$

Donc  $\varphi$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ . Comme  $\varphi(0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^+, \varphi(x) \leq 0$ .

De même,  $\beta'(x) = \frac{(-1)^{n+2} x^{2(n+2)}}{1+x^2} \stackrel{\text{car } n+2 \text{ pair}}{=} \frac{(x^2)^{(n+2)}}{1+x^2} > 0$ . Donc  $\beta$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Comme  $\beta(0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^+, \beta(x) \leq 0$ .

J'en conclus que si  $n$  est pair alors  $\forall x \geq 0, P_{n+1}(x) \leq \operatorname{Arctan}(x) \leq P_n(x)$ .

3. En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |\operatorname{Arctan}(x) - P_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$ .

Avec l'étude précédente, on peut aussi conclure que si  $n$  est impair alors  $\forall x \geq 0, P_n(x) \leq \operatorname{Arctan}(x) \leq P_{n+1}(x)$ .

Donc, si  $n$  est pair alors  $\forall x \geq 0, P_{n+1}(x) - P_n(x) \leq \text{Arctan}(x) - P_n(x) \leq 0$  i.e.  $-\frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leq \text{Arctan}(x) - P_n(x) \leq 0$  et si  $n$  est impair alors  $\forall x \geq 0, P_{n+1}(x) - P_n(x) \geq \text{Arctan}(x) - P_n(x) \geq 0$  i.e.  $\frac{x^{2n+3}}{2n+3} \geq \text{Arctan}(x) - P_n(x) \geq 0$ .

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0, -\frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leq \text{Arctan}(x) - P_n(x) \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$  i.e.  $|\text{Arctan}(x) - P_n(x)| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \stackrel{\text{car } x \geq 0}{=} \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$ .

Alors,  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \leq 0, -x \geq 0$  donc  $|\text{Arctan}(-x) - P_n(-x)| \leq \frac{|-x|^{2n+3}}{2n+3}$  i.e.  $|\text{Arctan}(x) + P_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$  et comme  $|-t| = |t|$ , on peut conclure que  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \leq 0, |\text{Arctan}(x) - P_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$ .

Ainsi,  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |\text{Arctan}(x) - P_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$ .

**Ex 10** 1. a. Montrer que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \left| \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} \right| \leq 1$ .

b. Montrer que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{Arccos}\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}\right) = \frac{\text{sgn}(x+y)}{\text{signe de } (x+y)} (\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y))$ .

2. Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

- Montrer que  $xy < 1 \Rightarrow \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) = \text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ .
- Montrer que  $xy > 1$  et  $x > 0 \Rightarrow \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) = \text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + \pi$ .
- Montrer que  $xy > 1$  et  $x < 0 \Rightarrow \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) = \text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) - \pi$ .

$$\begin{aligned} 1. \text{ Soit } x \text{ et } y \text{ deux réels. } \left| \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} \right| \leq 1 &\Leftrightarrow |1-xy| \leq \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} \Leftrightarrow 1-2xy+x^2y^2 \leq (1+x^2)(1+y^2) \\ &\Leftrightarrow -2xy-x^2-y^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -(x+y)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Comme l'inégalité  $-(x+y)^2 \leq 0$  est toujours vraie, l'inégalité  $\left| \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} \right| \leq 1$ , qui lui est équivalente, est toujours vraie.

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\cos\left(\text{Arccos}\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}\right)\right) = \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Et, } \cos\left[\frac{\text{sgn}(x+y)}{\text{signe de } (x+y)} (\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y))\right] &\stackrel{\text{car cos est paire}}{=} \cos(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)) \\ &= \cos(\text{Arctan}(x))\cos(\text{Arctan}(y)) - \sin(\text{Arctan}(x))\sin(\text{Arctan}(y)) \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right] = \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \cos\left(\text{Arccos}\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}\right)\right) = \cos\left[\frac{\text{sgn}(x+y)}{\text{signe de } (x+y)} (\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y))\right].$$

$$a = \text{Arccos}\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}\right) \in [0, \pi] \text{ et } b = \frac{\text{sgn}(x+y)}{\text{signe de } (x+y)} (\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)) \in ]-\pi, \pi[.$$

Si  $x + y > 0$  alors  $x > -y$  donc  $\text{Arctan}(x) > \text{Arctan}(-y) = -\text{Arctan}(y)$  et  $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) > 0$ .

Par conséquent, si  $x + y > 0$ , alors  $\frac{\text{sgn}(x+y)}{\text{signe de } (x+y)} (\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)) \in [0, \pi[$ . Comme  $\cos$  est injective sur  $[0, \pi]$  et  $a$  et  $b$  sont deux réels de  $[0, \pi]$  qui ont le même cosinus, je peux conclure que  $a = b$ .

Si  $x + y < 0$  alors  $x < -y$  donc  $\text{Arctan}(x) < \text{Arctan}(-y) = -\text{Arctan}(y)$  et  $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) < 0$ .

Par conséquent, si  $x + y < 0$ , alors  $\frac{\text{sgn}(x+y)}{\text{signe de } (x+y)} (\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)) \in ]-\pi, 0]$ . Comme  $\cos$  est injective sur  $[0, \pi]$  et  $a$  et  $b$  sont deux réels de  $[0, \pi]$  qui ont le même cosinus, je peux conclure que  $a = b$ .

2. Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Posons  $a = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)$  et  $b = \text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ . Alors  $a \in ]-\pi, \pi[$  et  $b \in ]-\pi/2, \pi/2[$ .

$$\text{Si } \tan(a) \text{ existe alors } \tan(a) = \tan(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)) = \frac{\tan(\text{Arctan}(x)) + \tan(\text{Arctan}(y))}{1 - \tan(\text{Arctan}(x))\tan(\text{Arctan}(y))} = \frac{x+y}{1-xy} = \tan(b).$$

**Supposons  $xy < 1$ .**

- Ou bien  $y = 0$  et dans ce cas,  $a = \text{Arctan}(x) = \text{Arctan}\left(\frac{x}{1}\right) = b$
- Ou bien  $y > 0$  et  $x \geq 0$  et dans ce cas,  $0 \leq x < \frac{1}{y}$  et  $\text{Arctan}(x) \geq 0$  et  $\text{Arctan}(y) > 0$ .

Alors, par stricte croissance de  $\text{Arctan}$ ,  $0 \leq \text{Arctan}(x) < \text{Arctan}\left(\frac{1}{y}\right) \stackrel{\text{prop.de Arctan}}{=} \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(y)$ . Donc  $0 < \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) < \frac{\pi}{2}$ .

Donc  $\tan(a)$  existe.

Comme  $a$  et  $b$  sont dans  $]0, \frac{\pi}{2}[$  et  $\tan$  est injective sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$  et  $\tan(a) = \tan(b)$ , j'en conclus que  $a = b$ .

J'en conclus que  $a = b$ .

Ou bien  $y > 0$  et  $x \leq 0$  et dans ce cas  $-\frac{\pi}{2} < \text{Arctan}(x) \leq 0$  et  $\frac{\pi}{2} > \text{Arctan}(y) > 0$ . Donc  $-\frac{\pi}{2} < \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) < \frac{\pi}{2}$ . Donc  $\tan(a)$  existe. Comme  $a$  et  $b$  sont dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et  $\tan$  est injective sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et  $\tan(a) = \tan(b)$ , J'en conclus que  $a = b$ .

- Ou bien  $y < 0$  et  $x \leq 0$ . Alors  $-y > 0$  et  $-x \geq 0$  et  $(-x)(-y) < 1$ . Par conséquent,  $\text{Arctan}(-x) + \text{Arctan}(-y) = \text{Arctan}\left(\frac{-x-y}{1-(-x)(-y)}\right)$  donc  $-\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(y) = -\text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-(-x)(-y)}\right)$ . Ainsi,  $a = b$ .

On montre, de même, que : si  $y < 0$  et  $x \geq 0$  alors  $a = b$ .

**Supposons  $xy > 1$  et  $x > 0$ .**

Alors  $y > 0$  et  $x > \frac{1}{y} > 0$  donc  $\frac{\pi}{2} > \text{Arctan}(x) > \text{Arctan}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(y)$ . Donc,  $\pi > a > \frac{\pi}{2}$ . Donc  $\tan(a)$  existe.

Alors,  $\tan(b) = \tan(a) = \tan(a - \pi)$ . Comme  $a - \pi$  et  $b$  sont dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et  $\tan$  est injective sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et  $\tan(a - \pi) = \tan(b)$ , J'en conclus que  $a - \pi = b$ . Et ainsi,  $a = \pi + b$ .

**Supposons  $xy > 1$  et  $x < 0$ .**

Alors  $y < 0$  et  $x < \frac{1}{y} < 0$  donc  $\text{Arctan}(x) < \text{Arctan}\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(y)$ . Donc,  $-\pi < a < -\frac{\pi}{2}$ . Donc  $\tan(a)$  existe.

Alors,  $\tan(b) = \tan(a) = \tan(a + \pi)$ . Comme  $a + \pi$  et  $b$  sont dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et  $\tan$  est injective sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et  $\tan(a + \pi) = \tan(b)$ , J'en conclus que  $a + \pi = b$ . Et ainsi,  $a = b - \pi$ .