DL 4 corrigé

Ex 1

A. Soit $f: I \to J$, $g: J \to K$ et $h: K \to L$ des applications telles que : $h \circ g$ bijective de J sur L et $g \circ f$ bijective de I sur K. BUT : prouver que f, g et h sont bijectives.

1. Montrer que g est bijective de J sur K.
2. Ecrire f à l'aide de $g \circ f$ et g^{-1}. En déduire, par un résultat de cours, que f est bijective de I sur J.
3. Faire de même pour h.

1. $h \circ g$ est bijective de J sur L donc $h \circ g$ est injective sur J. Alors d'après le cours, g injective sur J.

$g \circ f$ est bijective de J sur L donc $g \circ f$ est surjective de J sur L. Alors d'après le cours, g surjective sur de J sur K.
J'en déduis que g est bijective de de J sur K et par suite, que g^{-1} existe et g^{-1} est une bijection de K sur J.

2. Alors, $f = id_F \circ f \underbrace{=}_{\substack{car \\ g^{-1}\circ g = id_F}} (g^{-1} \circ g) \circ f \underbrace{=}_{\substack{car\ la\ composition \\ est\ associative}} g^{-1} \circ (g \circ f)$. Comme $g \circ f$ est une bijection de I sur K et g^{-1} est une bijection de K sur J et que la composée de bijections est une bijection, j'en déduis que f est bijective de I sur J.
3. Alors, $h = h \circ id_K = h \circ (g \circ g^{-1}) = (h \circ g) \circ g^{-1}$. Comme $h \circ g$ est une bijection de J sur L et g^{-1} est une bijection de K sur J et que la composée de bijections est une bijection, j'en déduis que h est bijective de K sur L.

B. Soit $f: E \to E\ et\ g: E \to E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f = id_E$.

1. Justifier que $f\ et\ g$ sont bijectives de E sur E.
2. En déduire que $f \circ g = g \circ f$.
3. Exprimer g en fonction de f^{-1}.

1. et 3. id_E est bijective donc injective et surjective. Donc, $f \circ (g \circ f)$ i.e. $(f \circ g) \circ f$ est injective et surjective. Comme $f \circ (g \circ f)$ est surjective, on peut affirmer, d'après la propriété de cours «si $u \circ v$ est surjective alors u est surjective.», que f est surjective. Comme $(f \circ g) \circ f$est injective, je peux affirmer, d'après la propriété de cours «si $u \circ v$ est injective alors v est injective.», que f est injective. Ainsi, f est bijective de E sur E. Alors, $f^{-1} existe$ et est bijective de E sur E.
g=$(f^{-1} \circ f) \circ g \circ (f \circ f^{-1}) = f^{-1} \circ (f \circ g \circ f) \circ f^{-1} = f^{-1} \circ id_E \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f^{-1}$.Comme f^{-1}est bijective de E sur E et la composée de bijections est une bijection, g est bijective de E sur E.
2. $f \circ g = f \circ (f^{-1} \circ f^{-1}) = (f \circ f^{-1}) \circ f^{-1} = f^{-1}$ et $g \circ f = (f^{-1} \circ f^{-1}) \circ f = f^{-1} \circ (f^{-1} \circ f) = f^{-1}$. Donc, $g \circ f = f \circ g$.

Ex 2 . Soit $a \in \mathbb{C}\ et\ T_a$ l'application définie sur $\mathbb{C} \backslash \{a + 3i\}$ et à valeurs complexes par : $T_a(z) = \frac{(1-a)z + 2(1-i)}{z - a - 3i}$.

1. Montrer que T_a est constante si et seulement si $a \in \{1 - 2i, -i\}$. Déterminer le cas échéant, la valeur de cette constante.

Désormais , on suppose que le complexe a est distinct de $1 - 2i$ et de$-i$. Autrement dit, T_a n'est pas constante.

2. Montrer que T_a réalise une bijection de $\mathbb{C} \backslash \{a + 3i\}$ sur $\mathbb{C} \backslash \{d\}$, où d est un nombre complexe à préciser et décrire $T_a{}^{-1}$.
3. Montrer qu'il existe un complexe b tel que : $T_a{}^{-1} = T_b$. Vous exprimerez b en fonction de a.
4. On prend ici $a = 2$. U est l'ensemble des complexes de module 1.
   Décrire géométriquement $D = \left\{\frac{M(z)}{z} \in T_a{}^{-1} \langle U \rangle\right\} et\ K = \left\{\frac{M(z)}{z} \in T_a{}^{-1} \langle i\mathbb{R} \rangle\right\}$
5. On prend ici $a = i$. Décrire géométriquement $L = \{M(z)/z \in T_a(\mathbb{R})\}$.

1. T_a est constante $\Rightarrow T_a(0) = T_a(3i) \Rightarrow \frac{2(1-i)}{-a-3i} = \frac{(1-a)3i + 2(1-i)}{3i - a - 3i} \Rightarrow (2 - 2i)(-a) = (-a - 3i)(-3ia + 2 + i)$
   $\Rightarrow 3ia^2 - (9 + 3i)a + 3 - 6i = 0 \Rightarrow ia^2 - (3 + i)a + 1 - 2i = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\Delta = 2i = (1+i)^2 \\ a_1 = \frac{3+i-(1+i)}{2i} = \frac{2}{2i} = -i \\ a_2 = \frac{3+i+(1+i)}{2i} = \frac{2+i}{i} = (-i)(2+i) = 1-2i}} a = a_1\ ou\ a = a_2$.

   Réciproquement,

   si $a = a_1$ alors $\forall z, T_{a_1}(z) = \frac{(1+i)z + 2(1-i)}{z + i - 3i} = \frac{(1+i)\left[z + \frac{2(1-i)}{1+i}\right]}{z + i - 3i} \underbrace{=}_{car\ \frac{2(1-i)}{1+i} = \frac{2(1-i)^2}{|1+i|^2} = -\frac{4i}{2} = -2i} (1 + i)\frac{[z - 2i]}{z - 2i} = (1 + i)$.Donc T_{a_1}est constante.

   Si $a = a_2$ alors $\forall z, T_{a_2}(z) = \frac{(2i)z + 2(1-i)}{z - 1 - i} = \frac{(2i)\left[z + \frac{(1-i)}{i}\right]}{z - 1 - i} \underbrace{=}_{car\ \frac{(1-i)}{i} = -i(1-i) = -1-i} (2i)\frac{z - 1 - i}{z - 1 - i} = 2i$.Donc T_{a_2}est constante.

   J'en conclus que T_a est constante si et seulement si $a \in \{1 - 2i, -i\}$.

2. Désormais $a \notin \{1-2i, -i\}$ et T_a n' est pas constante.
Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Cherchons tous les antécédents de ω par T_a en résolvant l'équation $T_a(z) = \omega$ d'inconnue z complexe.
Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{a+3i\}$.

$$z \text{ est un antécédent de } \omega \text{ par } T_a \Leftrightarrow T_a(z) = \omega \Leftrightarrow \frac{(1-a)z + 2(1-i)}{z-a-3i} = \omega \Leftrightarrow (1-a)z + 2(1-i) = \omega(z-a-3i)$$

$$\Leftrightarrow (1-a)z - \omega z = -2(1-i) - \omega(a+3i) \Leftrightarrow [1-a-\omega]z = -2(1-i) - \omega(a+3i)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{-2(1-i) - \omega(a+3i)}{[1-a-\omega]} \text{ si } \omega \neq 1-a \\ 0 = -2(1-i) - (1-a)(a+3i) \text{ si } \omega = 1-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{-2(1-i) - \omega(a+2i)}{1-a-\omega} \text{ si } \omega \neq 1-a \\ a^2 + (3i-1)a - 2 - i = 0 \text{ si } \omega = 1-a \end{cases}$$

$$\underset{\substack{\text{en multipliant} \\ \text{la 2ème ligne} \\ \text{par } i}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} z = \dfrac{-2(1-i) - \omega(a+3i)}{1-a-\omega} \text{ si } \omega \neq 1-a \\ ia^2 + (-i-3)a - 2i + 1 = 0 \text{ si } \omega = 1-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{-2(1-i) - \omega(a+3i)}{1-a-\omega} \text{ si } \omega \neq 1-a \\ \underbrace{a = a_1 \text{ ou } a = a_2}_{\text{impossible}} \text{ si } \omega = 1-a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{-2(1-i) - \omega(a+3i)}{1-a-\omega} \text{ si } \omega \neq 1-a \\ \text{impossible si } \omega = 1-a \end{cases}$$

Donc tout complexe $\omega \neq 1-a$ admet un et un seul antécédent $\frac{-2(1-i)-\omega(a+3i)}{1-a-\omega}$ par T_a. Mais $\omega = 1-a$ n'a pas d'antécédent par T_a. J'en conclus que T_a est bijective de $\mathbb{C}\backslash\{a+3i\}$ sur $\mathbb{C}\backslash\{1-a\}$. Et $\forall\omega \in \mathbb{C}\backslash\{1-a\}, T_a^{-1}(\omega) = \frac{-2(1-i)-\omega(a+3i)}{1-a-\omega}$.

3. $b + 3i = 1 - a \Leftrightarrow b = 1 - 3i - a$. Posons $b = 1 - 3i - a$.
Alors, $a = 1 - 3i - b$ et $\forall\omega \in \mathbb{C}\backslash\{b+3i\}, \omega \in \mathbb{C}\backslash\{1-a\}$ et
$T_a^{-1}(\omega) = \frac{-2(1-i)-\omega(a+3i)}{1-a-\omega} = \frac{-2(1-i)-\omega(1-3i-b+3i)}{b+3i-\omega} = \frac{-2(1-i)-\omega(1-b)}{b+3i-\omega} = \frac{\omega(1-b)+2(1-i)}{\omega-(b+3i)} = T_b(\omega)$. Ainsi, $T_a^{-1} = T_b$.

4. $D = \{M(z)/z \in T_a^{-1}\langle U\rangle\} = \{M(z)/T_a(z) \in U\} = \{M(z)/|T_a(z)| = 1\}$.
Or, $|T_a(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{-z+2(1-i)}{z-2-3i}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|-z+2(1-i)|}{|z-2-3i|} = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-2(1-i)|}{|z-(2+3i)|} = 1 \underset{\substack{Aff(A)=2(1-i) \\ Aff(B)=2+3i}}{\Leftrightarrow} \frac{MA}{MB} = 1 \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow M \in med[A,B]$. Donc, $D = med[A,B]$

$K = \{M(z)/z \in T_a^{-1}\langle i\mathbb{R}\rangle\} = \{M(z)/T_a(z) \in i\mathbb{R}\}$.
Or, $T_a(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{-z+2(1-i)}{z-2-3i} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -z + 2(1-i) = 0$ ou $arg\left(\frac{-z+2(1-i)}{z-2-3i}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow M = A$ ou $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BM}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$
$\underset{\substack{\text{en notant} \\ C \text{ le cercle de diamètre } [A,B]}}{\Leftrightarrow}$ $M = A$ ou $M \in C$. Donc, $K = C \cup \{A\}$.

$$L = \{M(z)/z \in T_a(\mathbb{R})\} = \{M(z)/z \in T_a(\mathbb{R})\} \underset{\text{car } T_a \text{est biejctive}}{=} \{M(z)/T_a^{-1}(z) \in \mathbb{R}\} = \{M(z)/T_a^{-1}(z) \in \mathbb{R}\} \underset{\substack{b=1-3i-a \\ b=-1-3i}}{=} \{M(z)/T_b\ \ (z) \in \mathbb{R}\}.$$

Or, $T_b\ \ (z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{(2+3i)z+2(1-i)}{z+1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{(2+3i)z+2(1-i)}{z+1} = \overline{\left(\frac{(2+3i)z+2(1-i)}{z+1}\right)} \Leftrightarrow \frac{(2+3i)z+2(1-i)}{z+1} = \frac{(2-3i)\bar{z}+2(1+i)}{\bar{z}+1}$

$$\Leftrightarrow [(2+3i)z + 2(1-i)][\bar{z}+1] = [(2-3i)\bar{z} + 2(1+i)][z+1]$$

$$T_b\ \ (z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 6iz\bar{z} + iz + i\bar{z} - 4i = 0 \Leftrightarrow 6|z|^2 + 2Re(z) - 4 = 0 \underset{\substack{\text{en posant} \\ z=x+iy}}{\Leftrightarrow} 3x^2 + 3y^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3\left(x^2 + \frac{1}{3}x\right) + 3y^2 - 2 = 0$$

$$T_b\ \ (z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{12} + 3y^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{36} \Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{25}{36} \Leftrightarrow \Omega M = \frac{5}{6} \Leftrightarrow M \in C\left(\Omega, \frac{5}{6}\right).$$

Ainsi, $L = C\left(\Omega, \frac{5}{6}\right)$.

Ex 3 <u>Une fonction de de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}^*$.</u>

Nous allons montrer que $f: ((n,p) \mapsto 2^n(2p+1))$ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}^*$.

A. **<u>Injectivité de f sur $\mathbb{N}^2$</u>**

Pour cela nous appliquons la définition de l'injectivité suivante : φ est injective sur A lorsque $\forall(a,a') \in A^2, [\varphi(a) = \varphi(a') \Longrightarrow a = a']$.
Considérons deux couples d'entiers naturels (n,p) et (n',p') tels que .... et nous allons prouver que .... Imaginons un instant que $n < n'$. Alors expliquer pourquoi l'égalité $2^{n'-n}(2p'+1) = (2p'+1)$ est impossible et faire le lien avec notre problème puis conclure.

B. **<u>Surjectivité de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}^*$.</u>**

On doit alors prouver que tout élément de .... possède .... par f dans ....
Considérons donc un élément de .... noté y. Et cherchons-lui un .... par f.
1er cas y est impair i.e. $y = 2p + 1$ tq $p \in \mathbb{N}$. Déterminer alors l'objet recherché.
2eme cas y est pair i.e. $y = 2q$ tq $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer par récurrence forte sur q que pour chaque entier $q > 0$ « il existe $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ $tel\ que$ $2q = 2^n(2p+1)$".
Conclure.

Injectivité : Considérons deux couples d'entiers naturels (n,p) et (n',p') tels que : $f(n,p) = 2^n(2p+1)) = 2^{n'}(2p'+1) = f(n',p')$. et nous allons prouver que $n = n' et\ p = p'$. Imaginons un instant que $n < n'$. Alors $2^{n'-n}(2p'+1) \underbrace{=}_{**} (2p'+1)$.

Or, $n' - n > 0$ donc $2^{n'-n}(2p'+1)$est pair tandis que $(2p'+1)$ est impair. Donc l'égalité $**$ est impossible. J'en conclus que l'hypothèse $n < n'$est fausse . Comme n et n' jouent un rôle similaire, il est aussi impossible que $n > n'$. Ainsi, $n = n'$. Alors l'égalité $2^n(2p+1)) = 2^{n'}(2p'+1)$ donne $(2p+1)) = (2p'+1)$ puis $p = p'$. Ainsi, je peux conclure que f est injective.

Surjectivité de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}^*$.

On doit alors prouver que tout élément $\mathbb{N}^*$ de possède au moins un antécédent par f dans $\mathbb{N}^2$.

Considérons donc un élément y de $\mathbb{N}^*$. Et cherchons-lui un antécédent (n,p) par f.

1er cas y est impair i.e. $y = 2p+1\ tq\ p \in \mathbb{N}$. Alors $y = 2^0(2p+1)$. Donc $f\big((0,p)\big) = y$. Donc tout entier y impair a au moins un antécédent $\mathbb{N}^*$ par f.

2eme cas y est pair i.e. $y = 2q\ tq\ q \in \mathbb{N}^*$.

Montrons par récurrence forte sur q que pour chaque entier $q > 0$: $\underbrace{\text{"}il\ existe\ (n,p) \in \mathbb{N}^2 tel\ que\ 2q = 2^n(2p+1)\text{"}}_{propriété\ H(q)}$.

Init° : $2 \times 1 = 2^1(2 \times 0 + 1)$. Donc $f\big((1,0)\big) = 2 \times 1$ et $(1,0)$ convient. Donc $H(1)$ vraie.

Propag° : Soit q un entier naturel non nul.

Supposons que pour tout entier $k \in [\![1,q]\!]$, il existe $(n_k,p_k) \in \mathbb{N}^2 tel\ que\ 2k = f(n_k,p_k) = 2^{n_k}(2p_k+1)$.(i.e. $H(k) vraie$)

Ou bien $q+1$ est impair i.e. $q+1 = 2p+1$; Alors $2(q+1) = 2^1(2p+1)$ et $(1,p)$ convient.

Ou bien $q+1$ est pair i.e. $q+1 = 2k\ tq\ k \in [\![1,q]\!]$; Alors il existe $(n_k,p_k) \in \mathbb{N}^2 tel\ que\ 2k = 2^{n_k}(2p_k+1)$; et par conséquent, $2(q+1) = 2k \underbrace{=}_{\substack{car\\ H(k)\ vraie}} 2 \times 2^{n_k}(2p_k+1) = 2^{n_k+1}(2p_k+1)$ =$f(n_k+1,p_k)$: donc (n_k+1,p_k) convient.

Donc $H(q+1)$ est vraie dès que $\forall k \in [\![1,q]\!], H(k) vraie,$

CCL° : par le théorème de récurrence forte, je peux conclure que $\forall q \in \mathbb{N}^*, H(q)\ vraie,$

Donc tout entier y pair et non nul admet un antécédent par f.

Au bilan, tout entier non nul y a un antécédent par f. f est donc surjective de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}^*$.

.