

DL 4

Autour des bijections

Ex 1 Deux exercices classiques

A. Soit $f: I \rightarrow J$, $g: J \rightarrow K$ et $h: K \rightarrow L$ des applications telles que : $h \circ g$ bijective de J sur L et $g \circ f$ bijective de I sur K . Nous allons prouver que f , g et h sont bijectives.

1. Montrer, en utilisant A , que g est bijective de J sur K . Nous en déduisons que g^{-1} existe.
2. Ecrire f à l'aide de $g \circ f$ et g^{-1} . En déduire, par un résultat de cours, que f est bijective de I sur J .
3. Faire de même pour h .

B. Soit $f: E \rightarrow E$ et $g: E \rightarrow E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f = id_E$.

1. Justifier que f et g sont bijectives de E sur E .
2. En déduire que $f \circ g = g \circ f$.
3. Exprimer g en fonction de f^{-1} .

Ex 2 Une famille de fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Soit $a \in \mathbb{C}$ et T_a l'application définie sur $\mathbb{C} \setminus \{a + 3i\}$ et à valeurs complexes par : $T_a(z) = \frac{(1-a)z + 2(1-i)}{z - a - 3i}$.

1. Montrer que T_a est constante si et seulement si $a \in \{1 - 2i, -i\}$. Déterminer le cas échéant, la valeur de cette constante.

Désormais, on suppose que le complexe a est distinct de $1 - 2i$ et de $-i$. Autrement dit, T_a n'est pas constante.

2. Montrer que T_a réalise une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{a + 3i\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{d\}$, où d est un nombre complexe à préciser et décrire T_a^{-1} .
3. Montrer qu'il existe un complexe b tel que : $T_a^{-1} = T_b$. Vous exprimerez b en fonction de a .
4. On prend ici $a = 2$. U est l'ensemble des complexes de module 1.

Décrire géométriquement $D = \{M(z)/z \in T_a^{-1}(U)\}$ et $K = \{M(z)/z \in T_a^{-1}(i\mathbb{R})\}$ et $L = \{M(z)/z \in T_a(\mathbb{R})\}$.

Ex 3 Une fonction de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}^*$.

Nous allons montrer que $f: ((n, p) \mapsto 2^n(2p + 1))$ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}^*$.

A. Injectivité de f sur $\mathbb{N}^2$

Pour cela nous appliquons la définition de l'injectivité suivante : φ est injective sur A lorsque $\forall (a, a') \in A^2, [\varphi(a) = \varphi(a') \Rightarrow a = a']$.

Considérons deux couples d'entiers naturels (n, p) et (n', p') tels que et nous allons prouver que Imaginons un instant que $n < n'$. Alors expliquer pourquoi l'égalité $2^{n'-n}(2p' + 1) = (2p' + 1)$ est impossible et faire le lien avec notre problème puis conclure.

B. Surjectivité de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}^*$

On doit alors prouver que tout élément de possède par f dans

Considérons donc un élément de noté y . Et cherchons-lui un par f .

1^{er} cas y est impair i.e. $y = 2p + 1$ tq $p \in \mathbb{N}$. Déterminer alors l'objet recherché.

2^{eme} cas y est pair i.e. $y = 2q$ tq $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer par récurrence forte sur q que pour chaque entier $q > 0$ « il existe $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $2q = 2^n(2p + 1)$ ».

Conclure.