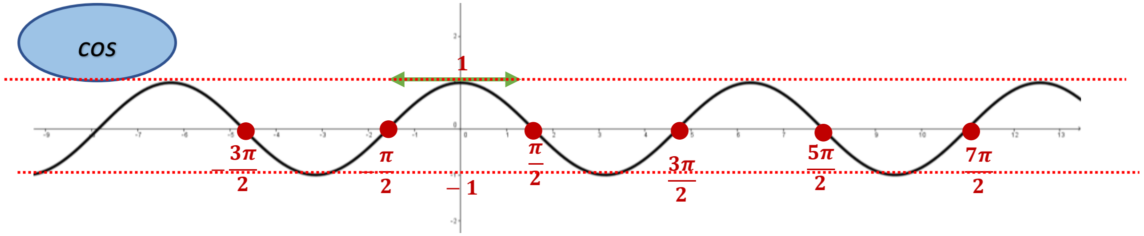
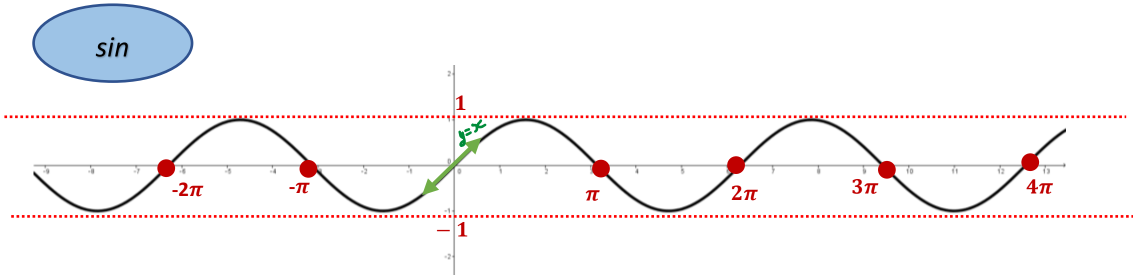
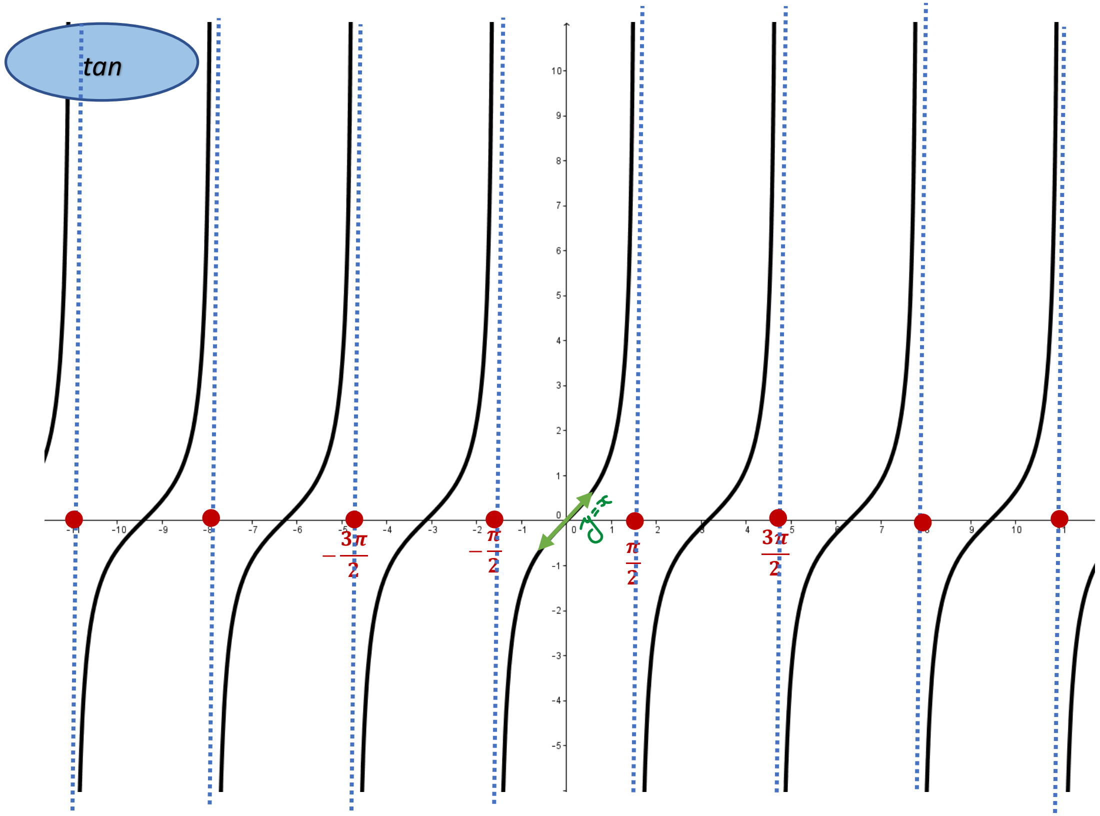






Définition – Continuité – Dérivabilité - Fonction dérivée. Soit x un réel.

$cos(x) = abscisse\ de\ M(x)$

$sin(x) = ordonnée\ de\ M(x)$

$tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = ordonnée\ de\ T(x)$ si $x \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

cos, sin et tan sont continues et dérivables sur leur domaine de définition respectif $et\ cos' = -\sin$ $, sin' = cos$

$$et\ tan' = 1 + tan^2 = \frac{1}{cos^2}$$

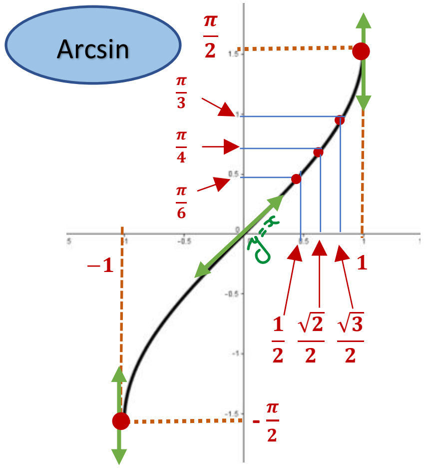
Propriétés algébriques. Soit θ ,$a\ et\ b$ des réels et k un entier relatif.

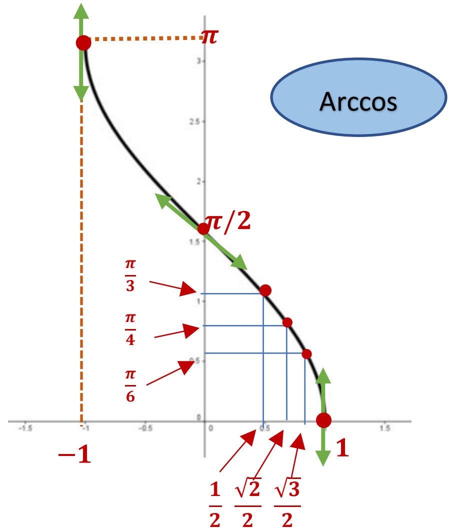
1. $|sin\theta| \leq 1$ et $|cos\theta| \leq 1$
2. $cos^2\theta + sin^2\theta = 1$
3. $\cos(\theta + k\pi) = (-1)^k cos\theta$ et $\sin(\theta + k\pi) = (-1)^k sin\theta$
4. $\cos(-\theta) = cos\theta\ et\ \sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
5. $\cos(\pi + \theta) = -cos\theta\ et\ \sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$
6. $\cos(\pi - \theta) = -cos\theta\ et\ \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$
7. $cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = sin\theta\ \ et\ \ sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = cos\theta$
8. $cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -sin\theta\ \ et\ \ sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = cos\theta$
9. $\begin{cases}\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) = \sin(a)cos(b) + \sin(b)cos(a)\end{cases}$
10. $\begin{cases}\cos(a-b) = cosacosb + sinasinb \\ \sin(a-b) = sinacosb - sinbcosa\end{cases}$
11. $\begin{cases}\cos(2\theta) = cos^2\theta - sin^2\theta = 2cos^2\theta - 1 = 1 - 2sin^2\theta \\ \qquad \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta\end{cases}$
12. $cosb = cosa \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \ b = a + 2k\pi\ ou\ b = -a + 2k\pi$
13. $sinb = sina \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \ b = a + 2k\pi\ ou\ b = \pi - a + 2k\pi$
14. $tan(b) = tan(a) \Leftrightarrow il\ existe\ k \in \mathbb{Z}\ tq : \ b = a + k\pi$
15. $\tan(\theta + k\pi) = \tan(\theta)$ dès que $\tan(\theta)$ existe.
16. $\tan(-\theta) = -tan\theta$ dès que $\tan(\theta)$existe.
17. $1 + tan^2\theta = \frac{1}{cos^2\theta}$ dès que $\tan(\theta)$existe.
18. $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ dès que $\tan(a)$,$\tan(b)\ et\ \tan(a+b)$existent .
19. $\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$ si $\tan(a)$,$\tan(b)\ et\ \tan(a-b)$existent .
20. $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$ dès que $\tan(a)\ et\ \tan(2a)$existent.
21. $tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{tan\theta}$ dès que $\tan(\theta)\ et\ \ tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$existent.
22. $tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{tan\theta}$ dès que $\tan(\theta)\ \ et\ \ tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$existent.

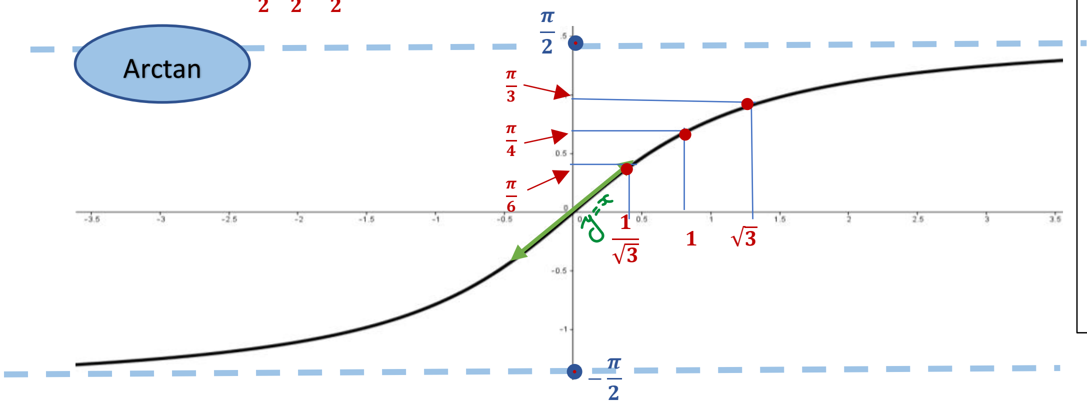
Limites usuelles-Inégalités usuelles.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{tan(x)}{x} = 1 \ , \quad \lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$, $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x\ et\ 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1.$







Définition – Continuité – Dérivabilité - Fonction dérivée.

1. *Arcsin* est la bijection réciproque de $sin_|$: $\left(\begin{matrix}\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1] \\ x \mapsto \sin(x)\end{matrix}\right)$.
2. *Arccos* est la bijection réciproque de $cos_|$: $\left(\begin{matrix}[0,\pi] \to [-1,1] \\ x \mapsto \cos(x)\end{matrix}\right)$.
3. *Arctan* est la bijection réciproque de $tan_|$: $\left(\begin{matrix}\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan(x)\end{matrix}\right)$
4. $\forall y \in [-1;1]$, Arcsin(y)est l'unique réel de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ dont le sinus vaut y et Arccos(y)est l'unique réel de $[0,\pi]$ dont le cosinus vaut y.
5. $\forall y \in \mathbb{R}$, Arctan(y)est l'unique réel de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ dont la tangente vaut y.
6. *Arcsin* et *Arccos* sont continues sur [-1 ;1] mais dérivables uniquement sur $]-1\,;1[$ et $\forall x \in]-1;1[, Arsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *et* $Arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
7. *Arctan* est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, Arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Propriétés algébriques.

1. $Arcsin(a) = Arcsin(b) \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow Arccos(a) = Arccos(b)$.
2. $Arctan(a) = Arctan(b) \Leftrightarrow a = b$.
3. $\cos(b) = a \Leftrightarrow \begin{cases} impossible\ si\ a \notin [-1;1] \\ b = Arccos(a) + 2k\pi\ \ ou\ b = -Arccos(a) + 2k\pi\ \ si\ a \in [-1;1] \\ tq\ k \in \mathbb{Z}\end{cases}$
4. $\sin(b) = a \Leftrightarrow \begin{cases} impossible\ si\ a \notin [-1;1] \\ b = Arcsin(a) + 2k\pi\ \ ou\ b = \pi - Arcsin(a) + 2k\pi\ \ si\ a \in [-1;1] \\ tq\ k \in \mathbb{Z}\end{cases}$
5. $\tan(b) = a \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / b = Arctan(a) + k\pi$
6. $\forall x \in [-1;1], Arcsin(-x) = -Arcsin(x)\ et\ Arccos(-x) = \pi - Arccos(x)$.
7. $\forall x \in \mathbb{R}, Arctan(-x) = -Arctan(x)$.
8. $\forall x \in [-1;1], \cos(Arccos(x)) = x\ et\ \sin(Arcsin(x)) = x$.
9. $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(Arctan(x)) = x$.
10. $Arcsin(\sin(x)) = x \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
11. $Arccos(\cos(x)) = x \Leftrightarrow x \in [0;\pi]$.
12. $Arctan(\tan(x)) = x \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
13. $\forall x \in [-1;1], Arcsin(x) + Arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.
14. $\forall x \in \mathbb{R}^*, Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases}\frac{\pi}{2}\ si\ x > 0 \\ -\frac{\pi}{2}\ si\ x < 0\end{cases}$.
15. $\forall x \in [-1;1], \cos(Arcsin(x)) = \sin(Arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
16. $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(Arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(Arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. .
17. $\forall x \in]-1,1[, tan(Arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,$\forall x \in [-1,1] \backslash \{0\}$,

$tan(Arccos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

Limites usuelles

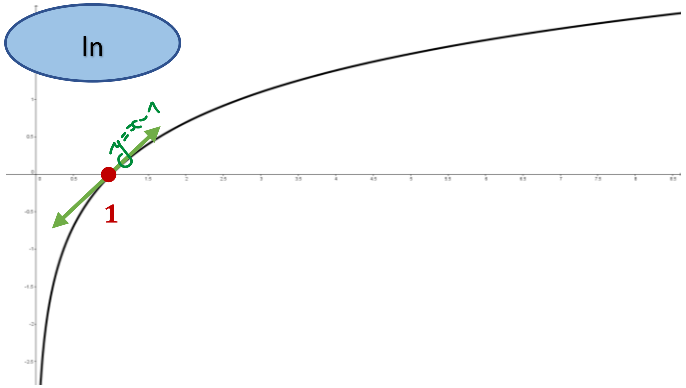
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{Arcsin(x)}{x} = 1$,

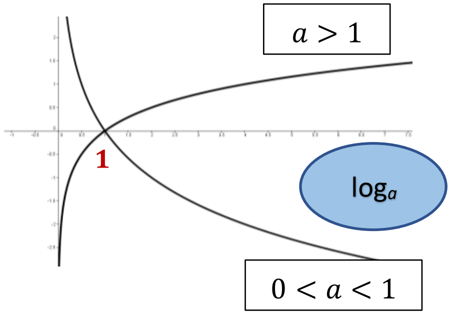
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{Arctan(x)}{x} = 1$,

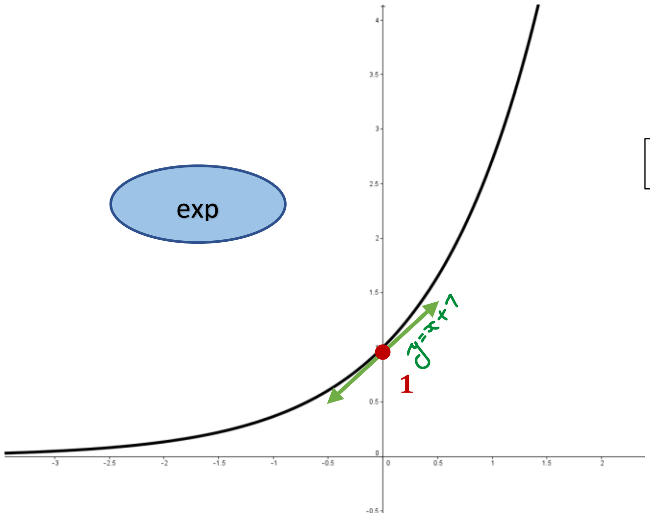
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{Arccos(x) - \frac{\pi}{2}}{x} = -1$,

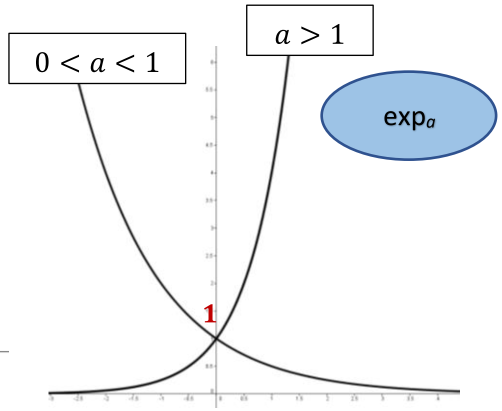
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{Arcsin(x) - \frac{\pi}{2}}{x-1} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{Arccos(x)}{x-1} = -\infty$.









Définition – Continuité – Dérivabilité - Fonction dérivée.

ln est la primitive de $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui vérifie $\ln(1) = 0$.

exp est la bijection réciproque de ln.

Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}\backslash\{1\}$. log_a est la fonction$\left(x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)$ $et\ exp_a$ est $\left(x \mapsto a^x = e^{xln(a)}\right)$.

ln , exp , log_aet exp_a sont continues et dérivables sur leur domaine de définition et

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, ln'(x) = \frac{1}{x}\ \ et\ log_a{}'(x) = \frac{1}{xln(a)}\ et$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, exp'(x) = e^x\ \ et\ exp_a{}'(x) = \ln(a)a^x$$

Propriétés algébriques.

$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$
$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$
$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$
$$e^{\ln(x)} = x.$$

Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}\backslash\{1\}.\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$,

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$
$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$
$$exp_a(\log_a(x)) \ = x.$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \ln(x) = ln(x^\alpha)$et $e^{\alpha \ln(x)} = x^\alpha$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$e^{x+y} = e^x e^y$$
$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$
$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$
$$(e^x)^\alpha = e^{\alpha x}$$
$$\ln(e^x) = x.$$

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^{+*}\backslash\{1\})^2$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

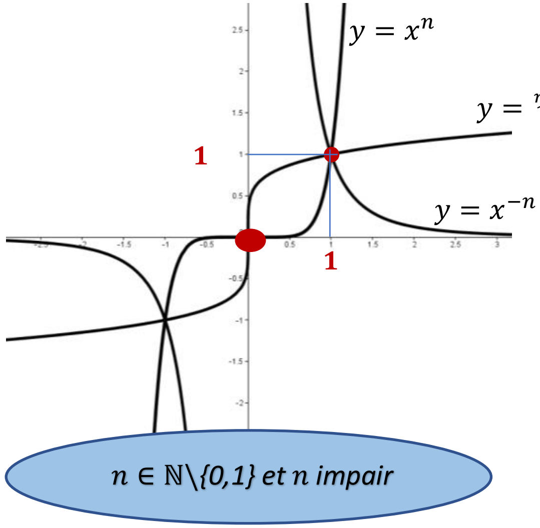
$$a^{x+y} = a^x a^y \text{ et } a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$
$$(ab)^x = a^x b^x\ et\ \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$
$$(a^x)^\alpha = a^{\alpha x}$$
$$\log_a(a^x) \ = x$$

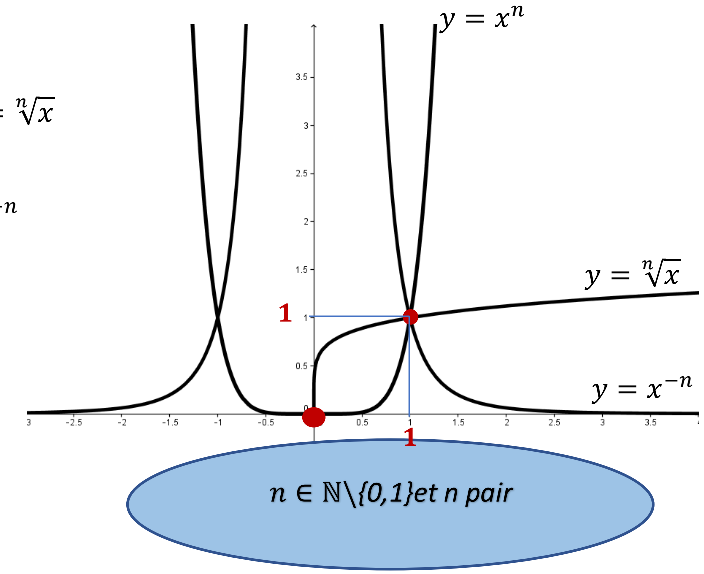
Limites usuelles-Inégalités usuelles.

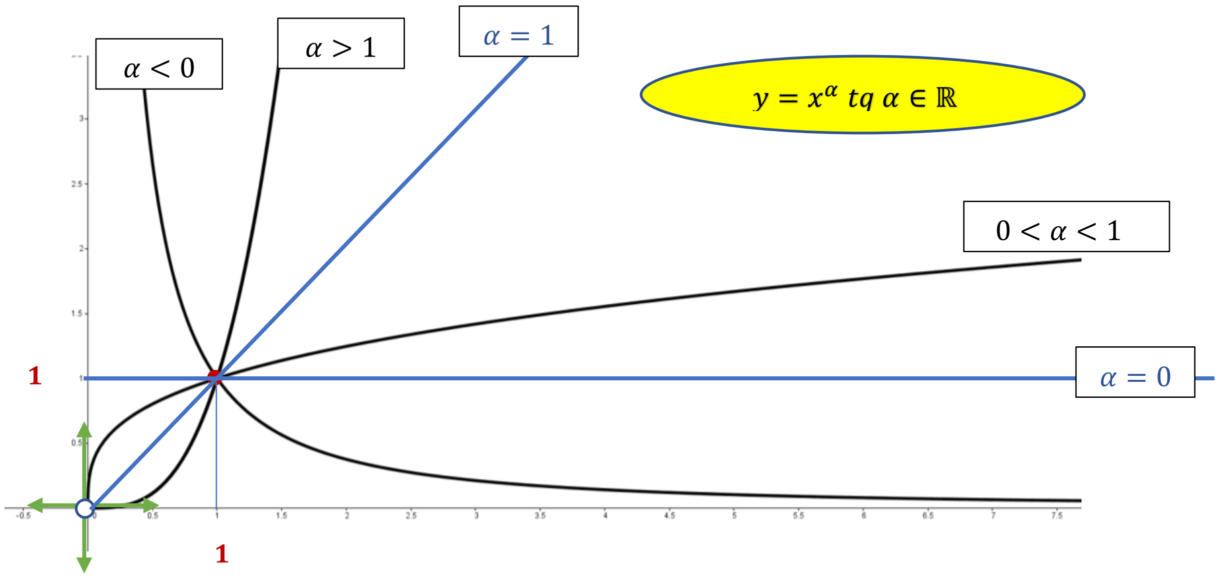
1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1\ \ et\ \lim\limits_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1\ \ et\ \lim\limits_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$.
2. $\forall t \geq 0, t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t\ et\ e^t \geq 1 + t$.
3. Soit α, β, γ des réels strictement positifs et a un réel strictement supérieur à 1. Alors,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} = 0\ ,\ \lim_{x \to 0^+} x^\alpha |ln(x)|^\beta = 0\ ,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\gamma x}}{x^\alpha} = +\infty\ \left(ou\ \lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty\right) \text{et } \lim_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^{\gamma x} = 0 \text{ (ou } \lim_{x \to -\infty} |x|^\alpha a^x) = 0.$$







Définition – Continuité – Dérivabilité - Fonction dérivée.

Soit $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \ et \ \alpha \in \mathbb{R}$.

- $f_n(x) = x^n = \prod_{k=1}^{n} x$ existe toujours
- $f_{-n}(x) = x^{-n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{x} = \frac{1}{x^n} \ existe \ si \ x \neq 0.$
- $f_{\frac{1}{n}}: (x \mapsto x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x})$ est la bijection réciproque de f_n si n est impair et de $f_{n/\mathbb{R}^+}$ si n est pair. Si n impair, $\sqrt[n]{x}$ existe toujours, si n pair $\sqrt[n]{x}$ existe sietssi $x \geq 0$.
- $f_r(x) = x^r = \sqrt[q]{x^p}$ définie selon les valeurs de $p, q \ et \ x$.
- $f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} existe \ sietssi \ x > 0.$
- f_n est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = nx^{n-1}$.
- f_{-n} est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f_{-n}'(x) = -nx^{-n-1}$.
- Si n est impair alors $f_{\frac{1}{n}}$ est définie, continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f_{\frac{1}{n}}'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.
- Si n est pair alors $f_{\frac{1}{n}}$ est définie, continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f_{\frac{1}{n}}'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.
- f_α est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.
- Une primitive de f_α sur $\mathbb{R}^{+*}$ est $\left(x \mapsto \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right)$ si $\alpha \neq -1$ et $(x \mapsto \ln(x))$ si $\alpha = -1$.

Propriétés algébriques.

1. Soit $r \ et \ s \ entiers, rationnelles \ ou \ réels \ et \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dès que tous les objets de la formule existent, alors la formule est vraie :

$x^r \times x^s = x^{r+s}$ $(x^r)^s = x^{rs}$

$\frac{1}{x^s} = x^{-s}$ $(xy)^r = x^r y^r$

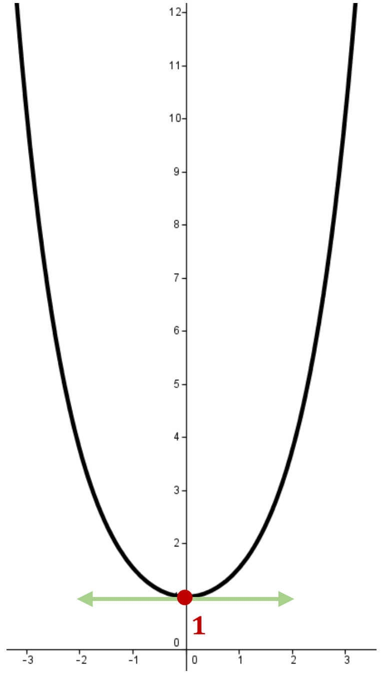
$\frac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$ $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$

2. $Si \ x > 0 \ alors \ x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.
3. Si $a, b, c \ sont \ strictement \ positifs$, alors $a\sqrt{c} - b = \frac{a^2c - b^2}{a\sqrt{c} + b}$.

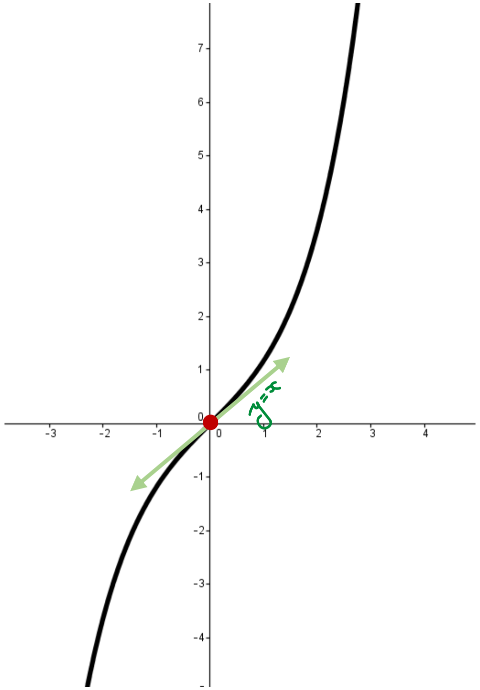
Limites usuelles.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} 0 \ si \ \alpha < 0 \\ 1 \ si \ \alpha = 0 \\ +\infty \ si \ \alpha > 0 \end{cases} \ et \lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = \begin{cases} +\infty \ si \ \alpha < 0 \\ 1 \ si \ \alpha = 0 \\ 0 \ si \ \alpha > 0 \end{cases}$.
2. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^\alpha - 1}{x - 1} = \alpha$ i.e. $\lim\limits_{t \to 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \alpha$ et $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x - a} = \alpha a^{\alpha-1}$.
3. Soit α, β, γ des réels strictement positifs et a un réel strictement supérieur à 1. Alors, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha |\ln(x)|^\beta = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{\gamma x}}{x^\alpha} = +\infty$ $\left(ou \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty\right)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^{\gamma x} = 0$ (ou $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\alpha a^x) = 0$.

ch



sh



Définition – Continuité – Dérivabilité - Fonction dérivée.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $ch(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $\quad et\ sh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

$sh\ et\ ch$ sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\quad ch' = sh\ et\ sh' = ch$.

sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, sh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

et $\ sh^{-1}\ est\ dérivable\ sur\ \mathbb{R}\ et\ \forall x \in \mathbb{R}, (sh^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

$ch_{\overline{\mathbb{R}^+}}(= ch_|)$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $[1;+\infty[$ et $\forall x \in [1;+\infty[\,, ch_|^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

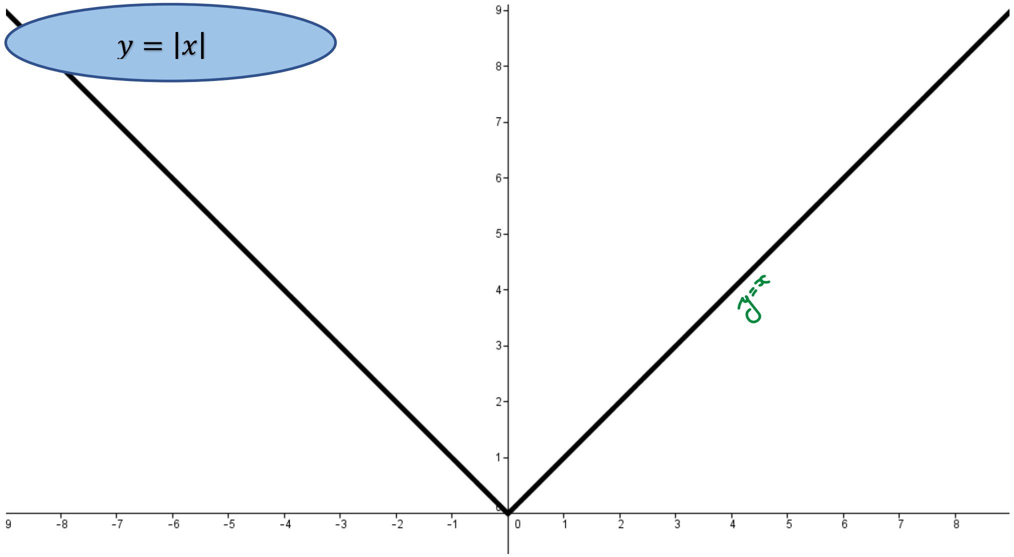
et $\ ch_|^{-1}\ est\ dérivable\ sur\ ]1;+\infty[\ et\ \forall x \in]1;+\infty[, (ch_|^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

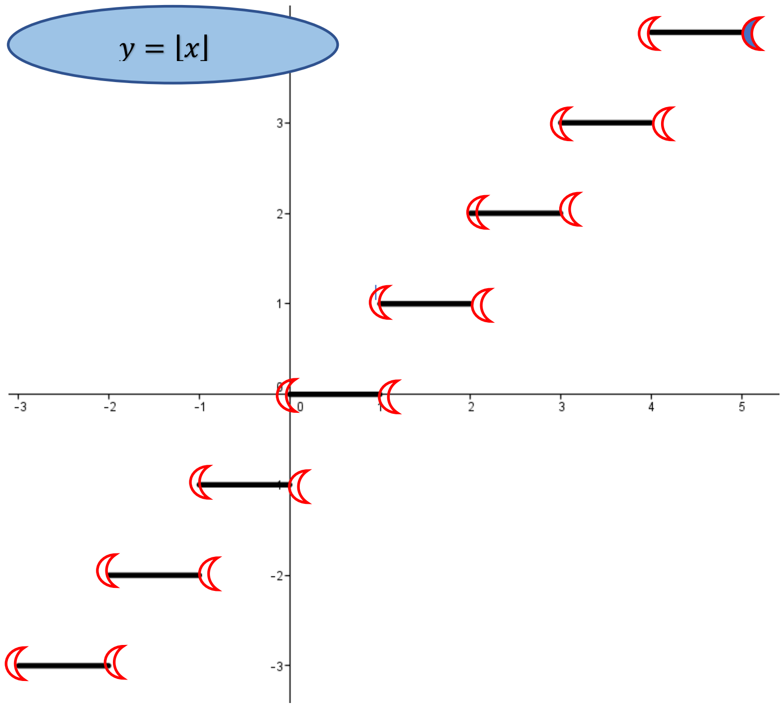
Propriétés algébriques. Soit $a, b\ et\ x$ réels.

1. $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$
2. $\mathrm{ch}(-x) = ch(x)\ et\ \mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}\,(x)$
3. $\begin{cases} \mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}\,(a)\mathrm{sh}\,(b) \\ \mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}\,(a)ch(b) + \mathrm{sh}\,(b)ch(a) \end{cases}$
4. $ch(2a) = 2ch^2(a) - 1 = 1 + 2sh^2(a) = ch^2(a) + sh^2(a)$
5. $sh(2a) = 2ch(a)sh(a)$
6. $1 + e^a = 2ch\left(\frac{a}{2}\right)e^{\frac{a}{2}} \quad et \quad 1 - e^a = -2sh\left(\frac{a}{2}\right)e^{\frac{a}{2}}$.
7. $sh(a) = sh(b) \Leftrightarrow a = b$
8. $ch(a) = ch(b) \Leftrightarrow a = \pm b$
9. $y = sh(x) \Leftrightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$
10. $y = ch(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) si\ y \geq 1 \\ \quad impossible\ si\ y < 1 \end{cases}$.

Limites usuelles-Inégalités usuelles.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sh(x)}{x} = 1 \quad , \quad \lim\limits_{x \to 0} \frac{ch(x)-1}{x^2} = \frac{1}{2}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) \geq 1\ \ et\ \ ch(x) > |\mathrm{sh}(x)| \geq |x|$.
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ch(x)}{sh(x)} = 1\ \ et \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{sh(x)} = 0$.





Définition – Continuité – Dérivabilité - Fonction dérivée.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $|x| = \begin{cases} x \ si \ x \geq 0 \\ -x \ si \ x < 0 \end{cases}$

$et\ \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}\ et\ vérifie :\ \ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

La fonction V valeur absolue est définie et continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x > 0, V'(x) = 1\ et\ \forall x > 0, V'(x) = -1.$$

La fonction E partie entière est définie sur $\mathbb{R}$, mais continue et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, E'(x) = 0.$$

Propriétés algébriques. Soit $a, x\ et\ y$ réels.

- $|x| = max(x\,; -x) = \sqrt{x^2}$
- Pour tous réels $x\ et\ y$, $|x - y|\ est\ la\ distance\ entre\ x\ et\ y$.
  $|xy| = |x||y|\ \ et$ si $y \neq 0$.alors $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.
- Pour tous $a \in \mathbb{R}^+$ réel, t et $x_0$réels ,
  $\{x \in \mathbb{R}/|x| \leq a\}$ =$[-a\,; a]$
  $|t - x_0| \leq a$ si et ssi $t \in [x_0 - a; x_0 + a]$
- Pour tous réels x et y, $(|x| = |y|$ si etssi $x = y\ ou\ x = -y)$
- $k = \lfloor x \rfloor \Leftrightarrow \begin{cases} k \leq x < k + 1 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.
- $x = \lfloor x \rfloor \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$
- $Si\ n \in \mathbb{Z}\ alors\ \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Inégalités

- pour tous réels $x\ et\ y$, $\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$.
- Pour tous réels $x\,, y\,, z$, $|x - y| \leq |x - z| + |y - z|$.
- Pour tous réels x et y , $|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$ et $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.
- $\begin{cases} n \leq x \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow n \leq \lfloor n \rfloor \leq x$.
- $\begin{cases} n > x \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow n \geq \lfloor x \rfloor + 1$.