Résumé : applications, injections , surjections et bijections

Cas général

Def : Soit E *et* F deux ensembles.

- Une **application** de E *dans* F (ou vers F) est une relation dépendant des objets de E qui à chaque élément de E associe un seul élément de F . Une **fonction** de E *dans* F (ou vers F) est une relation dépendant des objets de E qui à chaque élément de E associe au plus un seul élément de F. On note F^E *ou* $\mathcal{F}(E,F)$ l'ensemble des applications de E dans F .
- Soit x un élément de E et y un élément de F **.** Lorsque y est l'objet de F associé à x par f , on note $f\,(x) = y$ et on dit que y est **l'image** de x par f et x est **un antécédent** de y par f **.**
- **Le domaine de définition d'une fonction** de E dans F est alors le sous-ensemble de E constitué des éléments de E qui ont une image par f.
- Lorsque f est une application , on a, par unicité de l'image : $\forall (x_1,x_2) \in E^2,\ (x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2))$. L'implication réciproque est fausse en général. Elle sera vraie uniquement lorsque l'application sera injective.
- Deux applications sont **égales** lorsqu'elles ont le même domaine de définition et attribuent la même image en chaque point de ce domaine de définition.
- Soit $\alpha \in F$. Résoudre l'équation $f(x) = \alpha$, d'inconnue x, signifie chercher tous les réels x de E tels que $f\,(x) = \alpha$ c'est à dire chercher tous les antécédents de α par f**.**
- Soit A un sous ensemble de E**. La restriction de $\boldsymbol{f}$ à $\boldsymbol{A}$** est l'application $f_{/A}$ de A dans F telle que: $\forall x \in A, f_{/A}(x) = f(x)$

- Soit A un sous ensemble de E . **L'image directe de $\boldsymbol{A}$ par $\boldsymbol{f}$** , notée $f(A)$, est l'ensemble des images par f de tous les éléments de A . $f(A) = \{f(x)/x \in A\}$ est un sous-ensemble (ou partie) de F.
- $f(E)$, note aussi $Im(f)$, est le sous- ensemble de F contenant toutes les images par f .
- Soit B un sous ensemble de F . **L'image réciproque de $\boldsymbol{B}$ par $\boldsymbol{f}$**, noté$f^{-1}\langle B\rangle$, est l'ensemble des éléments de E qui ont leur image dans B ie l'ensemble des antécédents des éléments de B .

$f^{-1}\langle B\rangle = \{\, x \in E \,/\, f\,(x) \in B\} = \{\, x \in E/\exists\, y \in F\,, y = f(x)\}$ est un sous ensemble (ou partie) de E.

NB : Si $\alpha \in F\backslash Im(f)$ *alors* l'équation $f(x) = \alpha$, d'inconnue x, n'a pas de solution. Par définition, avoir un antécédent par f c'est être un élément de $Im(f)$ **.**

Def : Soit E , F *et* G trois ensembles .
Soit f une application de E *dans* F et g une application de F *dans* G . Alors pour tout élément x *de* E , on pose $g \circ f(x) = g(f(x))$. On définit ainsi l'application composée $g \circ f$ de E dans G. **$\boldsymbol{g \circ f}$ est la composée de $\boldsymbol{f}$ par $\boldsymbol{g}$.**

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$
$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & f(x) \arrow[r, mapsto] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

Prop : La composition est associative mais pas commutative .

Def. et prop. : $id_E\colon \begin{pmatrix} E \to E \\ x \mapsto x \end{pmatrix}$est appelé l'identité sur E . Pour toute fonction $f\colon E \to F$, on a : $\begin{cases} id_F \circ f = f \\ f \circ id_E = f \end{cases}$

Déf. Soit f une application de E *vers* F .
f est **injective** (sur E) lorsque deux éléments distincts de E ont des images (par f) distinctes.
De manière équivalente :

- f est injective si et seulement si tous les éléments de E ayant la même image par f sont nécessairement égaux .

$$f \text{ est injective de } E \text{ dans } F \iff \forall (x_1,x_2) \in E^2, (x_1 \neq x_2 \underset{ou \Leftrightarrow}{\Longrightarrow} f(x_1) \neq f(x_2))$$

- f est injective si et seulement si tout élément de F a au plus un antécédent dans E par f **.**

f *est injective de* E *dans* F $\iff$ *pour chaque* y *de* F *, l'équation* $f(x) = y$ *d'inconnue* x *a au plus une solution dans*

- f *est injective de* E *dans* F $\iff \forall (x_1,x_2) \in E^2, (f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2)$.

Propriété : Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement monotone sur D est injective sur D .
Toute fonction réelle paire ou périodique n'est jamais injective.

Remarque : on peut « rendre une application injective » en retirant de son domaine de définition les antécédents en trop .

Prop. Soit f une application de E *dans* F et g une application de F *dans* G .
1. Si f *et* g sont injectives alors $g \circ f$ est injective .

2. Si $g\circ f$ est injective alors f est injective .

Déf . Soit f une application de E vers F .
$\boldsymbol{f}$ **est surjective de** $\boldsymbol{E\ sur\ F}$ lorsque tout élément y de F a au moins un antécédent dans E par f , c'est-à-dire lorsque pour tout élément y de F , l'équation $f(x)=y$,d'inconnue x , a au moins une solution dans E .
De manière équivalente : $\boldsymbol{f}$ **est surjective de** $\boldsymbol{E\ sur\ F}$ $\boldsymbol{f}$ **est surjective de** $\boldsymbol{E\ sur\ F}$ lorsque $f(E)=F$.

Remarque : f est toujours surjective de I sur $f(I)$ puisque par définition , tout élément de $f(I)$ est une image par f d'un élément de I . Donc on peut toujours « rendre une application surjective » en enlevant de F les éléments qui n'ont pas d'antécédents par f . **Par exemple** , sinus est surjective de $\mathbb{R}$ sur [-1,1] mais ne l'est pas de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Prop . Soit f une application de $E\ dans\ F$ et g une application de $F\ dans\ G$.
1. Si $f\ et\ g$ sont surjectives respectivement de E sur F et de F et G et alors $g\circ f$ est surjective de E sur G.
2. Si $g\circ f$ est surjective de E sur G.alors g est surjective de F sur G.

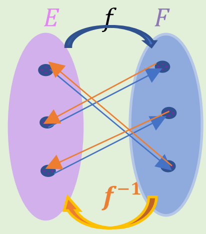
Déf. Soit f une application de $E\ vers\ F$.
$\boldsymbol{f}$ **est bijective(de** $\boldsymbol{E\ sur\ F}$**)** ou est une bijection de $E\ sur\ F$ lorsque f est injective et surjective (de $E\ sur\ F$) .
Autrement dit, $\boldsymbol{f}$ **est bijective** lorsque tout élément de F a un et un seul antécédent dans E par f c'est-à-dire lorsque pour tout élément y de F , l'équation $f\ (x)=y$, d'inconnue x, une unique solution dans E.

NB : On précisera « de E sur F » lorsque l'on réduit le domaine de départ ou d'arrivée pour « rendre f bijective » . Dans ce cas , on dira plutôt que f réalise une bijection de $E\ sur\ F$ ou $\boldsymbol{f}$ **induit une bijection de** $\boldsymbol{E}$ **sur** $\boldsymbol{F}$. Cette bijection induite est :
$f_|:\begin{pmatrix} E\to F \\ x\mapsto f(x)\end{pmatrix}$.

Déf. : Soit $\boldsymbol{f}$ **une application bijective** de $E\ sur\ F$.
On définit alors f^{-1} l'application de $F\ dans\ E$ par :
$\forall y\in F\ ,f^{-1}(y)$ = l'unique antécédent de $y\ par\ f$.
=l'unique élément de E dont l'image par f vaut y
= l'unique solution de l'équation $f(x)=y$ d'inconnue x .

Autrement dit : f^{-1} est définie par l'équivalence : $\begin{cases} y=f(x) \\ x\in E\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=f^{-1}(y) \\ y\in F\end{cases}$.

f^{-1} est appelée **la bijection réciproque de** $\boldsymbol{f}$.



NB: Si f une application bijective de $E\ sur\ F$ alors pour tout sous-ensemble B de F , $\underbrace{f^{-1}\langle B\rangle}_{\substack{image\\ réciproque\\ de\ B\ par\ f}} = \underbrace{f^{-1}(B)}_{\substack{image\\ directe\\ de\ B\ par\ f^{-1}}}$.

Théo : Si f est une application bijective de $E\ sur\ F$ alors f^{-1} est bijective de $F\ sur\ E$ et $(f^{-1})^{-1}=f$.
De plus, $\forall y\in F$, $f\ (f^{-1}\ (y))=y$ et $\forall x\in E\ ,f^{-1}(f\ (x))=x$. Autrement dit , $f\circ f^{-1}=id_F\ \ et\ f^{-1}\circ f=id_E$.

Caractérisation : Soit f une application de $E\ vers\ F$.
S'il existe une application g telle que $\forall y\in F, f(g(y))=y$ et $\forall x\in E, g(f\ (x))=x$ (i.e. $f\circ g=id_F\ \ et\ g\circ f=id_E$) alors f est bijective de $E\ sur\ F$ et $f^{-1}=g$.

NB : la réciproque est vraie d'après le théorème précédent . il y a donc équivalence :
$\forall y\in F, f(g(y))=y$ et $\forall x\in E, g(f\ (x))=x$ (i.e. $f\circ g=id_F\ \ et\ g\circ f=id_E$) sietssi f est bijective de $E\ sur\ F$ et $f^{-1}=g$.

Exemples de référence :
1) id_E est bijective de E sur E et $id_E{}^{-1}=\ id_E$.
2) **Le plan complexe :** $f:\begin{pmatrix} \mathbb{C}\to P \\ x+iy\mapsto M(x,y)\end{pmatrix}$ est bijective .
3) **Du plan dans lui-même :** Toute translation de vecteur non nul est une bijection du plan dans lui-même de bijection réciproque la translation de vecteur opposé.

Toute homothétie de centre A de rapport k non nul est une bijection du plan dans lui-même de bijection réciproque l'homothétie de centre 0 de rapport $\frac{1}{k}$.
Toute rotation de centre O d'angle θ est une bijection du plan dans lui-même de bijection réciproque la rotation de centre A d'angle $-\theta$.

4) **De** $\mathbb{R}$ **dans** $\mathbb{R}$ **:** exp est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa bijection réciproque est ln.
$f:\left(x\mapsto \frac{1}{x}\right)\ est\ bijective\ de\ \mathbb{R}^*\ sur\ \mathbb{R}^*\ et\ f^{-1}=f.$
Si n est un entier naturel impair alors $f:(x\mapsto x^n)\ est\ bijective\ de\ \mathbb{R}\ sur\ \mathbb{R}\ et\ f^{-1}=\sqrt[n]{\ }$.
Si n est un entier naturel pair et $n\geq 2$ alors $f:(x\mapsto x^n)\ est\ bijective\ de\ \mathbb{R}^+\ sur\ \mathbb{R}^+\ et\ f^{-1}=\sqrt[n]{\ }$.

3 **Prop.:** Si f est bijective de $E\ sur\ F$ et g est bijective de $F\ sur\ G$ alors $g\circ f$ est bijective de E sur G et $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

<u>Méthode pour étudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité et déterminer le cas échéant la bijection réciproque :</u>

Soit f une application de E dans F.

1. Si je trouve deux éléments distincts de E qui ont la même par f alors je peux conclure que f n'est pas injective et donc f n'est pas bijective
2. Si je trouve un élément de F qui n'a pas d'antécédent par f alors je peux conclure que f n'est pas surjective de E sur F et donc f n'est pas bijective
3. Si je ne trouve pas ces éléments particuliers alors je prends un élément y quelconque dans F et je cherche tous les antécédents de y par f i.e. je résous l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x élément de E et de paramètre y. La résolution revient à inverser » la relation $f(x) = y$ (qui donne y en fonction de x) : exprimer x en fonction de y.
   - ✓ Si, pour chaque y, je trouve une et une seule solution alors f est bijective de E sur F et $f^{-1}(y)$ =cette unique solution.
   - ✓ Si, pour certains éléments y, l'équation n'a pas de solution alors f n'est pas surjective de E sur F; en revanche, si on note B l'ensemble de tous les y qui n'ont pas d'antécédents, f est surjective de E sur $F \backslash B$.
   - ✓ Si, pour certains éléments y, l'équation a plusieurs solutions alors f n'est pas injective sur E; en revanche, si on ôte à E les antécédents en trop pour obtenir un sous-ensemble A alors f est injective sur A. Autrement dit, $f_{/A}$ est injective.

<u>Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$</u>

Rappel : une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement monotone est injective . Attention, une fonction réelle injective n'est pas forcément strictement monotone !

Théorème des valeurs intermédiaires : Soit a et b réels ou infinis tq $a < b$ et $\boldsymbol{f}$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Si f est continue sur un intervalle I d'extrémités a et b alors
1) tout réel strictement compris entre $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ a un antécédent par f sur I.
2) $f(I)$ est un intervalle.

Corollaire : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et a et b réels ou infinis tq $a < b$
1. Si f est continue sur $[a, b]$ et $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés alors f s'annule au moins une fois sur $[a, b]$.
2. Si f est continue sur l'intervalle I et ne s'annule pas sur I alors f garde un signe constant sur I.

Théorème : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Si f est bijective de I sur J alors C_f et $C_{f^{-1}}$,les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un même repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (appelée première bissectrice).

En conséquence : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. **Si f est bijective de I sur J alors**

1. $b = f(a)$ où $a \in I$	$\Rightarrow$	$a = f^{-1}(b)$
2. $A(a, b) \in Cf$ tq $a \in I$	$\Rightarrow$	$B(b, a) \in C_{f^{-1}}$
3. Cf est symétrique par rapport à $A(a, b)$	$\Rightarrow$	$C_{f^{-1}}$ est symétrique par rapport au point $B(b, a)$
4. f est impaire	$\Rightarrow$	f^{-1} est impaire
5. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ où a point ou bord (réel ou infini) de I et b réel ou infini	$\Rightarrow$	$\lim\limits_{x \to b} f^{-1}(x) = a$
6. f est continue en a (où $a \in I$)	$\Rightarrow$	f^{-1} est continue en b tel que $b = f(a)$
7. f est continue sur I	$\Rightarrow$	f^{-1} est continue sur $J = f(I)$
8. Cf a au point $A(a, b)$(tq $a \in I$) une tangente de pente p réel non nul	$\Rightarrow$	$C_{f^{-1}}$ a au point $A'(b, a)$ une tangente de pente $\frac{1}{p}$
9. Cf a au point $A(a, b)$ (tq $a \in I$) une tangente horizontale (resp.verticale)	$\Rightarrow$	$C_{f^{-1}}$ a au point $A'(b, a)$ une tangente verticale (resp. horiz.)
10. f est dérivable en a tq $a \in I$ et $f'(a) \neq 0$	$\Rightarrow$	f^{-1} est dérivable en b tel que $b = f(a)$ et $f^{-1\prime}(b) = \frac{1}{f'(a)}$
11. f est dérivable en a tq $a \in I$ et $f'(a) = 0$	$\Rightarrow$	f^{-1} n'est pas dérivable en b tel que $b = f(a)$ et $C_{f^{-1}}$ a au point
12. Cf a une asymptote verticale (resp.horiz.) d'équation $x = u$ (resp. $y = u$)	$\Rightarrow$	$C_{f^{-1}}$ a une asymptote horizontale (resp. verticale) d'équation $y = u$(resp. $x = u$)
13. Cf a une asymptote oblique d'équation $y = ux + v$ en $\pm\infty$	$\Rightarrow$	$C_{f^{-1}}$ a une asymptote oblique d'équation $y = \frac{1}{u}x - \frac{v}{u}$
14. Cf a une BP de DA (Ox) (resp. (Oy)) en $\pm\infty$ $\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$C_{f^{-1}}$ a une BP de DA (Oy) (resp. (Ox))
15. f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I	$\Rightarrow$	f^{-1} est strictement croissante (resp. décroissante) sur J

Prop.: Si f est continue et injective alors f est strictement monotone.

Théorème des bijections continues et strictement monotones (TBCSM):
si f est **continue et strictement monotone** sur l'**intervalle** I alors
1) $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ de même nature que I et d'extrémités les limites de f aux extrémités de I.
2) f induit une bijection $f_|$ de I sur $f(I)$ ou encore f est bijective de I sur $f(I)$.
3) ${f_|}^{-1}$, définie sur $f(I)$, est continue et strictement monotone de même monotonie que $f_|$.

NB :1) Il arrive que $f = f_|$ i.e. f bijective sur tout son domaine de définition.
2) Continuité $\Rightarrow f(I)$ intervalle +SURJECTIVITE
Stricte monotonie$\Rightarrow$ *les bords de* $f(I)$+ INJECTIVITE

ATTENTION : Il existe des bijections non continues et non strictement monotones . Comme le prouve **l'exemple suivant :**
Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \in [0,1[\\ 3-x & si\ x \in [1,2] \end{cases}$.

Exemples de référence La fonction sinus n'est pas bijective. Par contre, comme sinus est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, sinus est bijective de$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$sur $[-1;1]$. Autrement dit, $sinus$ induit la bijection $sin_|$: $\begin{pmatrix} \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1] \\ x \mapsto sin(x) \end{pmatrix}$.La bijection réciproque de $sin_|$ est appelée la fonction $Arcsinus$. $Arcsinus$ est donc définie , continue et strictement croissante sur $[-1,1]$ .Et on retrouve la définition suivante : $\forall y \in [-1,1], \theta = Arcsin(y)$ est l'unique réel de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ vérifiant $\sin(\theta) = y$.

De même, $cos_|$: $\begin{pmatrix} [0,\pi] \to [-1,1] \\ x \mapsto cos(x) \end{pmatrix}$et $tan_|$: $\begin{pmatrix} \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto tan(x) \end{pmatrix}$ sont bijectives et ${cos_|}^{-1} = Arccos\ et\ {tan_|}^{-1} = Arctan$. On retrouve Les définitions suivantes : $\forall y \in [-1,1], \theta = Arccos(y)$ est l'unique réel de $[0,\pi]$ vérifiant $\cos(\theta) = y$.
$\forall y \in \mathbb{R}, \theta = Arctan(y)$ est l'unique réel de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ vérifiant $\tan(\theta) = y$.

Théorème de dérivation d'une bijection réciproque d'une bijection continue et strictement monotone (TDBR):
Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur l'**intervalle** I et a un élément de I et $b = f(a)$.
1)Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en b et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.
2)Si f est dérivable en a et $f'(a) = 0$ alors f^{-1} n'est pas dérivable en b et $C_{f^{-1}}$admet une tangente verticale au point $B(b,a)$.
3)Si Cf admet une tangente verticale au point $A(a,b)$alors f^{-1} est dérivable en b et $(f^{-1})'(b) = 0$ ($C_{f^{-1}}$admet une tangente horizontale au point $B(b,a)$.
4) Si f est dérivable sur K intervalle inclus dans I et pour tout x dans K , $f'(x) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $f(K)$ tel que : pour tout y dans $f(K), (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

En pratique :le TBCSM sert à montrer qu'une fonction est bijective d'un intervalle sur un autre intervalle. De plus, le TBCSM et TDBR permettent d'avoir des propriétés sur la bijection réciproque lorsque l'on ne parvient pas à déterminer son expression (c'est le cas lorsque l'équation $f(x) = y$ est impossible à résoudre algébriquement) **. Cf exemples suivants.**

$x = f^{-1}(y) \in \mathbb{R}^+$	a	$f^{-1}(b)$	a	$f^{-1}(b)$
$f(x) = y \in [\ln(2), +\infty[$	$f(a)$	b	$f(a)$	b
$f'(x)$	$f'(a)$	$1/(f^{-1})'(b)$	n'existe pas	0
$(f^{-1})'(y)$	$1/f'(a)$	$(f^{-1})'(b)$	0	n'existe pas

BILAN pour prouver que f est bijective et trouver, lorsque cela est possible, l'expression de f^{-1} :
1) OU BIEN on écrit f comme la composée de deux bijections $f = h \circ g$; alors, f bijective et $f^{-1} = g^{-1} \circ h^{-1}$.
2) OU BIEN on tente de trouver $g: J \to I$, telle que $\forall x \in J,\ f(g(x)) = x$. On vérifie ensuite que : $\forall x \in I,\ g(f(x)) = x$. Alors, f bijective de I sur J et $f^{-1} = g$
3) OU BIEN on prend un y arbitraire (non particulier) dans J et on résout l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x réelle, élément de I. Si cette équation a toujours une unique solution dans I, alors f est bijective de I sur J et l'unique solution de cette équation est $x = f^{-1}(y)$(=l'expression de f^{-1})
4) OU BIEN on applique le théorème des bijections continues et strictement monotones qui permet de trouver $J = f(I)$ et de justifier que f est bijective de I sur J mais ne permet pas de trouver f^{-1}.

NB : on peut obtenir la continuité, la stricte monotonie et la dérivabilité de f^{-1}, sans connaitre l'expression de f^{-1}. Il suffit d'appliquer le TBSCM et le TDBR !! On peut même obtenir des valeurs de f^{-1} et de $(f^{-1})'$, et parfois l'expression de $(f^{-1})'$sans connaitre celle de f^{-1} (comme pour $Arcsin$, $Arccos\ et\ Arctan$).