

Corrigé du « Je m'entraîne au calcul intégral »

Savoir-faire de base !!!!

$$\int_1^e \frac{\ln^2(t)}{t} dt \quad \begin{array}{l} \text{je reconnais} \\ u'(t)u(t)^2 \\ \text{avec } u(t)=\ln(t) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{=} \\ u'(t)u(t)^2 \xrightarrow{\text{intègre}} \frac{u(t)^3}{3} + cste \end{array} \quad \left[\frac{\ln(t)^3}{3} \right]_1^e = \frac{1}{3}.$$

$$\int_0^{-1} \sqrt{2-5t} dt = -\frac{1}{5} \int_0^{-1} \frac{(-5)\sqrt{2-5t}}{1} dt \quad \begin{array}{l} \text{je reconnais} \\ u'(t)u(t)^{\frac{1}{2}} \\ \text{avec } u(t)=2-5t \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{=} \\ u'(t)u(t)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{intègre}} \frac{u(t)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + cste \end{array} \quad -\frac{1}{5} \left[\frac{(2-5t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^{-1} = -\frac{2}{15} (7\sqrt{7} - 2\sqrt{2}).$$

$$\int_0^{-1} \frac{1}{2x-3} dx = \frac{1}{2} \int_0^{-1} \frac{2}{2x-3} dx \quad \begin{array}{l} \text{je reconnais} \\ \frac{u'(x)}{u(x)} \\ \text{avec } u(x)=2x-3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{=} \\ \frac{u'(x)}{u(x)} \xrightarrow{\text{intègre}} \ln|u(x)| + cste \end{array} \quad \frac{1}{2} [\ln|2x-3|]_0^{-1} = \frac{1}{2} (\ln(5) - \ln(3)) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{3}\right).$$

$$\int_0^{-1} \sqrt{\frac{1}{3-2x}} dx = -\frac{1}{2} \int_0^{-1} \frac{(-2)(3-2x)^{-\frac{1}{2}}}{1} dx \quad \begin{array}{l} \text{je reconnais} \\ u'(x)u(x)^{-\frac{1}{2}} \\ \text{avec } u(x)=3-2x \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{=} \\ u'(x)u(x)^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{intègre}} \frac{u(x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + cste \end{array} \quad -\frac{1}{2} \left[\frac{(3-2x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^{-1} = -\frac{3}{4} (\sqrt{25} - \sqrt{9}).$$

$$\int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x e^{x^2}}{1} dx \quad \begin{array}{l} \text{je reconnais} \\ u'(x) e^{u(x)} \\ \text{avec } u(x)=x^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{=} \\ u'(x) e^{u(x)} \xrightarrow{\text{intègre}} e^{u(x)} + cste \end{array} \quad \frac{1}{2} [e^{x^2}]_0^1 = \frac{1}{2} (e - 1).$$

$$\int_0^1 \frac{1-t}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = [\text{Arctan}(t)]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2} dt \quad \begin{array}{l} \text{je reconnais} \\ \text{la dérivée de} \\ \text{Arctan} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{je reconnais} \\ \frac{u'(t)}{u(t)} \\ \text{avec } u(t)=t^2+1 \end{array} \quad dt = \text{Arctan}(1) - \text{Arctan}(0) - \frac{1}{2} [\ln|1+t^2|]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2).$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x) \sin^2(x) dx = \dots \text{ . On linéarise } \cos^4(x) \sin^2(x) :$$

$$\cos^4(x) \sin^2(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2$$

$$= -\frac{1}{2^6} [(e^{ix})^4 + 4(e^{ix})^3 e^{-ix} + 6(e^{ix})^2 (e^{-ix})^2 + 4(e^{ix})^1 (e^{-ix})^3 + (e^{-ix})^4] [(e^{ix})^2 - 2e^{ix} e^{-ix} + (e^{-ix})^2]$$

$$= -\frac{1}{2^6} [e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}] [e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}]$$

$$= -\frac{1}{2^6} [e^{6ix} - 2e^{4ix} + e^{2ix} + 4e^{4ix} - 8e^{2ix} + 4 + 6e^{2ix} - 12 + 6e^{-2ix} + 4 - 8e^{-2ix} + 4e^{-4ix} + e^{-2ix} - 2e^{-4ix} + e^{-6ix}]$$

$$= -\frac{1}{2^6} [2 \cos(6x) + 4 \cos(4x) - 2 \cos(2x) - 4] = -\frac{1}{2^5} [\cos(6x) + 2 \cos(4x) - \cos(2x) - 2].$$

$$\text{Donc, } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x) \sin^2(x) dx = \left(-\frac{1}{2^5} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(6x) + 2 \cos(4x) - \cos(2x) - 2] dx$$

$$= \left(-\frac{1}{2^5} \right) \left[\frac{\sin(6x)}{6} + \frac{\sin(4x)}{2} - \frac{\sin(2x)}{2} - 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\frac{1}{2^5} \right) (-\pi) = \frac{\pi}{32}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^5(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2(x))^2 \sin(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos^2(x))^2 \sin(x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) + 2 \underbrace{(-\sin(x)) \cos^2(x)}_{\substack{\text{je reconnais} \\ u'(x)u(x)^2}} - \underbrace{(-\sin(x)) \cos^4(x)}_{\substack{\text{je reconnais} \\ u'(x)u(x)^4}} dx = \left[-\cos(x) + 2 \frac{\cos(x)^3}{3} - \frac{\cos(x)^5}{5} \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \left[-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5} \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5 \times 2 \times 2} \right] - \left[\frac{-15+10-3}{15} \right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{-3 \times 2 \times 2 \times 5}{3 \times 2 \times 2 \times 5} + \frac{5 \times 2 \times 2}{3 \times 2 \times 2 \times 5} - \frac{3}{3 \times 2 \times 2 \times 5} \right] + \frac{8}{15} = \frac{8}{15} - \frac{43\sqrt{2}}{120}.$$

$$\int_1^e \underbrace{\left(3t^4 + \frac{1}{t^2} + 4\sqrt{t} - 1 \right)}_{u'(t)} \underbrace{\ln(t)}_{v(t)} dt \quad \stackrel{\substack{= \\ I\tilde{P}P \\ u(t)=\frac{3}{5}t^5-\frac{1}{t}+\frac{4t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-t \\ v(t)=\ln(t) \\ u \text{ et } v \text{ sont de classe } C^1 \\ \text{sur } [1,e] \text{ et} \\ u'(t)=3t^4+\frac{1}{t^2}+4\sqrt{t}-1 \\ v'(t)=\frac{1}{t}}}{=} \left[\left(\frac{3}{5}t^5 - \frac{1}{t} + \frac{4t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - t \right) \ln(t) \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{3}{5}t^5 - \frac{1}{t} + \frac{4t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - t \right) \frac{1}{t} dt$$

$$= \frac{3}{5}e^5 - \frac{1}{e} + \frac{8}{3}e\sqrt{e} - e - \int_1^e \left(\frac{3}{5}t^4 - t^{-2} + \frac{8t^{\frac{1}{2}}}{3} - 1 \right) dt = \frac{3}{5}e^5 - \frac{1}{e} + \frac{8}{3}e\sqrt{e} - e - \left[\frac{3}{25}t^5 + \frac{1}{t} + \frac{16t^{\frac{3}{2}}}{9} - t \right]_1^e$$

$$= \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{25} \right) e^5 - 2\frac{1}{e} + \left(\frac{8}{3} - \frac{16}{9} \right) e\sqrt{e} + \left(\frac{3}{25} + 1 + \frac{16}{9} - 1 \right) = \left(\frac{12}{25} \right) e^5 - \frac{2}{e} + \left(\frac{8}{9} \right) e\sqrt{e} + \frac{427}{225}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(3t^2 - 1)}_{u(t)} \underbrace{\cos(2t)}_{v'(t)} dt \quad \stackrel{\substack{= \\ I\tilde{P}P \\ u(t)=3t^2-1 \\ v(t)=\frac{1}{2}\sin(2t) \\ u \text{ et } v \text{ sont } C^1 \text{ sur } [0, \frac{\pi}{2}] \text{ et} \\ u'(t)=6t \\ v'(t)=\cos(2t)}}{=} \left[(3t^2 - 1) \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6t \frac{1}{2} \sin(2t) dt = 0 - 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{t}_{u(t)} \underbrace{\sin(2t)}_{v'(t)} dt$$

$$\stackrel{\substack{= \\ I\tilde{P}P \\ u(t)=t \\ v(t)=-\frac{1}{2}\cos(2t) \\ u \text{ et } v \text{ sont } C^1 \text{ sur } [0, \frac{\pi}{2}] \text{ et} \\ u'(t)=1 \\ v'(t)=\sin(2t)}}{=} -3 \left[t \frac{-1}{2} \cos(2t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-1}{2} \cos(2t) dt = -\frac{3\pi}{4} - \frac{3}{2} [\sin(2t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3\pi}{4}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2t) e^{3t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{Re}(e^{2it} e^{3t}) dt = \operatorname{Re} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2it} e^{3t} dt \right) = \operatorname{Re} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{(2i+3)t} dt \right) = \operatorname{Re} \left(\left[\frac{e^{(2i+3)t}}{2i+3} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{(2i+3)\frac{\pi}{4}}}{2i+3} - \frac{1}{2i+3} \right)$$

$$= \operatorname{Re} \left(\frac{e^{\frac{3\pi}{4}} e^{\frac{i\pi}{2}}}{2i+3} - \frac{1}{2i+3} \right) = \operatorname{Re} \left((e^{\frac{3\pi}{4}} i - 1) \frac{1}{2i+3} \right) = \operatorname{Re} \left((e^{\frac{3\pi}{4}} i - 1) \frac{3-2i}{13} \right) = \frac{2}{13} e^{\frac{3\pi}{4}} - \frac{3}{13}.$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{3-2t^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{3}t^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}t\right)^2}} dt \quad \stackrel{\substack{= \\ \tilde{C}V \\ x=\sqrt{\frac{2}{3}}t \text{ i.e. } t=\sqrt{\frac{3}{2}}x \\ dx=\sqrt{\frac{2}{3}}dt \text{ i.e. } dt=\sqrt{\frac{3}{2}}dx \\ t=0 \Leftrightarrow x=0 \\ t=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{2}{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}}}{=} \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} [\operatorname{Arcsin}(x)]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

$$\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{1}{9t^2+4} dt = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{1}{\frac{5}{4}t^2+1} dt = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{1}{\left(\frac{3}{2}t\right)^2+1} dt \quad \stackrel{\substack{= \\ \tilde{C}V \\ x=\frac{3}{2}t \text{ i.e. } t=\frac{2}{3}x \\ dx=\frac{2}{3}dt \text{ i.e. } dt=\frac{3}{2}dx \\ t=0 \Leftrightarrow x=0 \\ t=\frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x=\frac{3}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}}}{=} \frac{1}{4} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1} \times \frac{2}{3} dx$$

$$= \frac{1}{6} [\operatorname{Arctan}(x)]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{18}.$$

$\int_0^{-1} \frac{1}{5t^2+t-6} dt = \dots$. Ici $P(t) = 5t^2 + t - 6 = 5(t-1)\left(t + \frac{6}{5}\right)$ et $\Delta_P > 0$. P ne s'annule qu'en 1 et $-\frac{6}{5}$. Donc l'intégrande est continue sur $[-1,0]$ et I existe.

Décomposons $\frac{1}{P}$ en éléments simples : il existe deux réels A et B tels que : $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \left\{1, -\frac{6}{5}\right\}, \frac{1}{P(t)} = \frac{1}{5(t-1)\left(t+\frac{6}{5}\right)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+\frac{6}{5}}$.

Alors $\frac{t-1}{P(t)} = \frac{1}{5\left(t+\frac{6}{5}\right)} = A + \frac{B}{t+\frac{6}{5}}$ et $\frac{t+\frac{6}{5}}{P(t)} = \frac{1}{5(t-1)} = \frac{A}{t-1} + B$. Donc,

$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{P(t)} = \frac{1}{5\left(1+\frac{6}{5}\right)} = A$ et $\lim_{t \rightarrow -\frac{6}{5}} \frac{t+\frac{6}{5}}{P(t)} = \frac{1}{5 \times \left(-\frac{6}{5}-1\right)} = B$. Ainsi, $A = \frac{1}{11}$ et $B = -\frac{1}{11}$. et $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \left\{1, -\frac{6}{5}\right\}, \frac{1}{P(t)} = \frac{1}{11} \left[\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+\frac{6}{5}} \right]$. Par suite,

$$\int_0^{-1} \frac{1}{5t^2+t-6} dt = \frac{1}{11} \int_0^{-1} \frac{1}{t-1} dt - \frac{1}{11} \int_0^{-1} \frac{1}{t+\frac{6}{5}} dt = \frac{1}{11} \left[\ln(|t-1|) - \ln\left(\left|t+\frac{6}{5}\right|\right) \right]_0^{-1} = \frac{1}{11} \left[\ln(2) - \ln\left(\frac{1}{5}\right) + \ln\left(\frac{6}{5}\right) \right] = \frac{1}{11} [2 \ln(2) + \ln(3)].$$

je reconnais
 $\frac{u'(t)}{u(t)}$
avec $u(t)=t-1$
je reconnais
 $\frac{u'(t)}{u(t)}$
avec $u(t)=t+\frac{6}{5}$

$\int_0^1 \frac{1}{4t^2+4t+1} dt = \dots$ Ici $P(t) = 4t^2 + 4t + 1 = (2t+1)^2$ et $\Delta_P = 0$. Donc P ne s'annule qu'en $-\frac{1}{2}$ et l'intégrande est définie et continue sur $[0,1]$. Donc I existe et **intégrons** !!

$$\int_0^1 \frac{1}{4t^2+4t+1} dt = \int_0^1 \frac{1}{(2t+1)^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2}{(2t+1)^2} dt \stackrel{CV}{=} \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2t+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3} + 1 \right] = \frac{1}{3} \dots$$

je reconnais
 $u'(t)(u(t))^{-2}$
avec $u(t)=2t+1$
 $u'(t)(u(t))^{-2} \xrightarrow{\int} \frac{(u(t))^{-1}}{-1} = -\frac{1}{u(t)}$

$\int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1} dt = \dots$ Ici $P(t) = t^2 + t + 1$ et $\Delta_P < 0$. Donc l'intégrande est définie et continue sur $[0,1]$ et I existe.

Transformons P grâce à sa forme canonique pour faire apparaître $u^2 + 1$:

$$P(t) = t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left[\frac{4}{3} \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \right] = \frac{3}{4} \left[\frac{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t + \frac{1}{2}\right)\right]^2}{u^2} + 1 \right] = \frac{3}{4} \left[\frac{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right]^2}{u^2} + 1 \right]. \text{ Donc,}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1} dt = \int_0^1 \frac{1}{\frac{3}{4} \left[\frac{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right]^2}{u^2} + 1 \right]} dt = \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{1}{\left[\frac{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right]^2}{u^2} + 1 \right]} dt \stackrel{CV}{=} \frac{4}{3} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\left[\frac{u^2}{u^2} + 1 \right]} \frac{\sqrt{3}}{2} du = \frac{2}{\sqrt{3}} [Arctan(u)]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right] = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$u = \frac{2}{\sqrt{3}}t + \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $du = \frac{2}{\sqrt{3}} dt \text{ i.e. } dt = \frac{\sqrt{3}}{2} du$
 $t=0 \Leftrightarrow u = \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $t=1 \Leftrightarrow u = \frac{\sqrt{3}}{2}$
je reconnais le dérivée de Arctan

$\int_0^1 \frac{t}{t^2+t+2} dt = \dots$. Ici $P(t) = t^2 + t + 2$ et $\Delta_P < 0$. Donc l'intégrande est définie et continue sur $[0,1]$ donc I existe

$$\int_0^1 \frac{t}{t^2+t+2} dt = \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}(2t+1) - \frac{1}{2}}{t^2+t+2} dt \stackrel{CV}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(2t+1)}{t^2+t+2} dt - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{t^2+t+2} dt = \frac{1}{2} [\ln|t^2+t+2|]_0^1 - \frac{1}{2} J$$

car les deux nouvelles intégrandes sont continues sur $[0,1]$

$$= \frac{\ln(4) - \ln(2)}{2} - \frac{1}{2} J = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} J.$$

Calculons J : Comme $\Delta_P < 0$, utilisons la forme canonique de P pour l'écrire sous la forme $k(u^2 + 1)$.

$$P(t) = t^2 + t + 2 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 2 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = \frac{7}{4} \left[\frac{4}{7} \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \right] = \frac{7}{4} \left[\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\left(t + \frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1 \right] = \frac{7}{4} \left[\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1 \right]..$$

$$\text{Alors } J = \int_0^1 \frac{1}{\frac{7}{4} \left[\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1 \right]} dt = \frac{4}{7} \int_0^1 \frac{1}{\left[\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1 \right]} dt \stackrel{CV}{=} \frac{4}{7} \int_{\frac{1}{\sqrt{7}}}^{\frac{3}{\sqrt{7}}} \frac{1}{u^2+1} \frac{\sqrt{7}}{2} du = \frac{2}{\sqrt{7}} \int_{\frac{1}{\sqrt{7}}}^{\frac{3}{\sqrt{7}}} \frac{1}{u^2+1} du = \frac{2}{\sqrt{7}} \left[Arctan\left(\frac{3}{\sqrt{7}}\right) - Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) \right].$$

$u = \frac{2t+1}{\sqrt{7}}$
 $du = \frac{2}{\sqrt{7}} dt$
 $t=0 \Leftrightarrow u = \frac{1}{\sqrt{7}}$
 $t=1 \Leftrightarrow u = \frac{3}{\sqrt{7}}$

$$\text{Ainsi, } I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{\sqrt{7}} \left[Arctan\left(\frac{3}{\sqrt{7}}\right) - Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) \right].$$

$\int_0^1 \frac{1-3t}{t^2+7t+10} dt = \dots$. Ici $P(t) = t^2 + 7t + 10 = (t+2)(t+5)$ et $\Delta_P > 0$. P ne s'annule qu'en -2 et -5 . Donc l'intégrande est continue sur $[0,1]$ et I existe.

$$\int_0^1 \frac{1-3t}{t^2+7t+10} dt = \int_0^1 \frac{-\frac{3}{2}(2t+7) + \frac{21}{2} + 1}{t^2+7t+10} dt \stackrel{\substack{\text{car les deux nouvelles} \\ \text{intégrandes sont aussi} \\ \text{continues sur } [0,1]}}{=} -\frac{3}{2} \int_0^1 \frac{(2t+7)}{\frac{u'(t)}{u(t)}} dt + \frac{23}{2} \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{t^2+7t+10} dt}_{=J}$$

avec $u(t)=t^2+7t+10$

$$\int_0^1 \frac{1-3t}{t^2+7t+10} dt = -\frac{3}{2} [\ln(|t^2+7t+10|)]_0^1 + \frac{23}{2} J = -\frac{3}{2} \ln\left(\frac{18}{10}\right) + \frac{23}{2} J = -\frac{3}{2} \ln\left(\frac{9}{5}\right) + \frac{23}{2} J.$$

Calculons J : $\Delta_P > 0$. Décomposons $\frac{1}{P}$ en éléments simples : il existe deux réels A et B tels que : $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \left\{1, -\frac{6}{5}\right\}, \frac{1}{P(t)} = \frac{1}{(t+2)(t+5)} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t+5}$.

Alors $\frac{t+2}{P(t)} = \frac{1}{t+5} = A + \frac{B}{t+5}$ et $\frac{t+5}{P(t)} = \frac{1}{t+2} = \frac{A}{t+2} + B$. Donc,

$\lim_{t \rightarrow -2} \frac{t+2}{P(t)} = \frac{1}{3} = A$ et $\lim_{t \rightarrow -5} \frac{t+2}{P(t)} = \frac{1}{-3} = B$. Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -5\}, \frac{1}{P(t)} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+5} \right]$. Par suite,

$$J = \int_0^1 \frac{1}{t^2+7t+10} dt = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{t+2} dt - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{t+5} dt = \frac{1}{3} [\ln(|t+2|) - \ln(|t+5|)]_0^1 = \frac{1}{3} [\ln(3) - \ln(2) - \ln(6) + \ln(5)] = \frac{1}{3} [\ln(5) - 2 \ln(2)].$$

$\begin{matrix} \text{je reconnais} \\ \frac{u'(t)}{u(t)} \\ \text{avec } u(t)=t+2 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \text{je reconnais} \\ \frac{u'(t)}{u(t)} \\ \text{avec } u(t)=t+5 \end{matrix}$

$$\text{Donc, } I = -\frac{3}{2} \ln\left(\frac{9}{5}\right) + \frac{23}{2} \left[\frac{1}{3} [\ln(5) - 2 \ln(2)] \right] = -3 \ln(3) + \frac{32}{6} \ln(5) - 23 \ln(2)$$

$\int_0^1 \frac{t^3-t}{t^2-t+1} dt = \dots$ Ici $P(t) = t^2 - t + 1$ et $\Delta_P < 0$. Donc l'intégrande est définie et continue sur $[0,1]$ donc I existe.

Effectuons la division euclidienne de $t^3 - t$ par $t^2 - t + 1$:

$$\begin{array}{r} t^3 - t \\ t^3 - t^2 + t \\ \hline t^2 - 2t \\ t^2 - t + 1 \\ \hline -t - 1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} t^2 - t + 1 \\ t + 1 \end{array} \right.$$

$$\text{Donc, } t^3 - t = (t^2 - t + 1)(t + 1) - t - 1. \text{ Donc } \frac{t^3-t}{t^2-t+1} = \frac{(t^2-t+1)(t+1)-t-1}{t^2-t+1} = t + 1 - \frac{t+1}{t^2-t+1}.$$

$$\text{Donc } \int_0^1 \frac{t^3-t}{t^2-t+1} dt = \int_0^1 t + 1 - \frac{t+1}{t^2-t+1} dt = \int_0^1 t + 1 dt - \int_0^1 \frac{t+1}{t^2-t+1} dt = \left[\frac{t^2}{2} + t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}(2t-1) + \frac{3}{2}}{t^2-t+1} dt = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(2t-1)}{t^2-t+1} dt - \frac{3}{2} \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1} dt}_{=J}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} [\ln(|t^2 - t + 1|)]_0^1 - \frac{3}{2} J = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} J.$$

Calculons J : $\Delta_P < 0$. Donc, transformons P grâce à sa forme canonique pour faire apparaître $u^2 + 1$:

$$P(t) = t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left[\frac{4}{3} \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \right] = \frac{3}{4} \left[\frac{\left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left(t - \frac{1}{2}\right)\right]^2}{u^2} + 1 \right] = \frac{3}{4} \left[\frac{\left[\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]^2}{u^2} + 1 \right]. \text{ Donc, } \int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1} dt =$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\frac{3}{4} \left[\frac{(2t-1)^2}{3} + 1 \right]} dt = \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{1}{\left[\frac{(2t-1)^2}{3} + 1 \right]} dt \stackrel{\substack{\text{CV} \\ u = \frac{2t-1}{\sqrt{3}}}}{=} \frac{4}{3} \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{\frac{u^2+1}{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} du = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{u^2+1} du = \frac{2}{\sqrt{3}} [Arctan(u)]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \right] = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

$du = \frac{2}{\sqrt{3}} dt \text{ i.e. } dt = \frac{\sqrt{3}}{2} du$
 $t=0 \Leftrightarrow u = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
 $t=1 \Leftrightarrow u = \frac{1}{\sqrt{3}}$

je reconnais le dérivée de Arctan

$$\text{Ainsi, } I = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$