Entrainement : Fonctions usuelles

On considère les deux fonctions f et g définies par

$$f(x) = \frac{1}{2}\arctan(\operatorname{sh} x) \quad \text{et} \quad g(x) = \arctan\left(\frac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch} x}\right)$$

Le but du problème est de montrer, par deux méthodes différentes, que $f = g$.

1) Première méthode (utilisant les dérivées)

a) Rappeler la relation liant $\operatorname{ch}^2 x$ et $\operatorname{sh}^2 x$ pour tout réel x.

b) Préciser et justifier le domaine de définition de f et de g.

c) Préciser les points où f est dérivable et calculer la dérivée de f.

d) Faire de même avec la fonction g.

e) En déduire que $f = g$.

2) Deuxième méthode (trigonométrique)

a) Donner un exemple de deux réels distincts avec $a \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $b \in]-\pi, \pi[$ et tels que $\tan a = \tan b$.

b) Simplifier l'écriture pour tout réel x de $\tan(2f(x)) = \operatorname{sh}(x)$.

On considère maintenant la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch} x}\right)$.

c) En étudiant la fonction h (variations, limites...), montrer que $h(x) \in]-1, 1[$ pour tout réel x.

d) En déduire que pour tout réel x, $g(x) \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$.

e) Exprimer pour tout $\theta \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, $\tan(2\theta)$ en fonction de $\tan\theta$.

f) En déduire que pour tout réel x une écriture simplifiée de $\tan(2g(x))$.

g) En déduire que $f = g$.

3) Une application de l'égalité entre f et g

a) En utilisant la définition de ch et sh, donner une expression simple de $\operatorname{ch}\left(\frac{\ln 3}{2}\right)$ et de $\operatorname{sh}\left(\frac{\ln 3}{2}\right)$.

b) En utilisant l'égalité $f(x) = g(x)$ pour $x = \frac{\ln 3}{2}$, la tangente de quel angle peut-on déduire ?