Entrainement : Fonctions usuelles - Correction

On considère les deux fonctions f et g définies par

$$f(x) = \frac{1}{2}\arctan(\operatorname{sh} x) \quad \text{et} \quad g(x) = \arctan\left(\frac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch} x}\right)$$

Le but du problème est de montrer, par deux méthodes différentes, que $f = g$.

1) Première méthode (utilisant les dérivées)

a) Rappeler la relation liant $\operatorname{ch}^2 x$ et $\operatorname{sh}^2 x$ pour tout réel x.

C'est une question de cours : on sait que $\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x$.

b) Préciser et justifier le domaine de définition de f et de g.

La fonction sh est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction arctan est également définie sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions sh et ch sont définies sur $\mathbb{R}$; $1 + \operatorname{ch}(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et la fonction arctan est également définie sur $\mathbb{R}$, donc la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$

c) Préciser les points où f est dérivable et calculer la dérivée de f.

La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction arctan est également dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\operatorname{sh}'(x)\arctan'(\operatorname{sh}(x)) \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{ch}(x)\frac{1}{1+\operatorname{sh}^2(x)} \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{ch}(x)\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} \\ &= \frac{1}{2\operatorname{ch}(x)} \end{aligned}$$

d) Faire de même avec la fonction g.

Les fonctions sh et ch sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et la fonction arctan est également dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\operatorname{sh}'(x)(1+\operatorname{ch}(x)) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}'(x)}{(1+\operatorname{ch}(x))^2}\frac{1}{1+\frac{\operatorname{sh}^2(x)}{(1+\operatorname{ch}(x))^2}} \\ &= \frac{\operatorname{ch}(x)(1+\operatorname{ch}(x)) - \operatorname{sh}^2(x)}{(1+\operatorname{ch}(x))^2 + \operatorname{sh}^2(x)} \\ &= \frac{\operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)}{1 + 2\operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}^2(x)} \\ &= \frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2\operatorname{ch}(x) + 2\operatorname{ch}^2(x)} \\ &= \frac{1}{2\operatorname{ch}(x)} \end{aligned}$$

e) En déduire que $f = g$.

Les fonctions f et g ont la même dérivée sur $\mathbb{R}$, donc il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que pour tour $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) = g(x) + c$. Comme $f(0) = g(0) = 0$, on en déduit que $c = 0$ donc $f = g$.

2) Deuxième méthode (trigonométrique)

a) Donner un exemple de deux réels distincts avec $a \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $b \in]-\pi, \pi[$ et tels que $\tan a = \tan b$.

On peut choisir $a = -\frac{\pi}{4}$ et $b = \frac{3\pi}{4}$.

b) Simplifier l'écriture pour tout réel x de $\tan(2f(x)) = \operatorname{sh}(x)$.

On a pour tour réel x, $2f(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x))$, donc $\tan((2f(x)) = \tan(\arctan(\operatorname{sh}(x))) = \operatorname{sh}(x)$.

On considère maintenant la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch} x}\right)$.

c) En étudiant la fonction h (variations, limites...), montrer que $h(x) \in]-1, 1[$ pour tout réel x.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\operatorname{sh}'(x)(1+\operatorname{ch}(x)) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}'(x)}{(1+\operatorname{ch}(x))^2} \\ &= \frac{\operatorname{ch}(x)(1+\operatorname{ch}(x)) - \operatorname{sh}^2(x)}{(1+\operatorname{ch}(x))^2} \\ &= \frac{1}{1+\operatorname{ch}(x)} \end{aligned}$$

On en déduit que $h(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On calcule les limites de h en $+\infty$ et en $-\infty$. Pour cela on écrit :

$$h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2 + e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + 2e^{-x} + e^{-2x}} = \frac{-1 + e^{2x}}{1 + e^{2x} + 2e^x}$$

On en déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -1$. En particulier $h(x) \in]-1; 1[$ pour tout x réel.

d) En déduire que pour tout réel x, $g(x) \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$.

Comme la fonction $\arctan :]-1; 1[\to]-\pi/4; \pi/4[$ on a $g(x) \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$.

e) Exprimer pour tout $\theta \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, $\tan(2\theta)$ en fonction de $\tan\theta$.

$$\begin{aligned} \tan(2\theta) &= \frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} \\ &= \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{2\cos^2(\theta) - 1} \\ &= \frac{2\tan(\theta)\cos^2(\theta)}{2\cos^2(\theta) - 1} \\ &= \frac{2\tan(\theta)\frac{1}{1+\tan^2(\theta)}}{2\frac{1}{1+\tan^2(\theta)} - 1} \\ &= \frac{2\tan(\theta)}{2 - 1 - \tan^2(\theta)} \\ &= \frac{2\tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)} \end{aligned}$$

f) En déduire que pour tout réel x une écriture simplifiée de $\tan(2g(x))$.

On utilise la formule précédente avec $\theta = \arctan(h(x))$

$$\begin{aligned}
\tan(2g(x)) &= \tan(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)} \\
&= \frac{2h(x)}{1-(h(x))^2} \\
&= 2\frac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch} x}\frac{1}{1-\frac{\operatorname{sh}^2 x}{(1+\operatorname{ch} x)^2}} \\
&= 2\frac{\operatorname{sh} x}{(1+\operatorname{ch} x)}\frac{(1+\operatorname{ch} x)^2}{(1+2\operatorname{ch} x+\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x)} \\
&= \operatorname{sh} x
\end{aligned}$$

g) En déduire que $f = g$.

On a donc $\tan(2f(x)) = \tan(2g(x))$ et $2f(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $2g(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc $2f(x) = 2g(x)$.

3) Une application de l'égalité entre f et g

a) En utilisant la définition de ch et sh, donner une expression simple de $\operatorname{ch}\left(\frac{\ln 3}{2}\right)$ et de $\operatorname{sh}\left(\frac{\ln 3}{2}\right)$.

On a :

$$\operatorname{ch}\left(\frac{\ln 3}{2}\right) = \frac{e^{\frac{\ln 3}{2}}+e^{-\frac{\ln 3}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{sh}\left(\frac{\ln 3}{2}\right) = \frac{e^{\frac{\ln 3}{2}}-e^{-\frac{\ln 3}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

b) En utilisant l'égalité $f(x) = g(x)$ pour $x = \frac{\ln 3}{2}$, la tangente de quel angle peut-on déduire ?

On en déduit :

$$f(x) = \frac{1}{2}\arctan(\operatorname{sh}\left(\frac{\ln 3}{2}\right)) = \frac{1}{2}\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

$$g(x) = \arctan(\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{2\sqrt{3}}{3}}) = \arctan(\frac{1}{2+\sqrt{3}})$$

On en déduit que

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$