CORRIGE TD 9 Partie 2
EXERCICES EQUIVALENTS

Ex 1 . VRAI ou FAUX

1. $\left(x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ admet un $DL_0(0)$. Faux car $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *n'a pas de limite quand* $x \to 0$.
2. $\left(x \mapsto \sqrt{x+1}\right)$ admet un $DL_1(-1)$.. Faux $car ce tte\ fonction\ n'est\ pas\ dérivable\ en -1.$
3. La fonction $\left(x \mapsto \sqrt{x^5}\right)$ admet un $DL_2(0)$. Vrai car $\frac{5}{2} > 2$ donc $\sqrt{x^5} = o_0(x^2)$.
4. La fonction $f : \left(x \mapsto \sqrt{x^5}\right)$ admet un $DL_3(0)$. Faux car d'après ce qui précède , si f admettait un $DL_3(0)$ alors ce $DL_3(0)$ aurait la forme $f(x) = ax^3 + o_0(x^3)$ et a serait la limite finie en 0 de $\frac{\sqrt{x^5}}{x^3}$ ce qui n'est pas possible.
5. $f \sim_a g$ *et* f *et* g *dérivables au voisinage de* $a \Rightarrow f' \sim_a g'$. Faux comme le prouve le contre-exemple suivant : $\cos(x) \sim_0 1$ *mais* $-\sin(x) \sim_0 -x \neq 0$
6. $f(x) = o_a(x) \Rightarrow f(x)^2 = o_a(x^2)$. Vrai car $f(x) = x o_0(1) \Longrightarrow f(x)^2 = x^{2 o_0(1) 2} = x^{2 o_0(1)}$.
7. $f(x) \sim_0 h(x) \Rightarrow x f(x) \sim_0 (x+1) h(x)$. Faux car $x \not\sim_0 (x+1)$
8. $ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$ Vrai car $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ et $\ln(t) \sim_1 (t-1)$ donc par composition, $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \sim_{+\infty} \left(1 + \frac{1}{x} - 1\right)$
9. $e^{x^2-4x+1} \sim_{+\infty} e^{x^2}$. Faux car $\frac{e^{x^2-4x+1}}{e^{x^2}} = e^{-4x+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \neq 1$
10. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Vrai car $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}$ et $\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$ donc, $\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1 \sim_{+\infty} 2$ et $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$
11. $\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} \sim_{+\infty} e^{ab}$ vrai car $\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{axln\left(1+\frac{b}{x}\right)} = e^{\frac{bxln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{a}{x}}\frac{a}{x}} = e^{ab\frac{ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{a}{x}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^{ab} \in \mathbb{R}^*$.
12. $\frac{e^{3x}}{e^{2x}-1} \sim_0 e^x$. Faux car $\frac{e^{3x}}{(e^{2x}-1)e^x} = \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \infty \neq 1$
13. $\sin\left(\frac{1}{n+2}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$. Vrai mais il y a un équivalent plus simple ! $\frac{1}{n+2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ et $\sin(t) \sim_0 (t)$ donc par composition, $\sin\left(\frac{1}{n+2}\right) \sim_{+\infty} \left(\frac{1}{n+2}\right)$. De plus, $(n+2) \sim_{+\infty} n$ donc $\frac{1}{n+2} \sim_{+\infty} \frac{1}{n} \sim_{+\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$.
14. Il existe un réel α strictement positif tq : $xln(x) = o_0(x^\alpha)$ vrai $\alpha = \frac{1}{2}$ convient car $\frac{xln(x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\ln(x) \overset{cc}{\underset{x\to0}{\longrightarrow}} 0$
15. Pour tout réel α, $e^{\frac{1}{x-1}} = o_{1^-}((1-x)^\alpha)$. vrai car $|X|^\alpha e^X \overset{cc\ si\ \alpha>0}{\underset{X\to-\infty}{\longrightarrow}} 0$ Et on compose par $X = \frac{1}{x-1} \xrightarrow[x\to1^-]{} -\infty$
16. $x^2 \ln(x) \ll_0 \frac{x}{\ln(x)} \ll_0 x\ln(x) \ll_0 x \ll_0 1 \ll_0 \frac{ln^3(x)}{x} \ll_0 \frac{\ln(x)}{x^3}$. Faux *car* $x\ln(x) \gg_0 x$

Ex 2 EQUIVALENTS

1) Déterminer un équivalent simple au voisinage de 0 de $f(x)$. Que peut-on en déduire sur f ?

1. $f(x) = \frac{x^4 - \tan^2(x)\sqrt[3]{\sqrt[5]{1-x}-1}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \ln(x)}$. Déterminer un équivalent simple au voisinage de 0 de $f(x)$.

$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{0}{(+\infty)} = ????$ *il me manque le signe du numérateur pour conclure.* .

■Posons $N(x) = x^4 - \tan^2(x)\sqrt[3]{\sqrt[5]{1-x}-1}$

$\sqrt[5]{1-x} - 1 \sim_0 -\frac{1}{5}x$; par conséquent, $\sqrt[3]{\sqrt[5]{1-x}-1} \sim_0 \left(-\frac{1}{5}x\right)^{\frac{1}{3}}$. Or $\tan(x) \sim_0 x$; par conséquent, $\tan^2(x) \sim_0 x^2$

et $\tan^2(x)\sqrt[3]{\sqrt[5]{1-x}-1} \sim_0 \left(-\frac{1}{5}x\right)^{\frac{1}{3}} x^2 = -\frac{1}{\sqrt[3]{5}} x^{\frac{1}{3}+2} = -\frac{1}{\sqrt[3]{5}} x^{\frac{7}{3}}$. Comme $\frac{7}{3} < 4$, $x^4 = o_0\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{5}} x^{\frac{7}{3}}\right)$.

J'en déduis que $N(x) \sim_0 -\frac{1}{\sqrt[3]{5}} x^{\frac{7}{3}}$ et par conséquent, $N(x)$ est du signe de $(-x)$ au voisinage de 0. Et par conséquent,

$\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to0^-} f(x) = +\infty$

■Posons $D(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \ln(x)$.

$\left(x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ est bornée et $\lim_{x\to0} -\ln(x) = +\infty$. J'en déduis que $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = o_0(-\ln(x))$ et $D(x) \sim_0 -\ln(x)$.

■Je peux alors assurer que $f(x) \sim_0 \left(\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{5}} x^{\frac{7}{3}}}{\ln(x)}\right)$.

2. $f(x) = \frac{e^{2x} - \ln(e+x)}{x^3 - sh^3(x)}$. Déterminer un équivalent simple au voisinage de 0 de $f(x)$. Que peut-on en déduire sur f ?

■Posons $N(x) = e^{2x} - \ln(e+x)$.

$\lim_{x\to0} e^{2x} = 1 = \lim_{x\to0} \ln(e+x)$. Donc aucun des deux termes n'est prédominant au numérateur. Comme il est interdit de sommer (et soustraire) les équivalents, je vais remplacer chacun des termes par un « petit » $DL(0)$ car je suis autorisée à sommer les DL.

D'une part, $\lim_{x\to0} 2x = 0$ et $e^u = 1 + u + u\varepsilon(u)$ $\lim_{u\to0} \varepsilon(u) = 0$. Alors $e^{2x} = 1 + 2x + (2x)\varepsilon(2x)$

et par composition, $\lim_{x\to0} \varepsilon(2x) = 0$. Donc, $e^{2x} = 1 + 2x + o_0(x)$.

D'autre part, $\ln(e+x) = \ln\left(e\left(1 + \frac{x}{e}\right)\right) = \ln(e) + \ln\left(1 + \frac{x}{e}\right) = 1 + \ln\left(1 + \frac{x}{e}\right)$

Or $\lim_{x\to0} \frac{x}{e} = 0$ et $\ln(1+u) = u + u\theta(u)$ $\lim_{u\to0} \theta(u) = 0$. Donc $\ln\left(1 + \frac{x}{e}\right) = \frac{x}{e} + \left(\frac{x}{e}\right)\theta(2x)$ *et par composition*, $\lim_{x\to0} \theta\left(\frac{x}{e}\right) = 0$.

Donc, $\ln\left(1 + \frac{x}{e}\right) = \frac{x}{e} + o_0(x)$.

J'en conclus que $N(x) = 1 + 2x + o_0(x) - \left(1 + \frac{x}{e} + o_0(x)\right) = \left(2 - \frac{1}{e}\right)x + o_0(x) \sim_0 \left(2 - \frac{1}{e}\right)x$.

■Posons $D(x) = x^3 - \mathrm{sh}^3(x)$.

$x^3 \sim_0 \mathrm{sh}^3(x)$. Donc aucun des deux termes n'est prédominant au numérateur. Comme il est interdit de sommer (et soustraire) les équivalents, je vais remplacer chacun des termes par un « petit » $DL(0)$.

$sh^3(x) = \left(x + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right)^3 = x^3\left(1 + \underbrace{\frac{x^2}{6} + o_0(x^2)}_{u(x)}\right)^3$. Or, $\lim\limits_{x\to0} u(x) = 0$ et $(1+u)^3 = 1 + 3u + u\sigma(u)\ tq \lim\limits_{u\to0}\sigma(u) = 0$.

Alors $(1 + u(x))^3 = 1 + 3u(x) + u(x)\sigma(u(x))\ et \lim\limits_{u\to0}\sigma(u(x)) = 0$. Donc, $\left(1 + \frac{x^2}{6} + o_0(x^2)\right)^3 = 1 + \frac{x^2}{2} + o_0(x^2)$ et $sh^3(x) = x^3 + \frac{x^5}{2} + o_0(x^5)$. J'en déduis que $D(x) = x^3 - x^3 - \frac{x^5}{2} + o_0(x^5) \sim_0 -\frac{x^5}{2}$.

■ Je peux alors assurer que $f(x) \sim_0 \left(\frac{\left(2-\frac{1}{e}\right)x}{-\frac{x^5}{2}}\right) = \frac{-2\left(2-\frac{1}{e}\right)}{x^4}$. J'en déduis que $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty$.

3. $f(x) = Arcsin(\pi\sin(x))$. Déterminer un équivalent simple au voisinage de 0 de $f(x)$. Que peut-on en déduire sur f ?

$\lim\limits_{x\to0} \pi sin(x) = 0$. Or, $Arcsin(t) \sim_{t\approx0} t$. Donc par composition à droite d'un équivalent, $Arcsin(\pi sin(x)) \sim_{x\approx0} \pi sin(x)$.
De plus, $\sin(x) \sim_{x\approx0} x$. Et ainsi, $f(x) \sim_{x\approx0} \pi x$.
J'en déduis que f admet le $DL_1(0)\ suivant$: $f(x) = \pi x + o_0(x)$; comme $0 \in Df$, cela signifie que f est dérivable en 0 et $f'(0) = \pi$.

4. $f(x) = \ln(\ln(e + x))$. Déterminer un équivalent simple au voisinage de 0 de $f(x)$

1ère méthode : $\lim\limits_{x\to0} \ln(e + x) = 1$. Or, $ln(t) \sim_{t\approx1} (t-1)$.
Donc par composition à droite d'un équivalent, $\ln(\ln(e+x)) \sim_{x\approx0} \ln(e+x) - 1$.
De plus, D'autre part, $\ln(e+x) = \ln\left(e\left(1+\frac{x}{e}\right)\right) = \ln(e) + \ln\left(1+\frac{x}{e}\right) = 1 + \ln\left(1+\frac{x}{e}\right) = 1 + \frac{x}{e} + o_0(x)$.
Donc, $\ln(e+x) - 1 \sim_{x\approx0} \frac{x}{e}$. Ainsi, $f(x) \sim_{x\approx0} \frac{x}{e}$.

2ème méthode : f est dérivable en et autour de 0, $f'(x) = \frac{1}{e+x}\frac{1}{\ln(e+x)}$ et $f'(0) = \frac{1}{e}$. Par conséquent, $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{e}$ (car $f(0) = 0$). J'en déduis que $\frac{f(x)}{x} \sim_{x\approx0} \frac{1}{e}$ et il s'en suit, en multipliant de part et d'autre par x, que : $f(x) \sim_{x\approx0} \frac{x}{e}$.

5. $f(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) - 2\sqrt{x}$. Déterminer un équivalent simple au voisinage de 0 de $f(x)$. En déduire que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

■ $0 \in Df$. Mais à cause de la fonction racine carrée qui est définie et non dérivable en 0, je ne peux pas savoir si f est dérivable en 0.

■ $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = 1$. Or, $ln(t) \sim_{t\approx1} (t-1)$. Donc par composition à droite d'un équivalent, $\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) \sim_{x\approx0^+} \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} - 1$.
Or, $\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} - 1 = \frac{2\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = \underbrace{\frac{1}{1-\sqrt{x}}}_{\varphi(x)\xrightarrow[x\to0^+]{}1} 2\sqrt{x} \sim_{x\approx0^+} 2\sqrt{x}$. Donc, aucun des deux termes de $f(x)$ n'est prédominant. Je vais donc remplacer chacun de ces termes par un « petit » $DA(0)$

■$\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = (1+\sqrt{x})\frac{1}{1-\sqrt{x}}$. Or, Or $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x} = 0$ et $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^3\rho(u)\ et \lim\limits_{u\to0}\rho(u) = 0$. Donc $\frac{1}{1-\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} + (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{x})^3 + (\sqrt{x})^3\rho(\sqrt{x})\ et\ par\ composition, \lim\limits_{x\to0}\rho(\sqrt{x}) = 0$.
Ainsi, $\frac{1}{1-\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} + x + x\sqrt{x} + o_0(x\sqrt{x})$
et $\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = (1+\sqrt{x})\frac{1}{1-\sqrt{x}} = (1+\sqrt{x})(1 + \sqrt{x} + x + x\sqrt{x} + o_0(x\sqrt{x})) = 1 + 2\sqrt{x} + 2x + 2x\sqrt{x} + o_0(x\sqrt{x})$. Donc,

■$\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) = \ln\left(1 + \underbrace{2\sqrt{x} + 2x + 2x\sqrt{x} + o_0(x\sqrt{x})}_{u(x)}\right)$. Or $\lim\limits_{x\to0} u(x) = 0$ et $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + u^3\theta(u)\ \lim\limits_{u\to0}\theta(u) = 0$.

Donc $\ln(1+u(x)) = u(x) - \frac{u^2(x)}{2} + \frac{u(x)^3}{3} + u(x)^3\theta(u(x))\ \ et\ par\ composition, \lim\limits_{x\to0}\theta(u(x)) = 0$. De plus,

$$u(x) = 2\sqrt{x} + 2x + 2x\sqrt{x} + o_0(x\sqrt{x})$$
$$(u(x))^2 = 4x + 8x\sqrt{x} + o_0(x\sqrt{x})$$
$$(u(x))^3 = 8x\sqrt{x} + o_0(x\sqrt{x}) \sim_0 8x\sqrt{x}.$$

Donc, $\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) = 2\sqrt{x} + +2x + 2x\sqrt{x} - \frac{(4x+8x\sqrt{x})}{2} + \frac{8x\sqrt{x}}{3} + o_0(x\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + o_0(x\sqrt{x})$.

■$f(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) - 2\sqrt{x} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + o_0(x\sqrt{x})$. $Et\ ainsi, f(x) \sim_0 \frac{2}{3}x\sqrt{x}$.

■ Comme $x\sqrt{x} = o_0(x)$, $f(x) = o_0(x) = \underbrace{0}_{f(0)} + \underbrace{0}_{f'(0)}x + o_0(x)$; comme $0 \in Df$, cela signifie que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

6. $f(x) = x^x - Arctan(xlnx) - 1$. Déterminer un équivalent simple au voisinage de 0 de $f(x)$

$f(x) = e^{xln(x)} - Arctan(xlnx) - 1$.

■ $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) \overset{cc}{=} 0$. Or, $Arctan(t) \sim_{t\approx 0} t$ et $e^t - 1 \sim_{t\approx 0} t$.
Donc par composition à droite d'un équivalent, $\text{Arctan}(x\ln(x)) \sim_{x\approx 0^+} x\ln(x) \sim_{x\approx 0^+} e^{x\ln(x)} - 1$. Par conséquent, aucun des deux termes de f n'est prédominant devant l'autre. Utilisons un « petit » $DL(0)$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) \overset{cc}{=} 0$ et $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + t^2\delta(t)$ et $\lim\limits_{t\to 0} \delta(t) = 0$. Donc, $e^{x\ln(x)} = 1 + x\ln(x) + \frac{(x\ln(x))^2}{2} + (x\ln(x))^2\delta(x\ln(x))$ et $\lim\limits_{x\to 0} \delta(x\ln(x)) = 0$. Autrement dit, $e^{x\ln(x)} = 1 + x\ln(x) + \frac{(x\ln(x))^2}{2} + o_0\left((x\ln(x))^2\right)$.

De même, $Arctan(t) = t - \frac{t^3}{3} + t^3\beta(t)$ et $\lim\limits_{t\to 0} \beta(t) = 0$. Donc, $Arctan(x\ln(x)) = x\ln(x) - \frac{(x\ln(x))^3}{3} + o_0\left((x\ln(x))^3\right) = x\ln(x) + o_0\left((x\ln(x))^2\right)$.

Ainsi, $f(x) = 1 + x\ln(x) + \frac{(x\ln(x))^2}{2} - x\ln(x) - 1 + o_0\left((x\ln(x))^2\right)$. Ainsi, $f(x) \sim_0 \frac{(x\ln(x))^2}{2}$.

7. $f(x) = \ln(\sin(x))$

$\sin(x) = x + xo_0(1) = x(1 + o_0(1))$. Donc, $\ln(\sin(x)) = \ln\left(x(1 + o_0(1))\right) = \ln(x) + \ln(1 + o_0(1)) \sim_0 \ln(x)$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} \ln(1 + o_0(1)) = 0 \end{cases}$ donc $\ln(1 + o_0(1)) = o_0(\ln(x))$

8. $f(x) = \ln(2 + x + e^x)$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ln(3) \in \mathbb{R}^*$ donc $f(x) \sim_0 \ln(3)$

9. $f(x) = \ln(2 + x - e^x)$

$\lim\limits_{x\to 0} 2 + x - e^x = 1$ et $\ln(t) \sim_1 t - 1$ donc par composition à droite, $f(x) \sim_0 2 + x - e^x - 1$.

Or, $2 + x - e^x - 1 = 1 + x - e^x = 1 + x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 o_0(1)\right) = \frac{x^2}{2} + x^2 o_0(1) \sim_0 \frac{x^2}{2}$. Ainsi, $f(x) \sim_0 \frac{x^2}{2}$.

10. $f(x) = \frac{2}{\sin^2(x)} - \frac{1}{1-\cos(x)}$.

$\frac{2}{\sin^2(x)} \sim_0 \frac{2}{x^2}$ et $\frac{1}{1-\cos(x)} \sim_0 \frac{1}{\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{x^2}$. Donc aucun des deux termes de cette somme n'est négligeable devant l'autre. Utilisons les développements limités pour préciser :

D'une part, $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)$; donc, $\sin^2(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o_0(x^4) = x^2\left(1 - \frac{x^2}{3} + o_0(x^2)\right)$. Par conséquent,

$$\frac{2}{\sin^2(x)} = \frac{2}{x^2\left(1 - \frac{x^2}{3} + o_0(x^2)\right)} = \frac{2}{x^2}\frac{1}{1 - \frac{x^2}{3} - o_0(x^2)} \underbrace{=}_{\substack{car \\ \frac{1}{1-u} = 1 + u + o_0(u) \\ et\ u(x) = \frac{x^2}{3} + o_0(x^2) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}} \frac{2}{x^2}\left(1 + \frac{x^2}{3} + o_0(x^2)\right).$$

D'autre part, $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)$; donc, $1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o_0(x^4) = \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{12} + o_0(x^2)\right)$. Par conséquent,

$$\frac{1}{1-\cos(x)} = \frac{2}{x^2\left(1 - \frac{x^2}{12} + o_0(x^2)\right)} = \frac{2}{x^2}\frac{1}{1 - \frac{x^2}{12} + o_0(x^2)} = \frac{2}{x^2}\left(1 + \frac{x^2}{12} + o_0(x^2)\right).$$

Alors, $f(x) = \frac{2}{x^2}\left(1 + \frac{x^2}{3} + o_0(x^2)\right) - \frac{2}{x^2}\left(1 + \frac{x^2}{12} + o_0(x^2)\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} + o_0(1)$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) \sim_0 \frac{1}{2}$.

11. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$

$\frac{1}{\ln(1+x)} \sim_0 \frac{1}{x}$. Donc aucun des deux termes de cette somme n'est négligeable devant l'autre. Utilisons les développements limités pour préciser : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_0(x^2) = x\left(1 - \frac{x}{2} + o_0(x)\right)$. Donc, $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x\left(1 - \frac{x}{2} + o_0(x)\right)} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + o_0(x)}\right)$

$f(x) = \frac{1}{x}\left(1 - \left(1 + \frac{x}{2} + o_0(x)\right)\right) = -\frac{1}{2} + o_0(1)$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) \sim_0 -\frac{1}{2}$.

12. $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1+x}}$. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ pour x au voisinage de 0.

$1 - \sqrt{1+x} \sim_0 -\frac{1}{2}x$. Donc, $f(x) \sim_0 \sqrt{-\frac{1}{2}x}$.

13. $f(x) = \sqrt[p]{1+px} - \sqrt[q]{1+qx} + \left(\frac{p-q}{2}\right)x^2$

$$\sqrt[p]{1+px} = (1+px)^{\frac{1}{p}} \underbrace{=}_{\substack{car\ avec\ \alpha = \frac{1}{p} \\ (1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}u^3 + o_0(u^3) \\ et\ u(x) = px \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}} 1 + \frac{1}{p}(px) + \left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p} - 1\right)\frac{(px)^2}{2} + \left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p} - 1\right)\left(\frac{1}{p} - 2\right)\frac{(px)^3}{6} + o_0(x^3)$$

$\sqrt[p]{1+px} = 1 + \frac{1}{p}(px) + \frac{1-p}{2}x^2 + \frac{(1-p)(1-2p)}{6}x^3 + o_0(x^3)$

$f(x) = \sqrt[p]{1+px} - \sqrt[q]{1+qx} + \left(\frac{p-q}{2}\right)x^2$

$f(x)=1+x+\frac{1-p}{2}x^2+\frac{(1-p)(1-2p)}{6}x^3-\left(1+x+\frac{1-q}{2}x^2+\frac{(1-q)(1-2q)}{6}x^3\right)+\left(\frac{p-q}{2}\right)x^2+o_0(x^3)$

$f(x)=\left(\frac{(1-p)(1-2p)}{6}-\frac{(1-q)(1-2q)}{6}\right)x^3+o_0(x^3)=\frac{(2p^2-2q^2+3q-3p)}{6}x^3+o_0(x^3)$. Donc, $f(x)\sim_0\frac{(p-q)(2p+2q-3)}{6}x^3$.

14. $f(x)=\ln(3e^x+e^{-x})-2\ln(2)$

$f(x)=\ln(3e^x+e^{-x})-2\ln(2)=\ln\left(3\left(1+x+o_0(x)\right)+1-x+o_0(x)\right)-2\ln(2)=\ln\left(4+2x+o_0(x)\right)-2\ln(2)=$ $\ln\left(4\left(1+\frac{x}{2}+o_0(x)\right)\right)-2\ln(2)=\ln\left(1+\frac{x}{2}+o_0(x)\right)$. Or, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2}+o_0(x)=0$ *et* $\ln(1+u)\sim_0 u$.

Donc, $\ln\left(1+\frac{x}{2}+o_0(x)\right)\sim_0\frac{x}{2}+o_0(x)\sim_0\frac{x}{2}$. Ainsi, $f(x)\sim_0\frac{x}{2}$.

15. $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{1+x}}-\sqrt{2}$

$f(x)=\sqrt{1+\sqrt{1+x}}-\sqrt{2}=\frac{1+\sqrt{1+x}-2}{\sqrt{1+\sqrt{1+x}}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+\sqrt{1+x}}+\sqrt{2}}=\frac{(1+x)-1}{\left(\sqrt{1+\sqrt{1+x}}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\frac{x}{\left(\sqrt{1+\sqrt{1+x}}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{1+x}}+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\in\mathbb{R}^*$, on peut assurer que $\frac{1}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{1+x}}+\sqrt{2}\right)}\sim_0\frac{1}{4\sqrt{2}}$ et ainsi, $f(x)\sim_0\frac{x}{4\sqrt{2}}$.

16. $f(x)=\mathrm{sh}\,(x)^{\frac{1}{\ln(x)}}$

$f(x)=\mathrm{sh}\,(x)^{\frac{1}{\ln(x)}}=e^{\frac{1}{\ln(x)}\ln(sh(x))}$. Posons $h(x)=\frac{1}{\ln(x)}\ln(sh(x))$.

$$\frac{1}{\ln(x)}\ln(sh(x))=\frac{1}{\ln(x)}\ln\left(x+\frac{x^3}{6}+x^3o_0(1)\right)=\frac{1}{\ln(x)}\ln\left(x\left(1+\frac{x^2}{6}+x^2o_0(1)\right)\right)=\frac{1}{\ln(x)}\left[\underbrace{\ln(x)}_{\xrightarrow[x\to 0]{}-\infty}+\underbrace{\ln\left(1+\frac{x^2}{6}+x^2o_0(1)\right)}_{\xrightarrow[x\to 0]{}0}\right]\sim_0\frac{\ln(x)}{\ln(x)}=1\,.$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=e\in\mathbb{R}^*$. J'en conclus que $f(x)\sim_0 e$.

17. $f(x)=x^x-(sinx)^{sinx}$

$f(x)=x^x-(sinx)^{sinx}=e^{x\ln(x)}-e^{\sin(x)\ln(\sin(x))}$.

$$\begin{aligned}\sin(x)\ln(\sin(x))&=\left(x-\frac{x^3}{6}+x^3o_0(1)\right)\ln\left(x\left(1-\frac{x^2}{6}+x^2o_0(1)\right)\right)\\&=\left(x-\frac{x^3}{6}+x^3o_0(1)\right)\left[\ln(x)+\ln\left(1-\frac{x^2}{6}+x^2o_0(1)\right)\right]\\&=\left(x-\frac{x^3}{6}+x^3o_0(1)\right)\left[\ln(x)+o_0(1)\right]\\&=x\ln(x)-\frac{x^3}{6}\ln(x)+x^3\ln(x)o_0(1)\end{aligned}$$

Alors, $e^{\sin(x)\ln(\sin(x))}=e^{x\ln(x)-\frac{x^3}{6}\ln(x)+x^3\ln(x)o_0(1)}=e^{x\ln(x)}e^{-\frac{x^3}{6}\ln(x)+x^3\ln(x)o_0(1)}$.

Donc, $f(x)=e^{x\ln(x)}\left(1-e^{-\frac{x^3}{6}\ln(x)+x^3\ln(x)o_0(1)}\right)\underset{\substack{car\\ \lim\limits_{x\to 0}e^{x\ln(x)}=1}}{\sim_0}1-e^{-\frac{x^3}{6}\ln(x)+x^3\ln(x)o_0(1)}$

Alors, $f(x)\underset{\substack{car\\ 1-e^u\sim_0-u\\ et\ u(x)=-\frac{x^3}{6}\ln(x)+x^3\ln(x)o_0(1)\xrightarrow[x\to 0]{}0}}{\sim_0}\frac{x^3}{6}\ln(x)-x^3\ln(x)\,o_0(1)$. Et ainsi, $f(x)\sim_0\frac{x^3}{6}\ln(x)$.

18. $f(x)=e^{2\cos(x)-x^2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\ln(x)}$ Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ pour x *au* voisinage de $+\infty$.

$f(x)=e^{2\cos(x)-x^2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\ln(x)}=e^{2\cos(x)-x^2+\ln(x)}\underbrace{e^{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}1}\sim_{+\infty}e^{2\cos(x)-x^2+\ln(x)}=xe^{2\cos(x)-x^2}$.

19. $f(x)=\ln(ch(x))$ .Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ pour x au voisinage de $+\infty$.

$f(x)=\ln(e^x+e^{-x})-\ln(2)=\ln(e^x(1+e^{-2x}))-\ln(2)=x+\ln(1+e^{-2x})-\ln(2)\sim_{+\infty}x$

20. $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ .Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ pour x au voisinage de $+\infty$.

$1+x\sim_{+\infty}x$;donc, $(1+x)^{\frac{1}{2}}\sim_{+\infty}x^{\frac{1}{2}}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{2}}.=+\infty$ donc, $1=o_{+\infty}(\sqrt{1+x})$. par conséquent, $1+\sqrt{1+x}\sim_{+\infty}x^{\frac{1}{2}}$ et il s'en suit que $f(x)\sim_{+\infty}\sqrt{x^{\frac{1}{2}}}=x^{\frac{1}{4}}$

21. $f(x)=\sqrt{x^2+ax+b}-x$ où a et b réels. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ pour x au voisinage de $+\infty$.

$$f(x)=\sqrt{x^2+ax+b}-x=\frac{x^2+ax+b-x^2}{\sqrt{x^2+ax+b}+x}==\frac{x\left(a+\frac{b}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}+1\right)}=\frac{\left(a+\frac{b}{x}\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}+1\right)}\sim_{+\infty}\begin{cases}\frac{a}{2}\ si\ a\neq 0\\ \frac{b}{2x}\ si\ a=0\ et\ b\neq 0.\\ 0\ si\ a=b=0\end{cases}$$

22. $f(x)=\sqrt{x^2+x+2}-(ax+b)$ où a et b réels. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ pour x au voisinage de -∞.

$f(x)=\sqrt{x^2+x+2}-(ax+b)=-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+a+\frac{b}{x}\right)$

$Si\ 1+a \neq 0\ alors\ f(x) \sim_{-\infty} -(1+a)x\ car\ \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+a+\frac{b}{x} = 1+a \in \mathbb{R}^*$.

$Si\ 1+a=0\ alors\ f(x) = -x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-1+\frac{b}{x}\right) = -x\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\left(1-\frac{b}{x}\right)^2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1-\frac{b}{x}} = -x\frac{\frac{(1+2b)}{x}+\frac{2-b^2}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1-\frac{b}{x}}$

Si $a=-1\ et\ b \neq -\frac{1}{2}\ alors\ f(x) \sim_{-\infty} -\frac{x\frac{(1+2b)}{x}}{2} = -\left(\frac{1}{2}+b\right)\ car\ \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1-\frac{b}{x} = 2 \in \mathbb{R}^*$ et $\frac{2-b^2}{x^2} = o_{-\infty}(\frac{(1+2b)}{x})$

Si $a=-1\ et\ b=-\frac{1}{2}\ alors\ f(x) = -x\frac{\frac{2-\frac{1}{4}}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1+\frac{1}{2x}} \sim_{-\infty} -x\frac{\frac{7}{4}}{2} = -\frac{7}{8x}$.

23. $f(x) = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\sqrt[3]{x-\sin(x)\times\ln(x)}}$. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ pour x au voisinage de $+\infty$.

D'une part , $\forall x>0, |\sin(x)\times\ln(x)| = |\sin(x)||\ln(x)| \leq |\ln(x)|$. Donc, $\sin(x)\times\ln(x) = O_{-\infty}(\ln(x))$Or , $\ln(x) = o_{+\infty}(x)$. Donc $\sin(x)\ln(x) = o_{+\infty}(x)$. par conséquent, $x-\sin(x)\times\ln(x) \sim_{+\infty} x\ et\ ainsi,\ f(x) = (x-\sin(x)\times\ln(x))^{-\frac{1}{3}} \sim_{+\infty} x^{-\frac{1}{3}}$.

D'autre part,

24. $f(x) = \text{Arctan}(x)+\frac{\pi}{2}$. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ pour x au voisinage de $-\infty$.

$\text{Arctan}(x)+\frac{\pi}{2} = Arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0\ et\ Arctan(u) \sim_0 u. Donc, Arctan\left(\frac{1}{x}\right) \sim_{-\infty} \frac{1}{x}$. Ainsi, $f(x) \sim_{-\infty} \frac{1}{x}$

25. $f(x) = (\ln(x))^2\left(\sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)-\sin\left(\frac{1}{\ln(x+1)}\right)\right)$. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ pour x au voisinage de $+\infty$.

$\sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)-\sin\left(\frac{1}{\ln(x+1)}\right) = 2\sin\left(\frac{1}{2\ln(x)}-\frac{1}{2\ln(x+1)}\right)\cos\left(\frac{1}{2\ln(x)}+\frac{1}{2\ln(x+1)}\right)$. Alors,

$\sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)-\sin\left(\frac{1}{\ln(x+1)}\right) \sim_{+\infty} 2\sin\left(\frac{1}{2\ln(x)}-\frac{1}{2\ln(x+1)}\right)\ puisque\ \lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{1}{2\ln(x)}+\frac{1}{2\ln(x+1)}\right) = 1$

$\sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)-\sin\left(\frac{1}{\ln(x+1)}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{\ln(x)}-\frac{1}{\ln(x+1)}\ car\ \sin(u) \sim_0 u\ et\ u(x) = \frac{1}{\ln(x)}-\frac{1}{\ln(x+1)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$

$Or, \frac{1}{\ln(x)}-\frac{1}{\ln(x+1)} = \frac{\ln(x+1)-\ln(x)}{\ln(x)\ln(x+1)} = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)\left(\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)} \sim_{+\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^2}$ car au numérateur, $\ln(1+u) \sim_0 u\ et\ u(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et par conséquent, $N(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$ au dénominateur , $\ln(x) \gg_{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ puisque $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0\ et\ \ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et par conséquent, $D(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{(\ln(x))^2}$.

J'en déduis que $f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$ et ensuite que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

26. $f(x) = \tan(x)$. Déterminer un équivalent simple au voisinage de a de $\frac{\pi}{2}^-$

Posons $t = x-\frac{\pi}{2}\ \ et\ g(t) = f\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$. Alors $x = t+\frac{\pi}{2}, x\to\frac{\pi}{2}\ sietssi\ t\to 0\ \ et\ f(x) = g\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

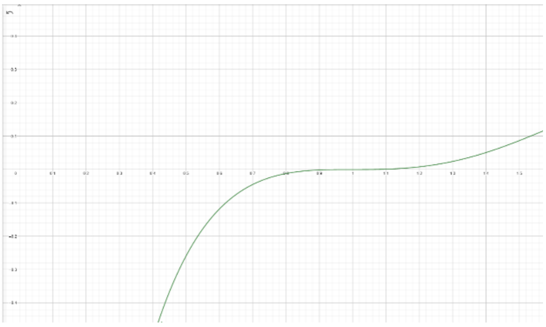
On a : $g(t) = \tan\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(t)} \sim_0 -\frac{1}{t}$. Donc, $f(x) \sim_{\frac{\pi}{2}^-} -\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}$.

27. $f(x) = (x^2-3x+2)\ln\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)$. Déterminer un équivalent simple au voisinage de a de 1. Qu'en déduit-on sur f ?

Posons $t = x-1\ \ et\ g(t) = f(t+1)$. Alors $x = t+1, x\to 1\ sietssi\ t\to 0\ \ et\ f(x) = g(x-1)$.

On a : $g(t) = ((t+1)^2-3(t+1)+2)\ln\left(sin\frac{\pi(t+1)}{2}\right) = (t^2-t)\ln\left(\sin\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right) = t(t-1)\ln\left(\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right) \sim_0 -t\ln\left(\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)$.

Or, $\lim\limits_{t\to0}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) = 1$ et $\ln(u) \sim_1 u-1$. Donc, $\ln\left(\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right) \sim_0 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)-1$. Or, $\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{\pi t}{2}\right) = 0$ et $\cos(u)-1 \sim_0 -\frac{u^2}{2}$. Donc, $\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)-1 \sim_0 -\frac{\left(\frac{\pi t}{2}\right)^2}{2}$. Alors, $\ln\left(\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right) \sim_0 -\frac{\left(\frac{\pi t}{2}\right)^2}{2} = -\frac{\pi^2t^2}{8}$. Alors, $g(t) \sim_0 \frac{\pi^2t^3}{8}$. J'en déduis que $f(x) \sim_1 \frac{\pi^2(x-1)^3}{8}$. Par conséquent, f admet le $DL_3(1)$ suivant : $f(x) = \frac{\pi^2}{8}(x-1)^3+o_1((x-1)^3)$ et aussi le $DL_1(1)$ suivant : $f(x) = 0+o_1((x-1))$. Comme $1 \in Df$, cela implique que f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$. De plus, comme pour x au voisinage de 1^-, $\frac{\pi^2(x-1)^3}{8} < 0$ et x au voisinage de 1^+, $\frac{\pi^2(x-1)^3}{8} > 0$, Cf traverse sa tangente horizontale en 1 de la manière suivante :



28. $f(x)=Arccos(x)$. Calculer $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x}}$ et en déduire un équivalent simple au voisinage de a de 1^-.

$\frac{f(x)}{\sqrt{1-x}}=\frac{Arccos(x)}{\sqrt{1-x}}\underbrace{=}_{\substack{on\ pose\ t=Arccos(x)\\ Alors\ t\xrightarrow[x\to 1]{}0}}\frac{t}{\sqrt{1-\cos(t)}}\underbrace{=}_{\substack{avec\\ \lim_{t\to 0}\varepsilon(t)=0}}\frac{t}{\sqrt{\frac{t^2}{2}+t^2\varepsilon(t)}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+\varepsilon(Arccos(x))}}\xrightarrow[x\to 1]{}\sqrt{2}$. Donc, $f(x)\sim_1\sqrt{2}\sqrt{1-x}$.

29. $f(x)=x^x-4$, $a=2$ Déterminer un équivalent simple au voisinage de a de 2

$f(x)=e^{x\ln(x)}-4$. Donc f est dérivable en 2 et $f'(2)=4(1+\ln(2))\in\mathbb{R}^*$. Donc, $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{f(x)}{x-2}\sim_2 4(1+\ln(2))$. J'en déduis que $f(x)\sim_2 4(1+\ln(2))(x-2)$.

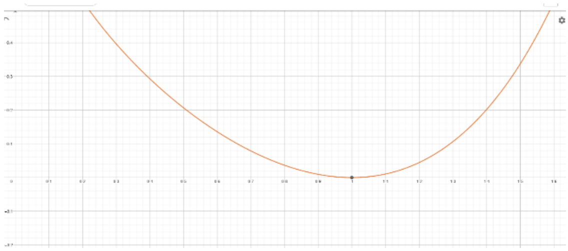
30. $f(x)=x^x-x$, $a=1$. Déterminer un équivalent simple au voisinage de a de 1

Posons $t=x-1$ et $g(t)=f(t+1)$. Alors $x=t+1, x\to 1\ sietssi\ t\to 0\ \ et\ f(x)=g(x-1)$.

On a : $g(t)=e^{(t+1)\ln(1+t)}-1-t=e^{(t+1)\left(t-\frac{t^2}{2}+o_0(t^2)\right)}-1-t=e^{\left(t+\frac{t^2}{2}+o_0(t^2)\right)}-1-t=1+\left(t+\frac{t^2}{2}\right)+\frac{t^2}{2}+o_0(t^2)-1-t$

$g(t)=t^2+o_0(t^2)\sim_0 t^2$. J'en déduis que $f(x)\sim_1(x-1)^2$.

Par conséquent, f admet le $DL_2(1)$ suivant : $f(x)=(x-1)^2+o_1((x-1)^2)$ et aussi le $DL_1(1)$ suivant : $f(x)=0+o_1((x-1))$. Comme $1\in Df$, cela implique que f est dérivable en 1 et $f'(1)=0$. De plus, comme pour x au voisinage de 1, $(x-1)^2>0$, Cf admet un minimum local en 1.



31. Montrer que : $Arctan(x+1)-Arctan(x)\sim_{+\infty}\frac{1}{x^2}$.

En déduire que : $\frac{Arctan(x+1)}{Arctan(x)}=1+\frac{2}{\pi x^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{Arctan(x+1)}{Arctan(x)}\right)^{x^2}$.

Posons $f(x)=x^2\big(Arctan(x+1)-Arctan(x)\big)$ et $g(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$. Alors,

$g(t)=\frac{1}{t^2}\left(Arctan\left(\frac{1}{t}+1\right)-Arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right)=\frac{1}{t^2}\left(Arctan\left(\frac{1+t}{t}\right)-Arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right)$

$=\frac{1}{t^2}\left(\frac{\pi}{2}-Arctan\left(\frac{t}{1+t}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-Arctan(t)\right)\right)=\frac{1}{t^2}\left(Arctan(t)-Arctan\left(\frac{t}{1+t}\right)\right)$

$=\frac{1}{t^2}\big(Arctan(t)-Arctan\big(t(1-t+o_0(t))\big)\big)$.

Or $t(1-t+o_0(t))=t-t^2+o_0(t^2)$ et $\arctan(u)=u+o_0(u^2)$. Donc, $\arctan(t-t^2+o_0(t^2))=t-t^2+o_0(t^2)$.

Et $g(t)=\frac{1}{t^2}\left(t+o_0(t^2)-\left(t-t^2+o_0(t^2)\right)\right)=1+o_0(1)$. Donc, $g(t)\sim_{t\approx 0}1\ et\ f(x)\sim_{x\approx+\infty}1$. Et par conséquent,

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\big(Arctan(x+1)-Arctan(x)\big)=1$. Ainsi, $Arctan(x+1)-Arctan(x)\sim_{+\infty}\frac{1}{x^2}$.

$Arctan(x+1)-Arctan(x)=\frac{1}{x^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Donc, $Arctan(x+1)=Arctan(x)+\frac{1}{x^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $\frac{Arctan(x+1)}{Arctan(x)}=1+\frac{1}{x^2Arctan(x)}+\frac{1}{Arctan(x)}o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Or, $Arctan(x)\sim_{+\infty}\frac{\pi}{2}$;donc, $\frac{1}{Arctan(x)}o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)=o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $\frac{1}{x^2Arctan(x)}\sim_{+\infty}\frac{2}{\pi x^2}$ i.e. $\frac{1}{x^2Arctan(x)}=\frac{2}{\pi x^2}o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. J'en déduis que : $\frac{Arctan(x+1)}{Arctan(x)}=1+\frac{2}{\pi x^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Alors, $\left(\frac{Arctan(x+1)}{Arctan(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{Arctan(x+1)}{Arctan(x)}\right)}$.

Or, $h(x)=x^2\ln\left(\frac{Arctan(x+1)}{Arctan(x)}\right)=x^2\ln\left(1+\frac{2}{\pi x^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=x^2\left(\frac{2}{\pi x^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=\frac{2}{\pi}+o_{+\infty}(1)$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\frac{2}{\pi}$. J'en déduis que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{Arctan(x+1)}{Arctan(x)}\right)^{x^2}=e^{\frac{2}{\pi}}$.