

Corrigé Dérivées nièmes.

Ex 1 Soit a, b, c et d constantes réelles et a non nulle. Justifier l'existence et calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de chacune des fonctions suivantes sur un domaine à préciser :

1) $f : \left(x \mapsto \frac{cx+d}{ax+b}\right)$.

f est de classe C^∞ sur $Df = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\}$ car f est constituée de fonctions de classe C^∞ sur leur propre domaine de définition.

$$f(x) = \frac{cx+d}{ax+b} = \frac{\frac{c}{a}(ax+b)+d-\frac{bc}{a}}{ax+b} = \frac{c}{a} + \left[d - \frac{bc}{a}\right] \frac{1}{ax+b}.$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in Df, f^{(n)}(x) = \left[d - \frac{bc}{a}\right] a^n \frac{(-1)^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

2) $f : \left(x \mapsto \frac{1}{x^3+2x^2-x-2}\right)$.

f est de classe C^∞ sur $Df = \mathbb{R} \setminus \{1, -1, -2\}$ car f est constituée de fonctions de classe C^∞ sur leur propre domaine de définition.

$\forall x \in Df, f(x) = \frac{1}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{1}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{1}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x+2)}$. Je décompose $f(x)$ en éléments simples. Il existe trois réels A, B et C tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1, -2\}, f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$. Alors,

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1, -2\}, (x-1)f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = A + \frac{B(x-1)}{x+1} + \frac{C(x-1)}{x+2}$. Donc, $A = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{6}$. De même,

$$B = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x-1)(x+2)} = -\frac{1}{2} \text{ et } C = \lim_{x \rightarrow -2} (x+2)f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{3}.$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1, -2\}, f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{1}{6} \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{3} \frac{1}{(x+2)}$. Comme a, b et c sont de classe C^∞ sur $Df, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in Df, f^{(n)}(x) = \frac{1}{6} a^{(n)}(x) - \frac{1}{2} b^{(n)}(x) + \frac{1}{3} c^{(n)}(x)$. Or, $a(x) = H(x-1), b(x) = H(x+1)$ et $c(x) = H(x+2)$ donc,

$$a^{(n)}(x) = H^{(n)}(x-1), b^{(n)}(x) = H^{(n)}(x+1) \text{ et } c^{(n)}(x) = H^{(n)}(x+2) \text{ avec } H^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in Df, f^{(n)}(x) = \frac{1}{6} \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{2} \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{3} \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}$.

3) $f(x) = (3x^2 - x + 5)\sin(x\sqrt{3})e^x$

4) $f : \left(x \mapsto \frac{1}{x^2-b^2}\right)$

5) $f : (x \mapsto \sin^3(x) + \cos^3(x))$

f est de classe C^∞ sur $Df = \mathbb{R}$ car f est constituée de fonctions de classe C^∞ sur leur propre domaine de On linéarise.

$$\sin^3(x) + \cos^3(x) = \frac{1}{-8i} (e^{ix} - e^{-ix})^3 + \frac{1}{8} (e^{ix} + e^{-ix})^3$$

$$\sin^3(x) + \cos^3(x) = \frac{1}{-8i} (e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) + \frac{1}{8} (e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix})$$

$$\sin^3(x) + \cos^3(x) = \frac{1}{-8i} (2i\sin(3x) - 6i\sin(x)) + \frac{1}{8} (2\cos(3x) + 6\cos(x)) = \frac{1}{4} [\cos(3x) + 3\cos(x) - \sin(3x) + 3\sin(x)]$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{1}{4} \left[3^n \cos\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right) - 3^n \sin\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right) + 3\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + 3\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \right]$.

6) $f : (x \mapsto (4x^2 - 3x + 1)\sin^2(x))$ (expression sous la forme $H(x) + P(x)\sin(2x) + Q(x)\cos(2x)$ où H, P et Q polynomiales)

7) $f : \left(x \mapsto \underbrace{x^n}_{=a(x)} \underbrace{e^{3x}}_{=b(x)}\right)$ puis calculer $f^{(n)}(0)$.

8) f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} comme produit de telles fonctions.

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{(k)}(x) b^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} 3^{n-k} e^{3x} = \sum_{k=0}^n k! \binom{n}{k} x^{n-k} 3^{n-k} e^{3x}$$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n k! \binom{n}{k} (3x)^{n-k} e^{3x}. \text{ Donc, } f^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^n k! \binom{n}{k} 0^{n-k} 3^{n-k} = n! \binom{n}{n} 0^0 3^0 = n!.$$

Remarque : $f(x) = x^n \left(\sum_{k=0}^p \frac{(3x)^k}{k!} + o(x^p) \right) = \sum_{k=0}^p \frac{3^k}{k!} x^{k+n} + o(x^{p+n})$. Donc, comme TY s'applique à f à tout ordre en 0, le

polynôme de Taylor de f en 0 de rang $n+p$ est $P_{n+p}(x) = \sum_{k=0}^p \frac{3^k}{k!} x^{k+n}$ et celui de rang n est $P_n(x) = \frac{3^0}{0!} x^n = x^n$.

Ex 2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer de deux manières la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f : (x \mapsto x^{2n})$. En déduire $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Ex 3 Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on définit g_n par : $\forall x > 0, g_n(x) = x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Justifier que $g_n \in D^n(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ et montrer, par récurrence sur n , que : $\forall x > 0, g_n^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Application : déterminer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $(x \mapsto x^{n-1} \ln(x))$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on définit g_n par : $\forall x > 0, g_n(x) = x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)$. Comme $f \in C^\infty(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ et $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right) \in C^\infty(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ et $\forall x > 0, \frac{1}{x} > 0, \left(x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)\right) \in C^\infty(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$. De plus $(x \mapsto x^{n-1}) \in C^\infty(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$. Ainsi, $g_n \in C^\infty(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$.

Posons $H_n : " \forall x > 0, g_n^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) "$.

Initialisation : $\forall x > 0, g_1(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, donc $g'_1(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(-1)^1}{x^{1+1}} f^{(1)}\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc H_1 est vraie.

Propagation : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Je suppose que H_n est vraie. Alors : $\forall x > 0, g_n^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n x^{-(n+1)} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Or, $\forall x > 0, g_{n+1}(x) = x^{(n+1)-1} f\left(\frac{1}{x}\right) = x g_n(x)$. Alors Leibniz assure que :

$$\begin{aligned} g_{n+1}^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \underset{=0 \text{ pour } k \geq 2}{id^{(k)}(x)} g_n^{(n+1-k)}(x) = x g_n^{(n+1)}(x) + (n+1) g_n^{(n)}(x) \\ &= x \left[(-1)^n (-n+1) x^{-(n+1)-1} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right) \right] + (n+1) \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right) + (n+1) \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Donc si H_n est vraie alors H_{n+1} est vraie.

CCL : le théorème de récurrence assure que $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n$ est vraie.

Application : déterminer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $\varphi: (x \rightarrow x^{n-1} \ln(x)) \forall x > 0, \varphi(x) = -x^{n-1} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$. Alors, d'après ce qui précède, comme \ln est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^{+*} , φ l'est aussi et $\forall x > 0, \varphi^{(n)}(x) = -\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} \ln^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\left(\frac{1}{x}\right)^n} = \frac{(n-1)!}{x}$.

Ex 4 Soit $f: (x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}})$.

a) Justifier que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f peut se mettre sous la forme :

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}, \text{ où } P_n \text{ est une fonction polynomiale. Donner une relation entre } P_n', P_n \text{ et } P_{n+1} ?$$

c) Déterminer et démontrer (conjecture puis récurrence) le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de P_n .

Ex 5 Soit $f: \begin{pmatrix} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}} \end{pmatrix}$.

a) Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f peut se mettre sous la forme :

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}, \text{ où } P_n \text{ est une fonction polynomiale. Donner une relation entre } P_n'(t), P_n(t) \text{ et } P_{n+1}(t).$$

c) Déterminer, par conjecture puis récurrence, le degré et le coefficient dominant de P_n .

d) Montrer que f est solution de : $(1-x)^2 y' = (2-x)y$.

e) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}^*, P_{n+1}(t) = [(2n+1)t + t^2]P_n(t) - n^2 t^2 P_{n-1}(t)$.

a) f est de classe C^∞ sur $Df = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ car f est constituée de fonctions de classe C^∞ sur leur propre domaine de définition.

b) $H(n)$: "il existe P_n fonction polynomiale telle que $\forall x \in Df, f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}} \underset{u(x)=\frac{1}{1-x}}{=} P_n(u(x)) e^{u(x)} \underset{t=\frac{1}{1-x}}{=} P_n(t) e^t$ ".

Initialisation : $\forall x \in Df, f(x) = \frac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}} \underset{u(x)=\frac{1}{1-x}}{=} u(x) e^{u(x)} = P_0(u(x)) e^{u(x)} \underset{t=\frac{1}{1-x}}{=} P_0(t) e^t$ avec $P_0(t) = t$, P_0 polynomiale.

Propagation : Soit n un entier naturel. Je suppose $H(n)$ vraie.

Alors il existe P_n fonction polynomiale telle que $\forall x \in Df, f^{(n)}(x) \underset{u(x)=\frac{1}{1-x}}{=} P_n(u(x)) e^{u(x)}$.

$$\text{Donc } f^{(n+1)}(x) = \frac{df^{(n)}}{dx}(x) = u'(x) P_n'(u(x)) e^{u(x)} + P_n(u(x)) u'(x) e^{u(x)} = \frac{1}{(1-x)^2} \left[P_n'\left(\frac{1}{1-x}\right) + P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) \right] e^{\frac{1}{1-x}}$$

$$f^{(n+1)}(x) = u(x)^2 [P_n'(u(x)) + P_n(u(x))] e^{u(x)}. \text{ Posons } P_{n+1}(t) = t^2 [P_n'(t) + P_n(t)].$$

Alors P_{n+1} est polynomiale comme somme et produit de fonctions polynomiales et $\forall x \in Df, f^{(n+1)}(x) = \left[P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right) \right] e^{\frac{1}{1-x}}$.

Ainsi, $H(n+1)$ vraie dès que $H(n)$ vraie.

CCL : $\forall n \in \mathbb{N}, H(n)$ vraie par le théorème de récurrence simple.

c) $\forall t \in \mathbb{R}, P_0(t) = t$ et $\forall n, P_{n+1}(t) = t^2 [P_n'(t) + P_n(t)]$. Donc $P_1(t) = t^2(1+t) = t^3 + t^2$, $P_2(t) = t^2(3t^2 + 2t + t^3 + t^2) = t^5 + 4t^4 + 2t^3$.

Conjecture : " $P_n(t) = t^{2n+1} + Q_n(t)$ avec $\deg(Q_n(t)) \leq 2n$ " : $H(n)$.

Initialisation : $H(0)$ est vraie.

Propagation : Soit n un entier naturel. Je suppose $H(n)$ vraie

Alors, $P_n(t) = t^{2n+1} + Q_n(t)$ avec $\deg(Q_n(t)) \leq 2n$.

$$\text{Donc, } P_{n+1}(t) = t^2 [(2n+1)t^{2n} + Q_n'(t) + t^{2n+1} + Q_n(t)] = t^{2n+3} + \underbrace{[(2n+1)t^{2n+2} + t^2 Q_n'(t) + t^2 Q_n(t)]}_{=Q_{n+1}(t)}$$

$$P_{n+1}(t) = t^{2n+3} + Q_{n+1}(t) \text{ et } \deg(t^2 Q_n'(t) + t^2 Q_n(t)) \leq \deg(t^2 Q_n(t)) \leq 2 + 2n \text{ donc } \deg(Q_{n+1}(t)) \leq 2n + 2.$$

Ainsi, $H(n+1)$ vraie dès que $H(n)$ vraie.

CCL : $\forall n \in \mathbb{N}, H(n)$ vraie par le théorème de récurrence simple.

RQUE : $P_{n+1}(t) = t^2[P'_n(t) + P_n(t)]$. Comme $P_n \neq 0$ car f n'est pas polynomiale, $\deg(P'_n) < \deg(P_n)$ et par conséquent, $\deg(P'_n(t) + P_n(t)) = \deg(P_n(t))$ donc $\deg(P_{n+1}(t)) = \deg(t^2 P_n(t)) = 2 + \deg(P_n(t))$.

Posons $d_n = \deg(P_n(t))$. Alors $d_{n+1} = 2 + d_n$ donc la suite (d_n) est arithmétique. Donc $\forall n, d_n = d_0 + 2n = 1 + 2n$.

$$d) \forall x \in Df, \underbrace{(1-x)^2}_{a(x)} f'(x) = (1-x)^2 \left[\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^3} \right] e^{\frac{1}{1-x}} = \left[1 + \frac{1}{(1-x)} \right] e^{\frac{1}{1-x}} = \left[\frac{2-x}{(1-x)} \right] e^{\frac{1}{1-x}} = \underbrace{(2-x)}_{b(x)} f(x).$$

e) a et b étant aussi de classe C^∞ sur Df , Leibniz assure que $\forall x \in Df, \forall x \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x). \text{ Alors comme } \forall k \geq 3, a^{(k)}(x) = 0 \text{ et } \forall k \geq 2, b^{(k)}(x) = 0.$$

$$\binom{n}{0} a^{(0)}(x) f^{(n)}(x) + \binom{n}{1} a^{(1)}(x) f^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} a^{(2)}(x) f^{(n-2)}(x) = \binom{n}{0} b^{(0)}(x) f^{(n)}(x) + \binom{n}{1} b^{(1)}(x) f^{(n-1)}(x)$$

$$(1-x)^2 f^{(n+1)}(x) + 2n(x-1) f^{(n)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} 2 f^{(n-1)}(x) = (2-x) f^{(n)}(x) - n f^{(n-1)}(x)$$

$$(1-x)^2 f^{(n+1)}(x) + (2n(x-1) + x - 2) f^{(n)}(x) + n^2 f^{(n-1)}(x) = 0.$$

$$\text{Alors, } (1-x)^2 P_{n+1} \left(\frac{1}{1-x} \right) e^{\frac{1}{1-x}} + (2n(x-1) + x - 2) P_n \left(\frac{1}{1-x} \right) e^{\frac{1}{1-x}} + n^2 P_{n-1} \left(\frac{1}{1-x} \right) e^{\frac{1}{1-x}} = 0.$$

$$\text{Donc, } (1-x)^2 P_{n+1} \left(\frac{1}{1-x} \right) + (2n(x-1) + (x-1) - 1) P_n \left(\frac{1}{1-x} \right) + n^2 P_{n-1} \left(\frac{1}{1-x} \right) = 0.$$

$$\text{Alors, en posant } t = \frac{1}{1-x}, 1-x = \frac{1}{t} \text{ et } t \in \mathbb{R}^* \text{ et } \left(\frac{1}{t} \right)^2 P_{n+1}(t) + \left(2n \left(\frac{1}{t} \right) + \frac{1}{t} - 1 \right) P_n(t) + n^2 P_{n-1}(t) = 0.$$

$$\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}^*, P_{n+1}(t) = [(2n+1)t + t^2] P_n(t) - n^2 t^2 P_{n-1}(t).$$

Ex 6 Soit $(E): x^2 y'' + 4xy' + 2y = \sin(x)$ Soit g une solution de (E) sur \mathbb{R} de classe C^∞ .

- 1) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 g^{(n+2)}(x) + (2n+4)x g^{(n+1)}(x) + (n^2 + 3n + 2)g^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.
- 2) En déduire le polynôme de Taylor de g en 0 de rang n tq $n \in \mathbb{N}$.
- 3) Résoudre (E) sur \mathbb{R}^{**} en posant $\theta(x) = x^2 y(x)$. Faites de même sur \mathbb{R}^{-*} .
- 4) En déduire g et retrouver la valeur de $g'(0)$.

Ex 7 Trouver une relation entre $\text{Arctan}^{(n+2)}, \text{Arctan}^{(n+1)}$ et $\text{Arctan}^{(n)}$.

Ex 8 Soit $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$.

1. Calculer le plus efficacement possible $f^{(n)}(0)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $f^{(n)}(x)$ pour $|x| \neq 1$.

$$1. f(x) = \frac{x}{1-x^2} = x[1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2n} + o_0(x^{2n})] = x + x^3 + x^5 + x^7 + \dots + x^{2n+1} + o_0(x^{2n+1}). \text{ Comme } f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } Df = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}, \text{ TY s'applique à } f \text{ en } 0 \text{ et } P_{2n+1}(x)x + x^3 + x^5 + x^7 + \dots + x^{2n+1} \text{ est le polynôme de Taylor en } 0 \text{ de rang } 2n+1 \text{ de la fonction } f. \text{ J'en déduis que } \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } f^{(n)}(0) = \begin{cases} n! & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

$$2. \text{ Décomposons } f(x) = \frac{x}{1-x^2} \text{ en élément simples. } \forall x \in Df, f(x) = \frac{x}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right] = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{1+x} \right].$$

$$\text{Alors } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in Df, f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \left[-\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} \right] = \frac{(-1)^{n+1} n!}{2} \left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right].$$

Ex 9

A) Montrer que la fonction : $f: \left(x \mapsto \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{2+x^2}{2(1+x^2)} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \right)$ est de classe C^3 sur \mathbb{R} mais n'est pas de 4 fois dérivable sur \mathbb{R} .

B) Soit n un entier naturel non nul. Soit $f: \left(x \mapsto \begin{cases} x^n \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \right)$. Montrer que f est de classe C^{n-1} mais pas n -fois dérivable sur \mathbb{R}^+ et $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, f^{(k)}(0) = 0$. Que peut-on en conclure sur les ensembles $D^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $C^{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

C) Soit n un entier naturel. Montrer que la fonction : $f: \left(x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^{n+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \right)$ est de classe C^n sur \mathbb{R} mais que $f^{(n+1)}(0)$ n'existe pas.

$$\text{A) Posons } g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \text{ et } h(x) = \frac{2+x^2}{2(1+x^2)} \text{ et } f: \left(x \mapsto \begin{cases} g(x) & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ h(x) & \text{si } x > 0 \end{cases} \right).$$

Adaptons le critère de classe C^3 à f .

- g et h sont de classe C^∞ sur respectivement \mathbb{R}^{-*} et \mathbb{R}^{+*} . Par conséquent, f est de classe C^∞ sur respectivement \mathbb{R}^{-*} et \mathbb{R}^{+*} . Et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x < 0, f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x)$ et $\forall x > 0, f^{(n)}(x) = h^{(n)}(x)$.

En particulier,

$$\forall x < 0, f'(x) = g'(x) = -x, f''(x) = g''(x) = -1 \text{ et } f'''(x) = g'''(x) = 0 = g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \text{ pour } n \geq 3. \text{ Et,}$$

$$\forall x > 0, f'(x) = h'(x) = \frac{-x}{(x^2+1)^2}, f''(x) = h''(x) = \frac{3x^2-1}{(x^2+1)^3}, f'''(x) = h'''(x) = \frac{-12x(x^2-1)}{(x^2+1)^4} \text{ et } f^{(4)}(x) = g^{(4)}(x) =$$

$$\frac{12(5x^4-10x^2+1)}{(x^2+1)^5}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x). \\ \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) &= -1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} h'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} g''(x) &= -1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} h''(x) \\ \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} g'''(x) &= 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} h'''(x) \end{aligned}$$

Le critère de classe C^3 assure que f est de classe C^3 sur \mathbb{R} et $f''' : \left(x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{-12x(x^2-1)}{(x^2+1)^4} & \text{si } x > 0 \end{cases} \right)$.

Montrons que f''' n'est pas dérivable en 0 :

$$\forall x < 0, \tau(x) = \frac{f'''(x) - f'''(0)}{x-0} = 0 \text{ et } \forall x > 0, \tau(x) = \frac{f'''(x) - f'''(0)}{x-0} = \frac{-12(x^2-1)}{(x^2+1)^4}. \text{ Donc } \lim_{x \rightarrow 0^-} \tau(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \tau(x) = 12.$$

J'en déduis que f''' n'est pas dérivable en 0 et par conséquent, f n'est pas de 4 fois dérivable sur \mathbb{R} .

B) Soit n un entier naturel non nul. Soit $f : \left(x \mapsto \begin{cases} x^n \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \right)$. Montrer que f est de classe C^{n-1} mais pas n -fois ;

Posons $g(x) = \underbrace{x^n}_{u(x)} \underbrace{\ln(x)}_{v(x)}$. g est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^{++} car constituée de fonctions de classe C^∞ sur

Leur propre domaine de définition et d'après Leibniz, $g^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} u^{(k)}(x) v^{(p-k)}(x)$

$$g^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} u^{(k)}(x) v^{(p-k)}(x) + u^{(p)}(x) v^{(0)}(x)$$

$$g^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{(-1)^{p-k-1} (p-k-1)!}{x^{p-k}} + \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p} \ln(x)$$

$$g^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} (-1)^{p-k-1} (p-k-1) x^{n-p} + \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p} \ln(x)$$

$$g^{(p)}(x) = \left[\sum_{k=0}^{p-1} \frac{p!}{(p-k)! k!} (-1)^{p-k-1} \frac{n! (p-k-1)!}{(n-k)!} + \frac{n!}{(n-p)!} \ln(x) \right] x^{n-p}$$

$$g^{(p)}(x) = \left[p! (-1)^{p-k-1} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{(p-k)} + \frac{n!}{(n-p)!} \ln(x) \right] x^{n-p} = [A_p + B_p \ln(x)] x^{n-p} \text{ où } A_p \text{ et } B_p \text{ sont réels.}$$

$$g^{(p)}(x) = A_p x^{n-p} + B_p x^{n-p} \ln(x) \text{ où } A_p \text{ et } B_p \text{ sont réels.}$$

Si $0 \leq p < n$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} x^{n-p} \ln(x) = 0$ et donc, $\lim_{x \rightarrow 0} g^{(p)}(x) = 0$. Alors le critère de classe C^{n-1} assure que f est de classe C^{n-1}

sur \mathbb{R}^{++} et $f^{(p)} : \left(x \mapsto \begin{cases} A_p x^{n-p} + B_p x^{n-p} \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \right)$.

Par contre, $g^{(n)}(x) = A_n + B_n \ln(x)$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} g^{(n)}(x) = +\infty$. Alors le critère de dérivabilité assure que $f^{(n-1)}$ n'est pas dérivable en 0 et $Cf^{(n-1)}$ a une tangente verticale en 0.

C) Appliquons le critère de classe C^n : f est de classe C^n sur \mathbb{R} dès que $\begin{cases} f \text{ est continue en } 0 \\ f \text{ est de classe } C^n \text{ au moins sur } \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f^{(k)}(x) \text{ existe et est finie} \end{cases}$.

Posons $g : (x \mapsto x^{n+1})$ et $\omega : (x \mapsto 0)$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \omega(x)$. Donc, f est continue en 0.
- g et ω sont de classe C^∞ sur \mathbb{R} donc f est de classe C^n sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\forall x > 0, \forall k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} g^{(k)}(x) & \text{si } x > 0 \\ \omega^{(k)}(x) & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!} x^{n+1-k} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lim_{x \rightarrow 0} g^{(k)}(x) \stackrel{\text{car } n+1-k > 0}{=} 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \omega^{(k)}(x)$. Donc, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f^{(k)}(x)$ existe, est finie car nulle.

J'en conclus que f est de classe C^n sur \mathbb{R} . En particulier $f^{(n)}$ est continue sur \mathbb{R} . De plus, $f^{(n)}$ est dérivable au moins sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f^{(n+1)}(x) = \begin{cases} (n+1)! & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Donc, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f^{(n+1)}(x) = (n+1)! \neq 0 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f^{(n+1)}(x)$. Le critère de

dérivabilité assure alors que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x-0} = (n+1)! \neq 0 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x-0}$. Donc $f^{(n)}$ n'est pas dérivable en 0.

Autrement dit, $f^{(n+1)}(0)$ n'existe pas.

