Questions de cours sur les équations différentielles.

Théorème fondamental ($\boldsymbol{TFedl}$)de résolution d'une équation différentielle linéaire: Si f_0 est une solution particulière de (E) alors les solutions de (E) sur J sont toutes les fonctions de la forme $f_0 + \varphi$ où φ est solution de (EH) sur J .

Démo : Considérons l' équation différentielle linéaire d'ordre n suivante : (E): $\alpha_n(x)y^{(n)} + \alpha_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots . +\alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y = \gamma(x)$
où $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0, \gamma$ sont des fonctions connues , définies et continues sur un même intervalle J de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $K(= \mathbb{R}\ ou\ \mathbb{C})$.
Soit (EH): $\alpha_n(x)y^{(n)} + \alpha_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots . +\alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y = 0$ l'équation homogène associée à (E).

Supposons que (E) admette une solution f_0 sur J.
Soit f une fonction définie et n -fois dérivable sur J à valeurs dans K.
Montrer que f est une solution de (E) sur J sietssi il existe φ une solution de (EH) sur J telle que $f = f_0 + \varphi$.
Si une telle φ existe alors nécessairement $\varphi = f - f_0$.
Posons donc $\varphi = f - f_0$. Il faut alors montrer que f est une solution de (E) sur J sietssi φ est une solution de (EH) sur J .
Comme $f_0\ et\ f$ sont définies et n -fois dérivables sur J à valeurs dans K, φ l'est aussi et $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)} = {f_0}^{(k)} + \varphi^{(k)}$. Alors,
f est une solution de (E) sur J
sietssi $\alpha_n(x)f^{(n)}(x) + \alpha_{n-1}(x)f^{(n-1)}(x) + \cdots . +\alpha_1(x)f'(x) + \alpha_0(x)f(x) = \gamma(x)$
sietssi $\forall x \in J,\ \alpha_n(x)[{f_0}^{(n)}(x) + \varphi^{(n)}(x)] + \alpha_{n-1}(x)[{f_0}^{(n-1)}(x) + \varphi^{(n-1)}(x)] + \cdots . +\alpha_1(x)[{f_0}'(x) + \varphi'(x)] + \alpha_0(x)[f_0(x) + \varphi(x)] = \gamma(x)$
sietssi $\forall x \in J,\ \left[\underbrace{\alpha_n(x){f_0}^{(n)}(x) + \alpha_{n-1}(x){f_0}^{(n-1)}(x) + \cdots + \alpha_1(x){f_0}'(x) + \alpha_0(x)f_0(x)}_{=\gamma(x)\ car\ f_0 \text{ est solution de (E)sur J}}\right] + [\alpha_n(x)\varphi^{(n)}(x) + \alpha_{n-1}(x)\varphi^{(n-1)}(x) + \cdots +$
$\alpha_1(x)\ \varphi'(x)\ + \alpha_0(x)\ \varphi(x)] = \gamma(x)$
sietssi $\forall x \in J, \gamma(x) + [\alpha_n(x)\varphi^{(n)}(x) + \alpha_{n-1}(x)\varphi^{(n-1)}(x) + \cdots + \alpha_1(x)\ \varphi'(x)\ + \alpha_0(x)\ \varphi(x)] = \gamma(x)$
sietssi $\forall x \in J, [\alpha_n(x)\varphi^{(n)}(x) + \alpha_{n-1}(x)\varphi^{(n-1)}(x) + \cdots + \alpha_1(x)\ \varphi'(x)\ + \alpha_0(x)\ \varphi(x)] = 0$
sietssi φ est solution de (EH)sur J.
Ainsi, les solutions de (E) sur J sont toutes les fonctions de la forme $f_0 + \varphi$ où φ est solution de (EH) sur J.
On écrit alors $Sol_J(E) = \{ f_0 + \varphi / \varphi \in Sol_J(EH)\}$.

Théorème fondamental de résolution de $(\boldsymbol{EH})$: (EH): $y' + a(x)y = 0$. Soit A une primitive de a sur I . Alors les solutions de (EH) sur I sont toutes les fonctions $\left(x \to ke^{-A(x)}\right)$ telles que $k \in K$, k constante indépendante de x .

Démo : Soit (EH): $y' + a(x)y = 0$ où a est continue sur l'intervalle I et à valeurs dans K.
Comme a est continue sur l'intervalle I, la fonction a admet une primitive A sur I.
Soit f une fonction dérivable sur I et à valeurs dans K. Posons $\forall x \in I, k(x) = f(x)e^{A(x)}$.
Alors k est une fonction dérivable sur I et à valeurs dans K et
$\forall x \in I, f(x) \underset{\substack{car \\ \forall x \in I, e^{A(x)} \neq 0}}{=} \frac{k(x)}{e^{A(x)}} = k(x)e^{-A(x)}$ et $f'(x) = k'(x)e^{-A(x)} + k(x)\left(-A'(x)\right)e^{-A(x)} = k'(x)e^{-A(x)} - k(x)a(x)e^{-A(x)}$.
Alors,
f solution de (EH) sur I
sietssi $\forall x \in I,\ f'(x) + a(x)f(x) = 0$
sietssi $\forall x \in I,\ k'(x)e^{-A(x)} - k(x)a(x)e^{-A(x)} + a(x)k(x)e^{-A(x)} = 0$
sietssi $\forall x \in I,\ k'(x)e^{-A(x)} = 0$
sietssi $\forall x \in I,\ k'(x) = 0$ car I est un
sietssi $k\ est\ constante\ sur\ l'intervalle\ I.$
Ainsi, les solutions de (EH) sur I sont **toutes** les fonctions de la forme $\left(x \to ke^{-A(x)}\right)$ telles que $k \in K$ (k constante indépendante de x).

Théorème fondamental de résolution de (EH) :
Soit (EH): $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ où $a\ , b\ c\ \ constantes$ complexes ou réelles et a non nulle.
Soit $(e.c) : ar^2 + br + c = 0$ appelée **équation caractéristique** de (EH) de discriminant Δ.
NB : $(e.c\ )$ est donc une équation polynomiale de degré 2 à coefficients réels ou complexes **d'inconnue $\boldsymbol{r}$ réelle ou complexe)** .

A. Solutions complexes **(cas où a, b, c sont réels ou complexes et l'inconnue y est à valeurs complexes).**
si Δ≠0, notons r_1 et r_2 les deux solutions complexes distinctes de $(e.c)$. Alors ,les solutions de (EH) sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto Ue^{r_1 x} + Ve^{r_2 x} \end{pmatrix}$telles que $U\ et\ V$ constantes complexes.
si Δ=0, notons r_0 la seule solution (double) de $(e.c)$. Alors, les solutions de (EH) sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto (Ux + V)e^{r_0 x} \end{pmatrix}$ telles que $U\ et\ V$ constantes complexes.

B. Solutions réelles **(cas où a, b, c sont des réels et l'inconnue y est à valeurs réelles)**
si Δ>0, notons r_1 et r_2 les deux solutions réelles de $(e.c)$. Alors ,les solutions (réelles) de (EH) sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto Ue^{r_1 x} + Ve^{r_2 x} \end{pmatrix}$ telles que $U\ et\ V$ constantes réelles .

si Δ=0, notons r_0 la seule solution (double) de $(e.c)$. Alors, les solutions (réelles) de (EH) sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (Ux+V)e^{r_0 x} \end{pmatrix}$ telles que U et V constantes réelles .

si Δ<0, notons $r = \rho + i\omega$ et $\bar{r} = \rho - i\omega$ (où ρ et ω réels) les deux racines complexes non réelles conjuguées de $(e.c)$ Alors ,les solutions(réelles) de (EH) sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (U\cos(\omega x) + V\sin(\omega x))e^{\rho x} \end{pmatrix}$ telles que U et V constantes réelles.

Démo du cas complexe :

Soit (EH): $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ où $a, b\ c$ *constantes* complexes et a non nulle.

Soit $(e.c)$: $ar^2 + br + c = 0$ appelée **équation caractéristique** de (EH) de discriminant **Δ.**

Nous cherchons toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient (EH) i.e. telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$.

Cherchons d'abord les fonctions de la forme $\varphi(x) = e^{\lambda x}$ telles que λ constante complexe qui vérifient (EH).

Une telle fonction $\varphi: (x \mapsto e^{\lambda x})$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ et $\varphi''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$.

$\varphi: (x \mapsto e^{\lambda x})$ vérifie (EH)

sietssi $\forall x \in \mathbb{R}, a\varphi''(x) + b\varphi'(x) + c\varphi(x) = 0$

sietssi $\forall x \in \mathbb{R}, a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0$

sietssi $\forall x \in \mathbb{R}, a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

sietssi λ est solution de $(e.c)$.

Cette étape n'est pas obligatoire...

Donc, les fonctions de la forme $\varphi(x) = e^{\lambda x}$ telle que λ solution de $(e.c)$. sont solutions de (EH) et ce sont les seules solutions de la forme $(x \mapsto e^{\lambda x})$.

Or $(e.c)$ admet toujours une solution complexe r :

- cette solution est unique et vaut $r = r_0$ lorsque $\Delta_{e.c} = 0$.
- cette solution a deux valeurs possibles $r = r_1$ ou $r = r_2$ lorsque $\Delta_{e.c} \neq 0$. On prendra $r = r_1$.

Désormais, r est une solution de $(e.c)$ et par conséquent $\varphi_r: (x \mapsto e^{rx})$ est une solution de (EH).

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}, k(x) = f(x)e^{-rx}$. Alors k est une fonction deux fois dérivable sur I et

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = k(x)e^{rx} = k(x)\,\varphi_r(x)$ et $f'(x) = k'(x)e^{rx} + rk(x)\,e^{rx}$ et $f''(x) = k''(x)e^{rx} + 2rk'(x)\,e^{rx} + r^2k(x)\,e^{rx}$.

Alors,

f solution de (EH) sur $\mathbb{R}$

sietssi $\forall x \in \mathbb{R},\ af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$

sietssi $\forall x \in \mathbb{R},\ a[k''(x)e^{rx} + 2rk'(x)\,e^{rx} + r^2k(x)\,e^{rx}] + b[k'(x)e^{rx} + rk(x)\,e^{rx}] + c[k(x)e^{rx}] = 0$

sietssi $\forall x \in \mathbb{R},\ a[k''(x) + 2rk'(x) + r^2k(x)] + b[k'(x) + rk(x)] + c[k(x)] = 0$

sietssi $\forall x \in \mathbb{R},\ ak''(x) + (2ar+b)k'(x) + \underbrace{(ar^2+br+c)}_{=0 \text{ car } r \text{ est une solution de } (e.c)}k(x) = 0$

sietssi $\forall x \in \mathbb{R},\ ak''(x) + (2ar+b)k'(x) = 0$

- **1**[er] **cas** $\Delta_{e.c} = 0$. Alors $r = r_0 = -\frac{b}{2a}$ et dans ce cas, $2ar + b = 0$. Par conséquent,

f solution de (EH) sur $\mathbb{R}$

sietssi $\forall x \in \mathbb{R},\ ak''(x) = 0$

sietssi $\forall x \in \mathbb{R},\ k''(x) = 0$

sietssi $\exists U \in \mathbb{C} / \forall x \in \mathbb{R},\ k'(x) = \alpha$

sietssi $\exists V \in \mathbb{C}, \exists U \in \mathbb{C} / \forall x \in \mathbb{R},\ k(x) = Ux + V$

car $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = k(x)e^{rx}$

sietssi $\exists (U,V) \in \mathbb{C}^2 / \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (Ux+V)e^{rx} = (Ux+V)e^{r_0 x}$.

- **2**[ème] **cas** $\Delta_{e.c} \neq 0$. Alors $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$ et $r_1 \neq r_2$ donc $r = r_1 \neq -\frac{b}{2a}$ (et $r_2 \neq -\frac{b}{2a}$) et dans ce cas, $2ar + b = 2ar_1 + b \neq 0$.

Par conséquent,

f solution de (EH) sur $\mathbb{R}$

sietssi $\forall x \in \mathbb{R},\ ak''(x) + (2ar_1 + b)k'(x) = 0$

sietssi k' est solution de l'$\mathscr{edl}1$ $ay' + (2ar_1 + b)y = 0$

sietssi $\exists u \in \mathbb{C} / \forall x \in \mathbb{R},\ k'(x) = ue^{-\frac{2ar_1+b}{a}x}$

sietssi $\exists v \in \mathbb{C}, \exists u \in \mathbb{C} / \forall x \in \mathbb{R},\ k(x) = \frac{u}{-\frac{2ar_1+b}{a}}e^{-\frac{2ar_1+b}{a}x} + v = \frac{-ua}{2ar_1+b}e^{\left(-2r_1-\frac{b}{a}\right)x} + v$

car $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = k(x)e^{rx}$

sietssi $\exists (u,v) \in \mathbb{C}^2 / \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left(\frac{-ua}{2ar_1+b}e^{\left(-2r_1-\frac{b}{a}\right)x} + v\right)e^{r_1 x} = \frac{-ua}{2ar_1+b}e^{\left(-r_1-\frac{b}{a}\right)x} + ve^{r_1 x} \underset{\text{car } r_1+r_2=-\frac{b}{a}}{=} \frac{-ua}{2ar_1+b}e^{r_2 x} + ve^{r_1 x}$.

sietssi $\exists (U,V) \in \mathbb{C}^2 / \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = Ue^{r_1 x} + Ve^{r_2 x}$.

en posant, U=v et $V = \frac{-ua}{2ar_1+b}$

en posant, v=U et $u = \frac{-V(2ar_1+b)}{a}$

Conclusion :

si $\Delta_{(e.c)} \neq 0$, alors en notant r_1 et r_2 les deux solutions complexes distinctes de $(e.c)$,les solutions de (EH) sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto Ue^{r_1 x} + Ve^{r_2 x} \end{pmatrix}$ telles que U et V constantes complexes.

si $\Delta_{(e.c)} = 0$, alors en notant r_0 la seule solution (double) de $(e.c)$, les solutions de (EH) sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto (Ux+V)e^{r_0 x} \end{pmatrix}$ telles que U et V constantes complexes.