Questions de cours sur le calcul intégral

Théorème fondamental du calcul intégral : Soit f continue sur un intervalle I et $(a\,,b) \in I^2$.
Pour tout primitive F de f sur I , on a : $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \overset{notation}{\triangleq} [F(t)]_a^b$.

Démo : Soit f continue sur un intervalle I et $(a\,,b) \in I^2$.
Alors, d'après le théorème fondamental de l'intégration, f admet une primitive F sur cet intervalle I et F_a: $\left(x \mapsto \int_a^x f(t)dt\right)$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

Comme F et F_a sont deux primitives de f sur un même intervalle I, il existe une constante c telle que : $\forall x \in I, F_a(x) \overset{**}{\triangleq} F(x) + c$.
Alors $\int_a^b f(t)dt \underbrace{=}_{\substack{par\ def° \\ de\ F_a}} F_a(b) \underbrace{=}_{\substack{car \\ F_a(a)=0}} F_a(b) - F_a(a) \underbrace{=}_{\substack{d'après \\ **}} (F(b)+c) - (F(a)+c) = F(b) - F(a)$.

Théorème d'intégration par parties (IPP) : Soit $u\ et\ v$ deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I et $(a\,,b) \in I^2$. Alors,

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt\ .$$

Démo : Soit $u\ et\ v$ deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I et $(a\,,b) \in I^2$.
Alors u' et v' sont continues sur I ; de plus, u et v étant dérivables sur I , et v sont aussi continues sur I. Par conséquent, $u'v$, uv' et $u'v + uv'$ sont continues sur I. De surcroit, $(uv)' = u'v + uv'$;
Alors, uv est une primitive de la fonction continue $u'v + uv'$ sur l'intervalle I. Donc le théorème fondamental du calcul intégral assure que $\int_a^b u'(t)v(t) + u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b$. Comme , $u'v$ et uv' sont continues sur I, la linéarité de l'opérateur intégral assure que , $\int_a^b u'(t)v(t) + u(t)v'(t)dt = \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt$.
Ainsi, $\int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b$. Et finalement, $\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$.
NB : $u\ et\ v$ jouent le même rôle : on a aussi $\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$.

Théorème de changement de variables (CV) :
Soit f une fonction continue sur un intervalle J et φ une fonction réelle de classe C^1 sur un intervalle I telles que : $\varphi(I) \subset J$. Soit $(a\,,b) \in I^2$. Alors,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)dt\ .$$

$$\boldsymbol{x = \varphi(t)}$$
$$\boldsymbol{dx = \varphi'(t)dt}$$
$$\boldsymbol{t = a \Rightarrow x = \varphi(a)}$$
$$\boldsymbol{t = b \Rightarrow x = \varphi(b)}$$

Démo : Soit f une fonction continue sur un intervalle J et φ une fonction réelle de classe C^1 sur un intervalle I telles que : $\varphi(I) \subset J$. Soit $(a\,,b) \in I^2$.
Alors f admet une primitive F sur l'intervalle I d'après le théorème fondamental. Nous pouvons donc écrire :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx \underbrace{=}_{\substack{le\ TFCI \\ appliqué \\ à\ f}} [F(x)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = [F(\varphi(t))]_a^b.$$

Or F et φ sont de classe C^1 sur respectivemenet $J\ et\ I$ et $\varphi(I) \subset J$ donc $F \circ \varphi$ est de classe C^1 sur I. $(F \circ \varphi)'$ est donc continue sur l'intervalle I . Par conséquent,

$$[F(\varphi(t))]_a^b \underbrace{=}_{\substack{le\ TFCI \\ appliqué \\ à\ (F\circ\varphi)'}} \int_a^b (F \circ \varphi)'(t)dt \underbrace{=}_{\substack{dérivée \\ d'une \\ onction \\ composée}} \int_a^b F'(\varphi(t)) \times \varphi'(t)dt \underbrace{=}_{\substack{car\ F \\ primitive \\ de\ f}} \int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)dt\ .$$

Ainsi, nous pouvons conclure que $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)dt$.

NB : souvent φ est bijective et $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

$\boldsymbol{x = \varphi(t)}$ et $\boldsymbol{t = \varphi^{-1}(x)}$
$\boldsymbol{dx = \varphi'(t)dt}$ et $\boldsymbol{dt = (\varphi^{-1})'(x)dx}$
$\boldsymbol{x = \alpha \Leftrightarrow t = \varphi^{-1}(\alpha)}$
$\boldsymbol{x = \beta \Leftrightarrow t = \varphi^{-1}(\beta)}$