Corrigé TD 9 partie 3
Développements limités

Ex 11 TECHNIQUES DE CALCUL DES DL :

Déterminer le développement limité à l'ordre demandé au voisinage du point indiqué de chacune des fonctions f suivantes et en déduire dans les cas$(**)$une propriété sur f :

1. $f(x)=\sqrt{4+e^x}$ $(ordre\ 3\ en\ 0)$
2. $f(x)=ln(1+\sqrt[3]{8+x})$ $(ordre\ 3\ en\ 0)$
3. $f(x)=\sqrt[3]{9-2\sin(x)}$, $(ordre\ 4\ en\ a=\frac{\pi}{6})$
4. $f(x)=\frac{\sin(x)}{1-x^2+x^3}$ $(ordre\ 6\ en\ 0)$
5. $f(x)=e^{Arccos(x)}$ $(ordre\ 6\ en\ 0)$
6. $f(x)=\ln(1+Arctan(x)+cos(x))$ $(ordre\ 4\ en\ 0)$
7. $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x^2+x^3}$ $(ordre\ 3\ en\ 1)$
8. $f(x)=\frac{\ln(ch(x))}{\sin(x)sh(x)}$ $(ordre\ 3\ en\ 0)$
9. $f(x)=\frac{\sin(x)Arctan(x)}{sh(x)}$ $(ordre\ 6\ en\ 0).(**)$
10. $(x)=\tan(x)$ $(ordre\ 7\ en\ 0)$
11. $f(x)=\tan(x)$ $\left(ordre\ 3\ en\ \frac{\pi}{4}\right)$
12. $f(x)=x^2Arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)$ $(ordre\ 6\ en\ (-1)^+ et\ en\ (-1)^-)$
13. $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $(ordre\ 3\ en\ 0).(**)$
14. $f(x)=Arccos(x)^{\text{Arcsin}(x)}(ordre\ 3\ en\ 0).(**)$
15. $f(x)=(tan(x))^{tan(2x)}\left(ordre\ 3\ en\ \frac{\pi}{4}\right)$
16. $f(x)=Arcsin\left(x+\frac{1}{2}\right)$ (ordre 4 en 0)
17. $f(x)=Arcsin\left(\frac{\tan(x)}{2}\right)$ $ordre\ 5\ en\ a=\frac{\pi}{3}$.
18. $f(x)=ln\left(\frac{x^2+1}{x+3}\right)$ $(ordre\ 5\ en\ 0)$
19. $f(x)=\cos(x)^{\frac{1}{\sin^2(x)}}$ $(ordre\ 6\ en\ 0)$
20. $f(x)=Arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $(ordre\ 13\ en\ 0).(**)$
21. $f(x)=\exp(\cos(\ln(\cos(x))))$ $(ordre\ 3\ en\ 0)$
22. $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(Arcsin(x))^2}$ $(ordre\ 5\ en\ 0).(**)$
23. $f(x)=tan(\sqrt[3]{4(\pi^3+x^3)})$ $(ordre\ 3\ en\ \pi)$
24. $f(x)=\frac{sh(x)}{\ln(1+\sin(x))}$ $(ordre\ 6\ en\ 0).(**)$
25. $f(x)=Arctan(\cos(x))$ $(ordre\ 5\ en\ 0)$
26. $f(x)=Arccos\sqrt{\frac{x}{\tan(x)}}$ $(ordre\ 1\ puis\ 3\ en\ 0^+)$
27. $f(x)=\sqrt{x(sinx+shx-2x)}$ $(ordre\ 9\ en\ 0^+, en\ 0^-)(**)$
28. $f(x)=sh^{-1}.(ordre\ 5\ en\ 0)$
29. $f(x)=\ln\left(\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right)$ $(ordre\ 100\ en\ 0)$
30. $f(x)=Arctan\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)$ $(ordre\ 2\ en\ 1)$

I Composée

$f(x)=\sqrt{4+e^x}$ $(ordre\ 3\ en\ 0)$.

$$f(x)=\sqrt{4+e^x}=\sqrt{4+1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o_0(x^3)}=\sqrt{5\left(1+\frac{x}{5}+\frac{x^2}{10}+\frac{x^3}{30}+o_0(x^3)\right)}=\sqrt{5}\sqrt{1+\underbrace{\frac{x}{5}+\frac{x^2}{10}+\frac{x^3}{30}+o_0(x^3)}_{u(x)}}$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0}u(x)=0$ et $\sqrt{1+u}=(1+u)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{u^2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\frac{u^3}{6}+o_0(u^3)$,

$\sqrt{1+u(x)}=1+\frac{1}{2}u(x)-\frac{u(x)^2}{8}+\frac{u(x)^3}{16}+o_0(x^3)$

$$avec\begin{cases}u(x)=\frac{x}{5}+\frac{x^2}{10}+\frac{x^3}{30}+o_0(x^3)\\ u(x)^2=\frac{x^2}{25}+\frac{x^3}{25}+o_0(x^3)\\ u(x)^3=u(x)\times u(x)^2=\frac{x^3}{125}+o_0(x^3)\end{cases}.$$

$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$

Ainsi, $f(x)=\sqrt{5}\left(1+\frac{1}{2}\left[\frac{x}{5}+\frac{x^2}{10}+\frac{x^3}{30}\right]-\frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{25}+\frac{x^3}{25}\right]+\frac{1}{16}\left[\frac{x^3}{125}\right]+o_0(x^3)\right)=\sqrt{5}\left(1+\frac{1}{10}x+\frac{9}{200}x^2+\frac{73}{6000}x^3+o_0(x^3)\right)$.

$f(x)=ln(1+\sqrt[3]{8+x})$ $(ordre\ 3\ en\ 0)$

$\sqrt[3]{8+x}=2\sqrt[3]{1+\frac{x}{8}}=2\left(1+\frac{x}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$. Comme $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{8}=0$ et$\left(1+\frac{x}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}u+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\frac{u^2}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\frac{u^3}{6}+o_0(u^3)$,

$$\left(1+\frac{x}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}\times\frac{x}{8}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\frac{\left(\frac{x}{8}\right)^2}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\frac{\left(\frac{x}{8}\right)^3}{6}+o_0\left(\left(\frac{x}{8}\right)^3\right)=1+\frac{x}{3\times2^3}-\frac{x^2}{3^2\times2^6}+\frac{5x^3}{3^4\times2^9}+o_0(x^3).$$

Donc, $f(x)=\ln\left(3+\frac{x}{3\times2^2}-\frac{x^2}{3^2\times2^5}+\frac{5x^3}{3^4\times2^8}+o_0(x^3)\right)=\ln\left(3\left[1+\frac{x}{3^2\times2^2}-\frac{x^2}{3^3\times2^5}+\frac{5x^3}{3^5\times2^8}+o_0(x^3)\right]\right)$

$f(x)=\ln(3)+\ln\left(1+\underbrace{\frac{x}{3^2\times2^2}-\frac{x^2}{3^3\times2^5}+\frac{5x^3}{3^5\times2^8}+o_0(x^3)}_{=u(x)}\right)$. Comme $\lim\limits_{x\to 0}u(x)=0$ et $\ln(1+u)=u-\frac{1}{2}u^2+\frac{u^3}{3}+o_0(u^3)$,

$$\ln(1+u(x))=u(x)-\frac{1}{2}u(x)^2+\frac{u(x)^3}{3}+o_0(x^3)\ avec\begin{cases}u(x)=\frac{x}{3^2\times2^2}-\frac{x^2}{3^3\times2^5}+\frac{5x^3}{3^5\times2^8}+o_0(x^3)\\ u(x)^2=\frac{x^2}{3^4\times2^4}-\frac{x^3}{3^5\times2^6}+o_0(x^3)\\ u(x)^3=u(x)\times u(x)^2=\frac{x^3}{3^6\times2^6}+o_0(x^3)\end{cases}.$$

Donc, $f(x)=\ln(3)+\frac{x}{3^2\times2^2}-\frac{x^2}{3^3\times2^5}+\frac{5x^3}{3^5\times2^8}-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{3^4\times2^4}-\frac{x^3}{3^5\times2^6}\right]+\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3^6\times2^6}\right]+o_0(x^3)=\ln(3)+\frac{x}{3^2\times2^2}-\frac{x^2}{3^4\times2^3}+\frac{67x^3}{3^7\times2^8}+o_0(x^3)$.

$f(x)=e^{Arccos(x)}$ $(ordre\ 6\ en\ 0)$

$f(x) = e^{Arccos(x)} = e^{\frac{\pi}{2} - Arcsin(x)}$. Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et $Arcsin'$admet le $DL_5(0)$ suivant :

$$Arcsin'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \underbrace{=}_{\substack{car \\ \lim_{x\to 0} -x^2=0}} 1 + \left(\frac{-1}{2}\right)(-x^2) + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}-1\right)(-x^2)^2}{2} + o(x^5) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2^3}x^4 + o(x^5).$$ Donc le théorème d'intégration terme à terme assure que : $Arcsin(x) = Arcsin(0) + x = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2^3}\frac{x^5}{5} + o(x^6) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2^3}\frac{x^5}{5} + o(x^6)$.

Donc,

$$f(x) = e^{Arccos(x)} = e^{\frac{\pi}{2} - Arcsin(x)} = e^{\frac{\pi}{2} - x \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2^3}\frac{x^5}{5} + o(x^6)} = e^{\frac{\pi}{2}} e^{\overbrace{-x - \frac{1x^3}{2\,3} - \frac{3}{2^3}\frac{x^5}{5} + o(x^6)}^{u(x)}}.$$

Comme $\lim_{x\to 0} u(x) = 0$ et $e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^5}{5!} + \frac{u^6}{6!} + o_0(u^6)$,

$$e^{u(x)} = 1 + u(x) + \frac{1}{2}u(x)^2 + \frac{u(x)^3}{3!} + \frac{u(x)^4}{4!} + \frac{u(x)^5}{5!} + \frac{u(x)^6}{6!} + o_0(x^6) \text{ avec } \begin{cases} u(x) = -x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2^3}\frac{x^5}{5} + o(x^6) \\ u(x)^2 = x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{8}{3^2 5}x^6 + o(x^6) \\ u(x)^3 = u(x) \times u(x)^2 = -x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^6). \\ u(x)^4 = u(x) \times u(x)^3 = x^4 + \frac{2x^6}{3} + o(x^6) \\ u(x)^5 = u(x) \times u(x)^4 = -x^5 + o(x^6) \\ u(x)^6 = u(x) \times u(x)^5 = x^6 + o(x^6) \end{cases}$$

Donc, $f(x) = e^{\frac{\pi}{2}}\left(1 + \left[-x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2^3}\frac{x^5}{5}\right] + \frac{1}{2}\left[x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{8}{3^2 5}x^6\right] + \frac{1}{2\times 3}\left[-x^3 - \frac{x^5}{2}\right] + \frac{1}{2^3\times 3}\left[x^4 + \frac{2x^6}{3}\right] + \frac{1}{2^3\times 3\times 5}[-x^5] + \frac{1}{2^4\times 3^2\times 5}x^6 + o(x^6)\right)$

Ainsi, $f(x) = e^{\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}x + \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2}x^2 - \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{3}x^3 + \frac{5e^{\frac{\pi}{2}}}{24}x^4 - \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{6}x^5 + \frac{17e^{\frac{\pi}{2}}}{144}x^6 + o(x^6)$.

$f(x) = \sqrt[3]{9 - 2\sin(x)}$, *ordre 4 en* $a = \frac{\pi}{6}$

Posons $t = x - \frac{\pi}{6}$ *et* $g(t) = f(x)$.

$$g(t) = f\left(\frac{\pi}{6} + t\right) = \sqrt[3]{9 - 2\sin\left(\frac{\pi}{6} + t\right)} = \sqrt[3]{9 - 2\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(t) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(t)\right]}$$

$$= \sqrt[3]{9 - 2\left[\frac{1}{2}(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o_0(t^5)) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(t - \frac{t^3}{6} + o_0(t^4)\right)\right]}$$

$$= \sqrt[3]{9 - 1 - \sqrt{3}t + \frac{t^2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}t^3 - \frac{t^4}{24} + o_0(t^4))}$$

$$= \sqrt[3]{8 - \sqrt{3}t + \frac{t^2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}t^3 - \frac{t^4}{24} + o_0(t^4))}$$

$$= \sqrt[3]{8[1 - \frac{\sqrt{3}}{8}t + \frac{1}{16}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{6\times 8}t^3 - \frac{t^4}{24\times 8} + o_0(t^4))]}$$

$$= 2\sqrt[3]{1 + \underbrace{(-\frac{\sqrt{3}}{8}t + \frac{1}{16}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{6\times 8}t^3 - \frac{t^4}{24\times 8} + o_0(t^4))}_{=u(t)}}$$

Comme $\lim_{t\to 0} u(t) = 0$ et $(1+u)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{3^2}u^2 + \frac{5}{3^4}u^3 - \frac{10}{3^5}u^4 + o_0(u^4)$,

$(1 + u(t))^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}u(t) - \frac{1}{3^2}u(t)^2 + \frac{5}{3^4}u(t)^3 - \frac{10}{3^5}u(t)^4 + o_0(t^4)$ avec

$$\begin{cases} u(t) = \frac{1}{8}\left(-\sqrt{3}t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{6}t^3 - \frac{t^4}{24} + o_0(t^4)\right) \\ u(t)^2 = \frac{1}{64}\left[3t^2 - \sqrt{3}t^3 + \frac{3}{4}t^4 + o_0(t^4)\right] \\ u(t)^3 = u(t)^2 \times u(t) = \frac{1}{8^3}\left[-3\sqrt{3}t^3 + \frac{9}{2}t^4 + o_0(t^4)\right] \\ u(t)^4 = (u(t)^2)^2 = \frac{1}{8^4}\left[9t^4 - 6\sqrt{3}t^5 + o_0(t^5)\right] \\ u(t)^5 = u(t)^3 \times u(t)^2 = o_0(t^4) \end{cases}$$

Ainsi, $g(t) = 2 + \frac{2}{3}\frac{1}{8}[-\sqrt{3}t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{6}t^3 - \frac{t^4}{24}] - \frac{2}{3^2}\frac{1}{8^2}\left[3t^2 - \sqrt{3}t^3 + \frac{3}{4}t^4\right] + \frac{5}{3^4}\frac{2}{8^3}\left[-3\sqrt{3}t^3 + \frac{9}{2}t^4\right] - \frac{10}{3^5}\frac{2}{8^4}[9t^4] + o_0(t^4)$] puis

$$f(x) = 2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{1}{3\times 8} - \frac{1}{3\times 4\times 8}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6\times 4\times 3} + \frac{\sqrt{3}}{4\times 8\times 3^2} - \frac{5}{3^3}\frac{\sqrt{3}}{8^2\times 4}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3$$
$$+ \left(-\frac{1}{3\times 6\times 4^2} - \frac{1}{3\times 8^2\times 2} - \frac{5}{3^2\times 8^3}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4 + o_{\frac{\pi}{6}}\left(\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4\right)$$

Ainsi, $f(x) = 2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{1}{4\times 8}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{8^2\times 4\times 3^3}(115)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \frac{-1}{3^2\times 8^3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4 + o_{\frac{\pi}{6}}\left(\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4\right)$

$f(x) = Arccos(x)^{\mathrm{Arcsin}(x)}$, *ordre 3 en* $a = \mathbf{0}$

$f(x) = e^{\mathrm{Arcsin}(x)\ln(Arccos(x))}$. Posons $h(x) = \mathrm{Arcsin}(x)\ln\left(Arccos(x)\right)$.

$\mathrm{Arcsin}(x) = x + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)$ et $\mathrm{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right)$.

$\ln(Arccos(x)) = \ln\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right)\right) = \ln\left\{\frac{\pi}{2}\left[1 - \underbrace{\left(\frac{2}{\pi}x + \frac{2}{\pi}\frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right)}_{=u(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0}\right]\right\} = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + \ln(1-u(x)).$

$\ln(Arccos(x)) = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - u(x) - \frac{u(x)^2}{2} - \frac{u(x)^3}{3} + o_0(x^3) = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{2}{\pi}x + \frac{2}{\pi}\frac{x^3}{6}\right) - \frac{2}{\pi^2}x^2 - \frac{8}{3\pi^3}x^3 + o_0(x^3)$

$\ln(Arccos(x)) = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\pi}x - \frac{2}{\pi^2}x^2 - \left(\frac{8}{3\pi^3} + \frac{1}{3\pi}\right)x^3 + o_0(x^3).$

Alors, $h(x) = \left(x + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right)\left(\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\pi}x - \frac{2}{\pi^2}x^2 - \left(\frac{8}{3\pi^3} + \frac{1}{3\pi}\right)x^3 + o_0(x^3)\right)$

$h(x) = \underbrace{\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)x - \frac{2}{\pi}x^2 + \left(\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)}{6} - \frac{2}{\pi^2}\right)x^3 + o_0(x^3)}_{=v(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0}$. Donc, $f(x) = e^{v(x)} = 1 + v(x) + \frac{v(x)^2}{2} + \frac{v(x)^3}{6} + o_0(x^3).$

$f(x) = 1 + \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)x - \frac{2}{\pi}x^2 + \left(\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)}{6} - \frac{2}{\pi^2}\right)x^3 + \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{\pi}{2}\right)x^2 - \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)x^3 + \frac{1}{6}\ln^3\left(\frac{\pi}{2}\right)x^3 + o_0(x^3).$

$f(x) = 1 + \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)x + \left(\frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\pi}\right)x^2 + \left(\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)}{6} - \frac{2}{\pi^2} - \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6}\ln^3\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)x^3 + o_0(x^3).$

$DL_5(1)\ de\ f(x) = e^{x^2-5x-4}$

Posons $t = x-1$ et $g(t) = f(x)$.

Alors $g(t) = f(t+1) = e^{(t+1)^2-5(t+1)-4} = e^{t^2-3t-8} = e^{-8}e^{t^2-3t}$.

Comme $\lim\limits_{t\to 0} t^2 - 3t = 0$ et $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + \frac{u^5}{120} + u^5\varepsilon(u)\ et\ \lim\limits_{u\to 0}\varepsilon(u) = 0,$

$e^{t^2-3t} = 1 + t^2 - 3t + \frac{(t^2-3t)^2}{2} + \frac{(t^2-3t)^3}{6} + \frac{(t^2-3t)^4}{24} + \frac{(t^2-3t)^5}{120} + \underbrace{(t^2-3t)^5}_{\sim_0 t^5}\varepsilon(u(t^2-3t))\ et\ \lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t^2-3t) = 0$. Donc,

$e^{t^2-3t} = 1 + t^2 - 3t + \frac{9t^2+t^4-6t^3}{2} + \frac{-27t^3+27t^4-9t^5}{6} + \frac{81t^4-108t^5}{24} + \frac{-243t^5}{120} + t^5 o_0(1).$

Alors $g(t) = e^{-8}[1 - 3t + \frac{11}{2}t^2 + \left(-3 - \frac{9}{2}\right)t^3 + \left(\frac{1}{2} + \frac{9}{2} + \frac{27}{8}\right)t^4 + \left(-\frac{3}{2} - \frac{9}{2} - \frac{81}{40}\right)t^5 + t^5 o_0(1)]$

Ainsi, $f(x) = e^{-8}[1 - 3(x-1) + \frac{11}{2}(x-1)^2 + \left(-\frac{15}{2}\right)(x-1)^3 + \left(\frac{67}{8}\right)(x-1)^4 + \left(-\frac{321}{40}\right)(x-1)^5 + o_1((x-1)^5)]$.

$DL_4(0)\ de\ f(x) = \ln(1 + Arctan(x) + cos(x))$

$f(x) = \ln(1 + Arctan(x) + cos(x)) = \ln\left(1 + x - \frac{x^3}{3} + o_0(x^4) + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)\right)$

$f(x) = \ln\left(2 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)\right) = \ln(2) + \ln\left(1 + \underbrace{\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{48} + o_0(x^4)}_{u(x)}\right).$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$ et $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + u^4\varepsilon(u)\ et\ \lim\limits_{u\to 0}\varepsilon(u) = 0,$

$\ln(1+u(x)) = u(x) - \frac{u(x)^2}{2} + \frac{u(x)^3}{3} - \frac{u(x)^4}{4} + u(x)^4\varepsilon(u(x))$ et $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(u(x)) = 0\ et$

$u(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{48} + o_0(x^4)$

$u^2(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{4} - \frac{5x^4}{48} + o_0(x^4)$

$u^3(x) = \frac{x^3}{8} - \frac{3x^4}{16} + o_0(x^4)$

$u^4(x) = \frac{x^4}{16} + o_0(x^4)$

Donc, $f(x) = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + o_0(x^4).$

II Quotient

$f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1 - x^2 + x^3}\quad (ordre\ 6\ en\ 0)$

$f(x) = \frac{\sin(x)}{1-x^2+x^3} = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o_0(x^6)\right)\frac{1}{1-(x^2-x^3)} = x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o_0(x^5)\right)\frac{1}{1-\left(\underbrace{x^2-x^3}_{u(x)}\right)}.$

Le facteur x nous permet de gagner un rang dans le DL ; il suffit donc de trouver un DL_5 (0)de $\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o_0(x^5)\right)\frac{1}{1-\left(\underbrace{x^2-x^3}_{u(x)}\right)}$ pour obtenir un DL_6 (0) de f. Et dans cet objectif, il suffit de trouver un DL_5 (0)de $\frac{1}{1-\left(\underbrace{x^2-x^3}_{u(x)}\right)}$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$ et $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + o_0(u^5),$

$\frac{1}{1-u(x)} = 1 + u(x) + u(x)^2 + u(x)^3 + u(x)^4 + u(x)^5 + o_0(x^5)$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 - x^3 \sim_0 x^2 \\ u(x)^2 = x^4 - 2x^5 + o_0(x^5) \\ u(x)^3 \sim_0 x^6 \text{ donc } u(x)^3 = o_0(x^5) \\ \text{de même}, u(x)^4 = o_0(x^5) \\ u(x)^5 = o_0(x^5) \end{cases}$.

Donc, $f(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o_0(x^5)\right)\left(1 + x^2 - x^3 + x^4 - 2x^5 + o_0(x^5)\right) = x\left(1 + \frac{5}{6}x^2 - x^3 + \frac{101}{120}x^4 - \frac{11}{6}x^5 + o_0(x^5)\right)$.

Ainsi, $f(x) = x + \frac{5}{6}x^3 - x^4 + \frac{101}{120}x^5 - \frac{11}{6}x^6 + o_0(x^6)$.

$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2+x^3}$ $(ordre\ 3\ en\ 1)$

Posons $g(t) = f(t+1)$. Et cherchons le $DL_3(0)$ de g.

$$g(t+1) = \frac{\ln(2+t)}{(t+1)^2 + (t+1)^3} = \frac{\ln(2+t)}{2 + 5t + 4t^2 + t^3} = \frac{\ln\left(2\left(1+\frac{t}{2}\right)\right)}{2\left(1 + \underbrace{\frac{5}{2}t + 2t^2 + \frac{1}{2}t^3}_{=u(t)}\right)} = \frac{1}{2}\left[\ln(2) + \ln\left(1+\frac{t}{2}\right)\right]\frac{1}{1+u(t)}.$$

Comme $\lim_{t\to 0}\frac{t}{2} = 0$ et $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o_0(u^3)$, $\ln\left(1+\frac{t}{2}\right) = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{24} + o_0(t^3)$,

Comme $\lim_{t\to 0} u(t) = 0$ et $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o_0(u^3)$, $\frac{1}{1+u(t)} = 1 - u(t) + u(t)^2 - u(t)^3 + o_0(t^3)$ avec $\begin{cases} u(t) = \frac{5}{2}t + 2t^2 + \frac{1}{2}t^3 \\ u(t)^2 = \frac{25}{4}t^2 + 10t^3 + o_0(t^3) \\ u(t)^3 = \frac{125}{8}t^3 + o_0(t^3) \end{cases}$.

Donc, $\frac{1}{1+u(t)} = 1 - \left(\frac{5}{2}t + 2t^2 + \frac{1}{2}t^3\right) + \left(\frac{25}{4}t^2 + 10t^3\right) - \frac{125}{8}t^3 + o_0(t^3) = 1 - \frac{5}{2}t + \frac{17}{4}t^2 + \frac{49}{8}t^3 + o_0(t^3)$.

Alors, $g(t) = \frac{1}{2}[\ln(2) + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{24} + o_0(t^3)][1 - \frac{5}{2}t + \frac{17}{4}t^2 + \frac{49}{8}t^3 + o_0(t^3)]$

$g(t) = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{5\ln(2)}{2}\right]t + \left[-\frac{11}{8} + \frac{17\ln(2)}{4}\right]t^2 + \left[\frac{119}{48} + \frac{49\ln(2)}{8}\right]t^3 + o_0(t^3)$.

Par conséquent, $f(x) = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{5\ln(2)}{2}\right](x-1) + \left[-\frac{11}{8} + \frac{17\ln(2)}{4}\right](x-1)^2 + \left[\frac{119}{48} + \frac{49\ln(2)}{8}\right](x-1)^3 + o_1((x-1)^3)$.

$DL_3(0)\ de\ f(x) = \frac{\ln(ch(x))}{\sin(x)sh(x)}$

$\frac{\ln(ch(x))}{\sin(x)sh(x)} = \frac{\ln(1 + \overbrace{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^5)}^{u(x)\xrightarrow[x\to 0]{}0})}{(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^4))(x + \frac{x^3}{6} + o_0(x^4))} = \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o_0(x^5)}{x^2 + o_0(x^5)} = \frac{x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o_0(x^3)\right)}{x^2(1 + o_0(x^3))} = \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o_0(x^3)\right)\frac{1}{1 + o_0(x^3)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o_0(x^3)\right)(1 + o_0(x^3)) = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o_0(x^3)$.

$f(x) = \frac{Arctan(x)}{\ln(\cos(x))}, a = 0$

IMPOSSIBLE car $Arctan(x) \sim_0 x$ et $\ln(\cos(x)) \sim_0 -\frac{x^2}{2}$ donc $f(x) \sim_0 \frac{1}{2x}$. Par conséquent, $\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$ donc f n'a pas de limite finie en 0 et par suite, f ne peut pas avoir de $DL(0)$.

$f(x) = \frac{xArctan(x)}{\ln(\cos(x))}\ a = 0, n = 4$

$$\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 - \underbrace{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + o_0(x^6)\right)}_{=u(x)}\right) \underbrace{=}_{\substack{car \\ \ln(1-u) = -u - u^2 - u^3 - u^4 - u^5 - u^6 + o_{u\to 0}(u^6) \\ \lim_{x\to 0} u(x) = 0 \\ et\ u(x) \sim_0 \frac{x^2}{2} \\ donc\ u(x)^4 = o_0(x^6)}} -u(x) - \frac{u(x)^2}{2} - \frac{u(x)^3}{3} + o_{x\to 0}(x^6) \text{ avec}$$

$$\begin{cases} u(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + o_0(x^6) \\ u(x)^2 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + o_0(x^6) \\ u(x)^3 = \frac{x^6}{8} + o_0(x^6) \end{cases}$$

Donc, $\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24}\right) - \frac{1}{3}\frac{x^6}{8} + o_0(x^6) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o_0(x^6)$

$$f(x) = \frac{x\left(x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + o_0(x^5)\right)}{-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o_0(x^6)} = \frac{x^2\left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{5} + o_0(x^4)\right)}{-\frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{2x^4}{45} + o_0(x^4)\right)} = -2\left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{5} + o_0(x^4)\right) \times \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{x^2}{6} + \frac{2x^4}{45} + o_0(x^4)}_{=u(x)}}.$$

De plus, $\underbrace{\frac{1}{1+\underbrace{\frac{x^2}{6}+\frac{2x^4}{45}+o_0(x^4)}_{=u(x)}}\underset{\substack{car\\ \frac{1}{1+u}=1+u+u^2+u^3+u^4+o_{u\to 0}(u^4)\\ \lim_{x\to 0} u(x)=0\\ et\ u(x)\sim_0 \frac{x^2}{6}\\ donc\ u(x)^3=o_0(x^4)}}{=}}$ $1-u(x)+u(x)^2+o_0(x^4) = 1-\left(\frac{x^2}{6}+\frac{2x^4}{45}\right)+\frac{x^4}{36}+o_0(x^4) = 1-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{60}+o_0(x^4)$

donc $f(x) = -2\left(1-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{5}+o_0(x^4)\right)\times\left(1-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{60}+o_0(x^4)\right) = -2\left(1-\frac{x^2}{2}-\frac{29}{180}x^4 + o_0(x^4)\right)$

Ainsi, $f(x) = -2+x^2+\frac{29}{90}\,x^4 + o_0(x^4)$.

$f(x) = (tan(x))^{tan(2x)}$. $DL_2\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de f ? Qu'en déduit-on sur f ?

Posons $t = x-\frac{\pi}{4}$ et $g(t) = f(x)$. Alors $x = t+\frac{\pi}{4}$ *et* $g(t) = f\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$ *et* $f(x) = g\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. Cherchons un $DL_2(0)$ de g :

$$g(t) = f\left(t+\frac{\pi}{4}\right) = \left(tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)^{tan\left(2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)} = e^{tan\left(2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)ln\left(tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)} = e^{tan\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)ln\left(\frac{\tan(t)+1}{1-\tan(t)}\right)}.$$

Posons $h(t) = tan\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)ln\left(\frac{\tan(t)+1}{1-\tan(t)}\right) = -\frac{[\ln(1+\tan(t))-\ln(1-\tan(t)]}{tan(2t)} = -\frac{\ln\left(1+\left(t+\frac{t^3}{3}+o_0(t^3)\right)\right)-\ln\left(1+\left(-t-\frac{t^3}{3}+o_0(t^3)\right)\right)}{2t+\frac{(2t)^3}{3}+o_0(t^3)}$

$$h(t) = -\frac{\left[\left(t+\frac{t^3}{3}\right)-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+o_0(t^3)\right]-\left[-\left(t+\frac{t^3}{3}\right)+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}+o_0(t^3)\right]}{2t+\frac{(2t)^3}{3}+o_0(t^3)} = -\frac{2t+\frac{4}{3}t^3+o_0(t^3)}{2t+\frac{8}{3}t^3+o_0(t^3)} = -\frac{2t\left(1+\frac{2t^2}{3}+o_0(t^2)\right)}{2t\left(1+\frac{4}{3}t^2+o_0(t^2)\right)}$$

$$h(t) = -\left(1+\frac{2t^2}{3}+o_0(t^2)\right)\frac{1}{1+\frac{4}{3}t^2+o_0(t^2)} = -\left(1+\frac{2t^2}{3}+o_0(t^2)\right)\left(1-\frac{4}{3}t^2+o_0(t^2)\right) = -1+\frac{2}{3}t^2+o(t^2).$$

Donc, $g(t) = e^{-1+\frac{2}{3}t^2+o(t^2).} = e^{-1}e^{\frac{2}{3}t^2+o(t^2)} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{2}{3}t^2+o(t^2)\right)$.

Donc, $f(x) = \frac{1}{e}+\frac{2}{3e}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+o_{\frac{\pi}{4}}\left((x-\frac{\pi}{4})^2\right)$.

J'en déduis que :

1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) = \frac{1}{e}$. Donc f est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{4}$ *par la valeur* $1/e$. On note $\tilde{f}$ son prolongement *par* continutié en $\frac{\pi}{4}$.

2) $\forall x \neq \frac{\pi}{4}, \frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}} = \frac{f(x)-\frac{1}{e}}{x-\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{2}{3e}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+o_{\frac{\pi}{4}}\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\right)}{x-\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3e}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+o_{\frac{\pi}{4}}\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\right)$.

   Donc, $\lim_{x\to\tilde{f}(x)}\frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}} = 0$. *Ainsi,* $\tilde{f}$ est dérivable en $\frac{\pi}{4}$ et $\tilde{f}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ et $y = \frac{1}{e}$ est l'équation de la tangente à $C\tilde{f}$ en $\frac{\pi}{4}$.

3) Son prolongement $\tilde{f}$ admet le $DL_2\left(\frac{\pi}{4}\right)$ suivant : $f(x) = \frac{1}{e}+\frac{2}{3e}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+o_{\frac{\pi}{4}}\left((x-\frac{\pi}{4})^2\right)$ donc,

   $f(x)-\frac{1}{e}\sim_{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{3e}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2$. Par conséquent, $f(x)-\frac{1}{e}$ est du signe de $\frac{2}{3e}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2$ donc positif au voisinage de $\frac{\pi}{4}$. Donc Cf est au-dessus de sa tangente horizontale et $\tilde{f}$ admet en $\frac{\pi}{4}$ un minimum local.

car si $f(x)\sim_a g(x)$ alors f et g ont le même signe au voisinage de a et la même limite en a dès que l'une de ces limites existe.

III Intégration terme à terme

$f(x) = Arcsin\left(\frac{\tan(x)}{2}\right)$ *ordre* 5 *en* $a = \frac{\pi}{3}$.

Pour x au voisinage de $\frac{\pi}{3}$, $\frac{tan(x)}{2}$ est au voisinage de $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Or, Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ donc au voisinage de $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Et par conséquent, f est dérivable au voisinage de $\frac{\pi}{3}$ et

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(1+tan^2(x))}{\sqrt{1-\frac{tan^2(x)}{4}}} \underbrace{=}_{\tan(x)=x+\frac{x^3}{3}+o_0(x^4)} \frac{1}{2}\left(1+x^2+\frac{2}{3}x^4+o_0(x^4)\right)\left(1-\underbrace{\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{6}x^4+o_0(x^4)\right)}_{=u(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+x^2+\frac{2}{3}x^4+o_0(x^4)\right)\left(1-\frac{1}{2}u(x)+\frac{3}{8}u(x)^2+o_0(x^4)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+x^2+\frac{2}{3}x^4+o_0(x^4)\right)\left(1-\left(\frac{x^2}{8}+\frac{1}{12}x^4\right)+\frac{3}{8}\times\frac{1}{16}x^4+o_0(x^4)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{7}{8}x^2+\left(-\frac{1}{8}+\frac{2}{3}-\frac{1}{12}+\frac{3}{8}\frac{1}{16}\right)x^4+o_0(x^4)\right) = \frac{1}{2}+\frac{7}{16}x^2+\frac{185}{768}\,x^4+o_0(x^4).$$

Donc le théorème d'intégration terme à terme d'un DL assure que : $f(x) = \underbrace{f(0)}_{=Arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2}x+\frac{7}{16}\frac{x^3}{3}+\frac{185}{768}\frac{x^5}{5}+o_0(x^5)$

Ainsi, $f(x) = \frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}x+\frac{7}{48}x^3+\frac{37}{768}\,x^5+o_0(x^5)$.

$DL_4(0)$ *de* $f(x) = Arcsin\left(x+\frac{1}{2}\right)$

Arcsin étant dérivable sur $]-1\,;1[$, f est dérivable est $]-\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}[$ et $\forall x \in]-\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}[$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}-x-x^2}}$.

Cherchons un $DL_3(0)$ de $f'(x)$: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}-x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{1-\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}x^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(1+\left(\underbrace{-\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}x^2}_{u(x)}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Or $\lim_{x\to 0} u(x) = 0$ et $(1+t)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}t+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)t^2}{2}+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)t^3}{6}+t^3\varepsilon(t)\ tq\ \lim_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$. Donc,

$(1+u(x))^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}u(x)+\frac{3}{8}u(x)^2+\frac{5}{16}u(x)^3+u(x)^3\varepsilon(u(x))$ et $\begin{cases} u(x) = -\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}x^2 \\ u^2(x) = \frac{16}{9}x^2+\frac{32}{9}x^3+o_0(x^3) \\ u^3(x) = \frac{64}{27}x^3+o_0(x^3) \sim_0 \frac{64}{27}x^3 \\ u(x)^3\varepsilon(u(x)) = o_0(x^3) \end{cases}$.

Alors, $\left(1+u(x)\right)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}x^2\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{16}{9}x^2+\frac{32}{9}x^3\right)+\frac{5}{16}.\frac{64}{27}x^3+o_0(x^3) = 1+\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}x^2+\frac{20}{27}x^3+o_0(x^3)$.

Donc, $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{4}{3\sqrt{3}}x+\frac{8}{3\sqrt{3}}x^2+\frac{40}{27\sqrt{3}}x^3+o_0(x^3)$. Alors le TITT assure que :

$$f(x) = f(0)+\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{x^2}{2}+\frac{8}{3\sqrt{3}}\frac{x^3}{3}+\frac{40}{27\sqrt{3}}\frac{x^4}{4}+o_0(x^4) = \frac{\pi}{6}+\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{2}{3\sqrt{3}}x^2+\frac{8}{9\sqrt{3}}\ x^3+\frac{10}{27\sqrt{3}}x^4+o_0(x^4)$$

Ex 12 Opérations sur les développements limités

1) Soit $f(x) = x^2+2x^3+x^4+o_0(x^4)$ et $g(x) = -x^3+3x^4+o_0(x^4)$. Trouver le plus grand ordre possible que l'on peut obtenir pour le développement limité en 0 de $f \times g$ $puis\ de\ \frac{g}{f} et\ enfin\ de\ f\circ g.$

2)Donner le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de la fonction polynomiale $P: (x \mapsto \sum_{k=0}^{p} a_k x^k)$ où $p = degP$

1)$f \times g$? Comme$-x^3 \times o_0(x^4) = o_0(x^7)$ et $x^2 \times o_0(x^4) = o_0(x^6)$, le plus grand ordre possible à obtenir pour le $DL(0)$de $f \times g$ est 6.

$\frac{g}{f}$? Comme $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{-x^3+3x^4+o_0(x^4)}{x^2+2x^3+x^4+o_0(x^4)} = \frac{-x+3x^2+o_0(x^2)}{1+2x+x^2+o_0(x^2)}$, le plus grand ordre possible à obtenir pour le $DL(0)$ de $\frac{g}{f}$ est 2.

$f\circ g$?

$g(x) = x^3\left(-1+3x+o_0(x)\right)$ donc on peut au mieux obtenir un $DL_7(0)$ de g^2, un $DL_{10}(0)$ de g^3 et un $DL_{13}(0)$ de g^4 . Par conséquent, le plus grand ordre possible à obtenir pour le $DL(0)$ de $f\circ g$ est 7.

2) Considérons la fonction polynomiale réelle $P: (x \mapsto \sum_{k=0}^{p} a_k x^k)$ où $p = degP \geq 0, \forall k, a_k \in \mathbb{R}\ et\ a_p \neq 0.$

$DL_n(0)$ de P ?

1[er] cas : $n \geq p$. Reine à faire !

Alors $P(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{p} a_k x^k}_{partie\ principale\ de\ degré\ inf\ à\ n} + \underbrace{0}_{=o_0(x^n)}$ est le $DL_n(0)$ de P.

2[emz] cas : $n < p$. Là on va tronquer !

$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=n+1}^{p} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n\left[\underbrace{\sum_{k=n+1}^{p} a_k x^{k-n}}_{=\varepsilon(x)}\right]$. Or $\forall k > n, \lim_{x\to 0} x^{k-n} = 0$ donc,$\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$ donc $\varepsilon(x) = o_0(1)$.

Ainsi, $P(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}_{partie\ principale\ de\ degré\ inf\ à\ n} + \underbrace{x^n o_0(1)}_{=o_0(x^n}$ est le $DL_n(0)$ de P.

Ex 13 Développement limité d'une fonction définie par une intégrale et d'une bijection réciproque

1. Soit $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$. Déterminer son DL en 0 à l' ordre 10 . Qu'en déduit-on sur f?
2. Déterminer le DL en 0 à l' ordre 5 $de\ \varphi^{-1}$ où $\varphi: (x \mapsto xe^{x^2})$

1. Posons $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$.

φ est de classe C^∞ et, en particulier, continue sur $\mathbb{R}$. Donc φ admet une primitive H sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Par conséquent, f est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x$,

$f(x) = H(x^2)-H(x)$. Cette expression de f permet alors d'affirmer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x, f'(x) = 2xH'(x^2)-H'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$.

Par conséquent, $f'(x) = 2x(1+x^8)^{-\frac{1}{2}}-(1+x^4)^{-\frac{1}{2}} = 2x\left(1-\frac{1}{2}x^8+o_0(x^8)\right)-\left(1-\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{8}x^8+o_0(x^9)\right)$

$f'(x) = -1+2x+\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{8}x^8-x^9+o_0(x^9)$.

Alors le théorème d'intégration terme à terme des DL assure que :$f(x) = \underbrace{f(0)}_{=0}-x+x^2+\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{24}x^9-\frac{1}{10}x^{10}+o_0(x^{10})$.

2.Soit $\varphi: (x \mapsto xe^{x^2})$

φ est de classe C^∞ et, en particulier, continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x, \varphi'(x) = (1+2x^2)e^{x^2} > 0$. Donc φ est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Alors le TBCSM assure que φ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\varphi(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty}\varphi, \lim_{+\infty}\varphi[= \mathbb{R}$. Comme $\forall x, \varphi'(x) \neq 0\ et\ \varphi$ est de classe C^∞ , φ^{-1} est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Alors le théorème de Taylor-Young assure que φ^{-1} admet un $DL(0)$ a tout ordre. Déterminons alors les réels $a, b, c, d, e\ et\ f$ tels que :

$\varphi^{-1}(x) = a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5+o_0(x^5)$. Comme φ est impaire, φ^{-1} est impaire et par conséquent, $a = c = e = 0$.

Comme $\lim_{x\to 0}\varphi(x)=0$ et φ *admet le* $DL_5(0)$*suivant* $\varphi(x)=x(1+x^2+\frac{x^4}{2}+o_0(x^4))=x+x^3+\frac{x^5}{2}+o_0(x^5)$, donc la composée $\varphi^{-1}\circ\varphi$ admet le $DL_5(0)$ suivant : $\varphi^{-1}\left(\varphi(x)\right)=b\varphi(x)+d\varphi(x)^3+f\varphi(x)^5+o_0(x^5)(**)$

$$avec\begin{cases}\varphi(x)=x+x^3+\dfrac{x^5}{2}+o_0(x^5),\\ (\varphi(x))^2=x^2+2x^4+o_0(x^5)\\ \left(\varphi(x)\right)^3=\varphi(x)\left(\varphi(x)\right)^2=x^3+3x^5+o_0(x^5)\\ (\varphi(x))^5=(\varphi(x))^3\left(\varphi(x)\right)^2=x^5+o_0(x^5)\end{cases}$$

Or $\varphi^{-1}\circ\varphi\ =id_{\mathbb{R}}$. Donc, $(**)$ s'écrit :

$x=b(x+x^3+\frac{x^5}{2})+d(x^3+3x^5)+fx^5+o_0(x^5)=bx+(b+d)x^3+(\frac{b}{2}+3d+f)x^5+o_0(x^5)$.

Alors par unicité de la partie principale du DL en 0 de x, $b=1, d+b=0$ et $\frac{b}{2}+3d+f=0$.

Donc $b=1, d=-1$ et $f=\frac{5}{2}$. Et, ainsi, le $DL_5(0)$ de φ^{-1} *est* : $\varphi^{-1}\ (x)=x-x^3+\frac{5}{2}x^5+o_0(x^5)$.

Ex 14 DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)$.
   Trouver trois réels A , B et C tels que : $f(x)=A+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
2. Soit $f(x)=\sqrt{\frac{3-x^2}{2-4x}}$. Montrer que $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{8\sqrt{x}}-\frac{45}{64x\sqrt{x}}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$ .Que peut – on en conclure sur Cf ?
3. Trouver un développement asymptotique de tan au voisinage de $\frac{\pi}{2}^-$ à 3 termes significatifs.
4. Montrer que $\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\ln(x)}=1+\frac{\ln(x)}{x}+\frac{1}{2}\frac{\ln(x)^2}{x^2}-\frac{\ln(x)}{2x^2}+\frac{1}{6}\frac{\ln(x)^3}{x^3}-\frac{1}{2}\frac{\ln(x)^2}{x^3}+\frac{\ln(x)}{3x^3}+o_{+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x^3}\right)$

1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)$.

Tout d'abord, $\frac{1}{(x+1)^2}\sim_{+\infty}\frac{1}{x^2}$. Donc, $o_{+\infty}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)=o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $\frac{2}{(x+1)^2}\sim_{+\infty}\frac{2}{x^2}$. Donc, $\frac{2}{(x+1)^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)=\frac{2}{x^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Et, $\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x(1+\frac{1}{x})}=\frac{1}{x}\times\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\underbrace{=}_{\substack{car\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\\ et\\ \frac{1}{1+u}=1-u+o_0(u)}}\frac{1}{x}\times\left(1-\frac{1}{x}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Donc, $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Donc

$A=0$ et $B=C=1$ conviennent. (et vous devez tous trouver les mêmes valeurs !!).

1. Soit $f(x)=\sqrt{\frac{3-x^2}{2-4x}}$. Alors,

Car $\lim_{x\to+\infty}-\overbrace{\frac{3}{x^2}}^{u}=0=\lim_{x\to+\infty}\overbrace{-\frac{1}{2x}}^{v}$ *et* $(1+u)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}u+o_0(u)$ *et* $(1+v)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}v+\frac{3}{8}v^2+o_0(v^2)$

$$f(x)=\sqrt{\frac{(1-\frac{3}{x^2})(-x^2)}{(1-\frac{1}{2x})(-4x)}}=\frac{\sqrt{x}}{2}\left(1-\frac{3}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{x}}{2}\left(1-\frac{1}{2}\frac{3}{x^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(1+\frac{1}{4x}+\frac{3}{8}\left(\frac{1}{4x^2}\right)+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=\frac{\sqrt{x}}{2}\left(1+\frac{1}{4x}-\frac{45}{32x^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

Ainsi, $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{8\sqrt{x}}-\frac{45}{64x\sqrt{x}}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$.

Donc, $f(x)-\frac{\sqrt{x}}{2}\sim_{+\infty}\frac{1}{8\sqrt{x}}$ donc $\lim_{x\to+\infty}f(x)-\frac{\sqrt{x}}{2}=0$ et $f(x)-\frac{\sqrt{x}}{2}>0$. Donc la courbe de f est asymptote à la courbe d'équation $y=\frac{\sqrt{x}}{2}$ et est au-dessus de cette courbe asymptote au voisinage de $+\infty$.

2. Développement asymptotique de tan en $\frac{\pi}{2}^-$ à trois termes significatifs.

Posons $t=\frac{\pi}{2}-x$ *et* $g(t)=\tan(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$. Cherchons un développement asymptotique de g en 0^+.

$$g(t)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\frac{1}{\tan(t)}=\frac{1}{t+\frac{t^3}{3}+\frac{2}{15}t^5+o_0(t^5)}=\frac{1}{t}\frac{1}{1+\underbrace{\frac{t^2}{3}+\frac{2}{15}t^4+o_0(t^4)}_{u(t)}}$$

$$\underbrace{=}_{\substack{car\\ \lim_{t\to 0}u(t)=0\\ et\\ \frac{1}{1+u}=1-u+u^2+o_0(u^2)}}\frac{1}{t}\left(1-\left(\frac{t^2}{3}+\frac{2}{15}t^4\right)+\left(\frac{t^2}{3}\right)^2+o_0(t^4)\right)=\frac{1}{t}\left(1-\frac{t^2}{3}-\frac{1}{45}t^4+o_0(t^4)\right).$$

L'ordre 2 suffit car $u(t)\sim_0\frac{t^2}{3}$ *donc* $u(t)^2\sim_0\frac{t^4}{9}$

Donc, $\tan(x)=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}\left(1-\frac{(\frac{\pi}{2}-x)^2}{3}-\frac{1}{45}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^4+o_{\frac{\pi}{2}}\left(\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^4\right)\right)=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}-\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\frac{1}{45}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^3+o_{\frac{\pi}{2}}\left(\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^3\right)$.

5. $\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\ln(x)}=e^{\ln(x)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}=e^{\ln(x)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\ln(x)\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{4x^4}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^4}\right)\right]}=e^{\frac{\ln(x)}{x}\left[1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]}$.

Comme $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}\overset{CC}{=}0$, $\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{\ln(x)}{x}\left[1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]}_{u(x)}=0$.

De plus, $u(x)\sim_{+\infty}\frac{\ln(x)}{x}$; donc, $u(x)^4\sim_{+\infty}\frac{\ln(x)^4}{x^4}$ et $\frac{\ln(x)^4}{x^4}=o_{+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x^3}\right)$ car $\frac{\frac{\ln(x)^4}{x^4}}{\frac{\ln(x)}{x^3}}=\frac{\ln(x)^3}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{CC}0$. Donc, $u(x)^4=o_{+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x^3}\right)$. De même ,

$\forall k\geq 0,\forall m\geq 4$, $\frac{\ln(x)^k}{x^m}=o_{+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x^3}\right)$. Par conséquent, $e^{u(x)}=1+u(x)+\frac{u(x)^2}{2}+\frac{u(x)^3}{6}+o_{+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x^3}\right)$ avec

$$\begin{cases}u(x)=\frac{\ln(x)}{x}-\frac{\ln(x)}{2x^2}+\frac{\ln(x)}{3x^3}+o_{+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x^3}\right)\\ u(x)^2=\frac{\ln(x)^2}{x^2}-\frac{\ln(x)^2}{x^3}+o_{+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x^3}\right)\ \text{car } \forall k\geq 0,\forall m\geq 4,\ \frac{\ln(x)^k}{x^m}=o_{+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x^3}\right)\\ u(x)^3=\frac{\ln(x)^3}{x^3}+o_{+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x^3}\right).\end{cases}$$

Ainsi, $\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\ln(x)}=1+\frac{\ln(x)}{x}+\frac{1}{2}\frac{\ln(x)^2}{x^2}-\frac{\ln(x)}{2x^2}+\frac{1}{6}\frac{\ln(x)^3}{x^3}-\frac{1}{2}\frac{\ln(x)^2}{x^3}+\frac{\ln(x)}{3x^3}+o_{+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x^3}\right)$.

Ex 15

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \frac{1}{(x+1)^2+1} \leq Arctan(x+1) - Arctan(x) \leq \frac{1}{x^2+1}$. En déduire que : $Arctan(x+1) - Arctan(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}$.

2. En déduire que : $\frac{Arctan(x+1)}{Arctan(x)} = 1 + \frac{2}{\pi x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{Arctan(x+1)}{Arctan(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

1.On pourra démontrer l' équivalence ; $Arctan(x+1) - Arctan(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}$ par encadrement . On montre tout d'abord que :

$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \frac{1}{(x+1)^2+1} \leq Arctan(x+1) - Arctan(x) \leq \frac{1}{x^2+1}$. Pour cela , on pourra appliquer l'inégalité des accroissements finis (c'est le plus rapide mais on n'a pas encore vu ce résultat Cf chap dérivation) ou bien par étude de fonctions :

Posons $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) = Arctan(x+1) - Arctan(x) - \frac{1}{(x+1)^2+1}$ $\ et\ g(x) = Arctan(x+1) - Arctan(x) - \frac{1}{x^2+1}$.

f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \geq 0, f'(x) = \frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x+2}{((x+1)^2+1)^2}$ et $g'(x) = \frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x+2}{(x^2+1)^2}$.

$f \sim_a g$ sietssi $\lim\limits_a \frac{f}{g} = 1$

$f'(x) = \frac{((x+1)^2+1))(1+x^2) - ((1+(x+1)^2) + (2x+2)(1+x^2))}{(1+(x+1)^2)(1+x^2)((x+1)^2+1)^2} = \frac{((x+1)^2+1))(1+x^2) - ((1+(x+1)^2)^2 + 2(x+1)(1+x^2))}{(1+x^2)((x+1)^2+1)^2} = \frac{-3x^2-4x}{(1+x^2)((x+1)^2+1)^2} \leq 0$

$g'(x) = \frac{(x^2+1)^2 - (1+x^2)(1+(x+1)^2) + (2x+2)(1+(x+1)^2)}{(1+(x+1)^2)(x^2+1)^2} = \frac{5x^2+6x+3}{(1+(x+1)^2)(x^2+1)^2} \geq 0$.

Donc f est décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$et g est croissante sur ce même intervalle. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, je peux conclure que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \geq 0\ et\ g(x) \leq 0$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \frac{1}{(x+1)^2+1} \leq Arctan(x+1) - Arctan(x) \leq \frac{1}{x^2+1}$.

Alors, $\frac{x^2}{(x+1)^2+1} \leq x^2[Arctan(x+1) - Arctan(x)] \leq \frac{x^2}{x^2+1}$. Or, $\frac{x^2}{(x+1)^2+1} \sim_{+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1\ et\ \frac{x^2}{x^2+1} \sim_{+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$. Donc les deux fonctions qui encadrent $x^2[Arctan(x+1) - Arctan(x)]$ tendent vers 1 et par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2[Arctan(x+1) - Arctan(x)] = 1$.

J'en déduis que $Arctan(x+1) - Arctan(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}$.

$f \sim_a g$ sietssi $f(x) = g(x) + g(x) o_a(1)$

2.Alors, $Arctan(x+1) - Arctan(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} o_{+\infty}(1)$ donc $\frac{Arctan(x+1)}{Arctan(x)} - 1 = \frac{1}{x^2 Arctan(x)} + \frac{1}{x^2 Arctan(x)} o_{+\infty}(1) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2 Arctan(x)}$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} Arctan(x) = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}^*$ donc $Arctan(x) \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2}$ puis $\frac{1}{Arctan(x)} \sim_{+\infty} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{2}{\pi}$ et $\frac{1}{x^2 Arctan(x)} \sim_{+\infty} \frac{2}{\pi x^2}$;

Par conséquent, $\frac{1}{x^2 Arctan(x)} = \frac{2}{\pi x^2} + \frac{2}{\pi x^2} o_{+\infty}(1) = \frac{2}{\pi x^2} + \frac{2}{\pi} o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{\pi x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Ainsi, $\frac{Arctan(x+1)}{Arctan(x)} - 1 = \frac{2}{\pi x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et finalement, $\frac{Arctan(x+1)}{Arctan(x)} = 1 + \frac{2}{\pi x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

3.$\left(\frac{Arctan(x+1)}{Arctan(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{Arctan(x+1)}{Arctan(x)}\right)}$. Posons $h(x) = \frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{Arctan(x+1)}{Arctan(x)}\right)$. Alors , d'après ce qui précède, $h(x) = \frac{1}{x^2}\ln\left(1 + \frac{2}{\pi x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\pi x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$ et $\ln(1+u) = u + o_{u\to 0}(u)$, $\ln\left(1 + \frac{2}{\pi x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{2}{\pi x^2} + o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et par conséquent,

$h(x) = \frac{1}{x^2}\left[\frac{2}{\pi x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = \frac{2}{\pi} + o_{+\infty}(1)$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \frac{2}{\pi}\ et\ ainsi,$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{Arctan(x+1)}{Arctan(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{2}{\pi}}$.

4.

Ex 16 TANGENTES –DEMI-TANGENTES – PROLONGEMENT PAR CONTINUTE–EXTREMUM LOCAL– ASYMPTOTES

1. Soit $f: (x \mapsto (1 - 2\sin(x))\tan(3x)$.

a. Déterminer Df et sa périodicité.

b. Montrer que f est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{6}$ et que son prolongement $\tilde{f}$ est dérivable en $\frac{\pi}{6}$ et étudier la position de sa courbe par rapport à sa tangente .

2. Déterminer l'équation des deux demi-tangentes de Cf où $f: \left(x \mapsto \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}\right)$ en 0 et la position de la courbe de f par rapport à ces demi-tangentes .

3. Montrer que f définie sur $]-1,1[$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}\ si\ x \neq 0 \\ 1\ si\ x = 0 \end{cases}$ est de classe C^1 sur $]-1,1[$ et admet un extremum local en 0.

4. Déterminer une équation de l'asymptote oblique de la courbe représentative de f et la position de la courbe par rapport à cette asymptote dans les cas suivants :

a. $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

b. $f(x) = \frac{1 - x + 4x^2}{2x - 3} e^{\frac{1}{x-3}}$

c. $f(x) = (x+1) Arctan\left(\frac{2+x}{x}\right)$

d. $f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

$f:(x\mapsto(1-2\sin(x))\tan(3x)$. Montrer que f est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{6}$ et que son prolongement est dérivable en $\frac{\pi}{6}$ et étudier la position de sa courbe par rapport à sa tangente.

Posons $g(t)=f\left(t+\frac{\pi}{6}\right)$.

Alors $g(t)=\left(1-2\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right)\tan\left(3\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right)=\left(1-2(\sin(t)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-2\cos(t)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\tan\left(3t+\frac{\pi}{2}\right)$

$=(1-\sqrt{3}\sin(t)-\cos(t))\frac{(-1)}{\tan(3t)}=\left(1-\sqrt{3}\left(t-\frac{t^3}{6}\right)-1+\frac{t^2}{2}+o_0(t^3)\right)\frac{(-1)}{3t+\frac{(3t)^3}{3}+o_0(t^4)}=-\left(t(-\sqrt{3}+\frac{1}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{6}t^2+o_0(t^3)\right)\frac{1}{3t\left(1+\frac{(3t)^2}{3}+o_0(t^3)\right)}$

$$=-\frac{1}{3}\left((-\sqrt{3}+\frac{1}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{6}t^2+o_0(t^3)\right)\frac{1}{\left(1+\frac{(3t)^2}{3}+o_0(t^2)\right)}=-\frac{1}{3}\left(-\sqrt{3}+\frac{1}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{6}t^2+o_0(t^3)\right)(1-3t^2+o_0(t^3))$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{6}t-\frac{19}{18}\sqrt{3}t^2+o_0(t^2)$$

Donc, $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{6}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{19}{18}\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2+o_{\frac{\pi}{6}}\left(\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2\right)$.

J'en déduis que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}f(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $i.e.$ f est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{6}$ par la valeur $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

car si $f(x)\sim_a g(x)$ alors f et g ont le même signe au voisinage de a et la même limite en a dès que l'une de ces limites existe.

De plus, son prolongement $\tilde{f}$, qui est défini en $\frac{\pi}{6}$, admet le $DL_1\left(\frac{\pi}{6}\right)$ suivant $\tilde{f}(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{6}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-o_{\frac{\pi}{6}}\left(\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^1\right)$. Donc, $\tilde{f}$ est dérivable en $\frac{\pi}{6}$ et $\tilde{f}'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{6}$ et $y=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{6}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ est l'équation de la tangente à $\widetilde{Cf}$ en $\frac{\pi}{6}$. De plus, son prolongement $\tilde{f}$ admet le $DL_1\left(\frac{\pi}{6}\right)$ suivant $\tilde{f}(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{6}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{19}{18}\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2+o_{\frac{\pi}{6}}\left(\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2\right)$. Donc, $\tilde{f}(x)-[\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{6}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)]\sim_{\frac{\pi}{6}}-\frac{19}{18}\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2$. Donc au voisinage de , $\tilde{f}(x)-[\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{6}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)]\le 0$. J'en déduis que $\widetilde{Cf}$ est sous sa tangente en $\frac{\pi}{6}$.

Déterminer l'équation des demi-tangentes en 0 de Cf où $f:\left(x\mapsto\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}\right)$ et la position de Cf par rapport à ces demi-tangentes

Tout d'abord, f est définie et continue sur $[-1\,;1]$ et est dérivable au moins sur $]-1\,;1[\setminus\{0\}$.

$\lim\limits_{x\to 0}-x^2=0$ et $(1+u)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+\frac{1}{16}u^3-\frac{5}{128}u^4+o_0(u^4)$. Donc $\sqrt{1-x^2}=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o_0(x^4)$. Alors,

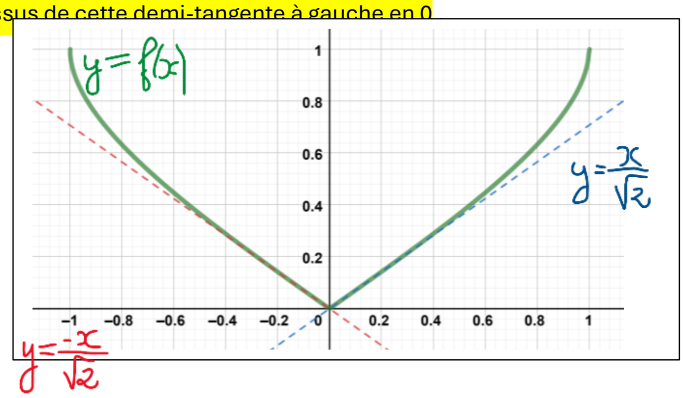
$$\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o_0(x^4)}=\sqrt{\frac{1}{2}x^2\left(1+\frac{1}{4}x^2+o_0(x^2)\right)}=\frac{|x|}{\sqrt{2}}\left(1+\underbrace{\frac{1}{4}x^2+o_0(x^2)}_{=u(x)}\right)^{\frac{1}{2}}\underset{\substack{car\\ \lim\limits_{x\to 0}u(x)=0}}{=}\frac{|x|}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{8}x^2+o_0(x^2)\right).$$

Donc, $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}=\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{8\sqrt{2}}x^3+o_{0^+}(x^3)$ et $\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{2}}+\frac{(-1)}{8\sqrt{2}}x^3+o_{0^-}(x^3)$.

Comme f admet un $DL_3(0^+)$, Cf admet la droite d'équation $y=\frac{x}{\sqrt{2}}$ comme tangente à droite à Cf en 0 ; de plus, $f(x)-\frac{x}{\sqrt{2}}\sim_{0^+}\frac{1}{8\sqrt{2}}x^3$ et $\frac{1}{8\sqrt{2}}x^3\ge 0$ au voisinage de 0^+. $Donc, f(x)-\frac{x}{\sqrt{2}}\ge 0$ au voisinage de 0^+. Cf est donc au dessus de cette demi-tangente à droite en 0 .

De même, Cf admet la droite d'équation $y=\frac{-x}{\sqrt{2}}$ est tangente à gauche à Cf en 0 ; de plus, $f(x)+\frac{x}{\sqrt{2}}\sim_{0^+}-\frac{1}{8\sqrt{2}}x^3$ et $-\frac{1}{8\sqrt{2}}x^3\ge 0$ au voisinage de 0^-. $Donc, f(x)-\frac{x}{\sqrt{2}}\ge 0$ au voisinage de 0^-. Cf est donc au dessus de cette demi-tangente à gauche en 0

car si $f(x)\sim_a g(x)$ alors f et g ont le même signe au voisinage de a et la même limite en a dès que l'une de ces limites existe.



$f(x)=(x+1)Arctan\left(\frac{2+x}{x}\right)$

Posons $g(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$

Alors, $tg(t)=t\left(\frac{1}{t}+1\right)Arctan\left(\frac{2+\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}\right)=(1+t)Arctan(2t+1)$. Cherchons un $DL(0)$ (ordre 2 ou 3 : il faut un terme significatif après l'ordre 1) de $tg(t)$:

Soit $\varphi(t)=Arctan(2t+1)$.

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(t)=\frac{2}{1+(2t+1)^2}=\frac{2}{2+4t+4t^2}=\frac{1}{1+(2t+2t^2)}=1-(2t+2t^2)+4t^2+o_0(t^2)=1-2t+2t^2+o_0(t^2)$.

Donc le théorème d'intégration terme à terme d'un DL assure que $\varphi(t)=\varphi(0)+t-t^2+\frac{2}{3}t^3+o_0(t^3)=\frac{\pi}{4}+t-t^2+\frac{2}{3}t^3+o_0(t^3)$

Donc, $tg(t) = (1+t)\left(\frac{\pi}{4}+t-t^2+\frac{2}{3}t^3+o_0(t^3)\right) = \frac{\pi}{4}+\left(\frac{\pi}{4}+1\right)t+\left(-\frac{1}{3}\right)t^3+o_0(t^3)$.

Donc $\frac{1}{x}f(x) = \frac{\pi}{4}+\left(\frac{\pi}{4}+1\right)\left(\frac{1}{x}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^3+o_{+\infty}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^3\right)$. Et finalement, $f(x)=\frac{\pi}{4}x+\left(\frac{\pi}{4}+1\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^2+o_{+\infty}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)$.

Et par conséquent, $f(x)-\left[\frac{\pi}{4}x+\left(\frac{\pi}{4}+1\right)\right]\sim_{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^2$.

car si $f(x)\sim_a g(x)$ alors f et g ont le même signe au voisinage de a et la même limite en a dès que l'une de ces limites existe.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^2=0$ et $\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^2<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\left[\frac{\pi}{4}x+\left(\frac{\pi}{4}+1\right)\right]=0$ et $f(x)-\left[\frac{\pi}{4}x+\left(\frac{\pi}{4}+1\right)\right]<0$ au voisinage de $+\infty$.

J'en conclus que la droite d'équation $y=\frac{\pi}{4}x+\left(\frac{\pi}{4}+1\right)$ est asymptote à Cf en $+\infty$ et Cf est sous cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

$f(x)=\frac{1-x+4x^2}{2x-3}e^{\frac{1}{x-3}}$

Posons $g(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$

Alors, $tg(t)=t\frac{1-\frac{1}{t}+4\frac{1}{t^2}}{2\frac{1}{t}-3}e^{\frac{1}{\frac{1}{t}-3}} = \frac{t^2-t+4}{2-3t}e^{\frac{t}{1-3t}}$. Cherchons un $DL(0)$ (ordre 2 ou 3 : il faut un terme significatif après l'ordre 1) de $tg(t)$:

$tg(t)=(4-t+t^2)\frac{1}{2\left(1-\frac{3}{2}t\right)}e^{t(1+3t+o_0(t))} = \frac{1}{2}(4-t+t^2)(1+\frac{3}{2}t+\frac{9}{4}t^2+o_0(t^2))\,e^{t+3t^2+o_0(t^2)}$

$=\frac{1}{2}(4+5t+\frac{17}{2}t^2+o_0(t^2))(1+(t+3t^2)+\frac{t^2}{2}+o_0(t^2))$

$=\frac{1}{2}(4+5t+\frac{17}{2}t^2+o_0(t^2))(1+t+\frac{7t^2}{2}+o_0(t^2))$

$=\frac{1}{2}(4+9t+\frac{55}{2}t^2+o_0(t^2)) = 2+\frac{9}{2}t+\frac{55}{4}t^2+o_0(t^2))$.

$Donc, \frac{1}{x}f(x)=2+\frac{9}{2x}+\frac{55}{4x^2}+o_{+\infty}(\frac{1}{x^2}))$. Et finalement, $f(x)=2x+\frac{9}{2}+\frac{55}{4x}+o_{+\infty}(\frac{1}{x})$.

car si $f(x)\sim_a g(x)$ alors f et g ont le même signe au voisinage de a et la même limite en a dès que l'une de ces limites existe.

Et par conséquent, $f(x)-\left[2x+\frac{9}{2}\right]\sim_{+\infty}\frac{55}{4x}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{55}{4x}=0$ et pour $x>0, \frac{55}{4x}>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\left[2x+\frac{9}{2}\right]=0$ et $f(x)-\left[2x+\frac{9}{2}\right]>0$ au voisinage de $+\infty$. J'en conclus que la droite d'équation $y=2x+\frac{9}{2}$ est asymptote à Cf en $+\infty$ et Cf est au-dessus de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

Ex 17 Fonction avec paramètre

Soit a un réel et $f_a:(x\mapsto\frac{1-ax+x^2}{\sqrt{1+x^2}}e^{Arctan(x)})$.

1. a. Déterminer un équivalent simple de f_a au voisinage de 0 .
   b. Donner l'équation de la tangente à C_{f_a} en 0 et la position, au voisinage de 0, de la courbe C_{f_a} par rapport à cette tangente (suivant les valeurs de a).
2. a. Déterminer un équivalent simple de f_a au voisinage de $+\infty$.
   b. Montrer que C_{f_a} a deux asymptotes obliques et étudier la position, au voisinage de $\pm\infty$, de C_{f_a} par rapport à ses asymptotes (suivant les valeurs de a).
   c. Vérifier que ces deux asymptotes se coupent orthogonalement sur (Ox).

1. a. $\lim\limits_{x\to0}f_a(x)=1\in\mathbb{R}^*$. Donc $f_a(x)\sim_0 1$.

   b. Cherchons un DL en 0 d'ordre suffisant pour faire apparaitre un terme significatif supplémentaire par rapport à un DL_1.

$\frac{1-ax+x^2}{\sqrt{1+x^2}}=(1-ax+x^2)(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=(1-ax+x^2)\left(1-\frac{1}{2}x^2+o_0(x^3)\right) = 1-ax+\frac{1}{2}x^2+\frac{a}{2}x^3+o_0(x^3)$.

$e^{Arctan(x)}=e^{x-\frac{x^3}{3}+o_0(x^3)}=1+\left(x-\frac{x^3}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)^2+\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)^3+o_0(x^3)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)x^3+o_0(x^3)$

$e^{Arctan(x)}=1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+o_0(x^3)$.

Donc, $f_a(x)=\left(1-ax+\frac{1}{2}x^2+\frac{a}{2}x^3+o_0(x^3)\right)\left(1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+o_0(x^3)\right)$

$f_a(x)=1+(1-a)x+(1-a)x^2+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)x^3+o_0(x^3)$. Ainsi, $f_a(x)\overset{(**)}{\hat{=}}1+(1-a)x+(1-a)x^2+\frac{1}{3}x^3+o_0(x^3)$.

Donc, l'équation de la tangente à Cf_a en 0 est $y=1+(1-a)x$.

Et si $a\neq1$ alors $f_a(x)-1-(1-a)x\sim_0(1-a)x^2$. Donc au voisinage de 0, $f_a(x)-1-(1-a)x>0$ si $a<1$ et $f_a(x)-1-(1-a)x<0$ si $a>1$. Donc, si $a>1$ alors Cf_a est sous sa tangente en 0 et si $a<1$ alors Cf_a est au-dessus de sa tangente en 0.

Et si $a=1$ alors la tangente à Cf_1 en 0 est horizontale d'équation $y=1$ et $f_1(x)-1\sim_0\frac{1}{3}x^3$. Donc si $x>0$ et x au voisinage de 0, $f_1(x)-1>0$ et si $x<0$ et x au voisinage de 0, $f_1(x)-1<0$. Donc Cf_1 traverse sa tangente en 0 et est au-dessus de cette tangente au voisinage de 0^+ et en dessous au voisinage de 0^-.

2. a. $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{Arctan(x)}=e^{\frac{\pi}{2}}\in\mathbb{R}^*$. Donc $e^{Arctan(x)}\sim_{+\infty}e^{\frac{\pi}{2}}$. De plus, $\frac{1-ax+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\sim_{+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2}}\underset{\substack{car\ x>0\ donc\\ \sqrt{x^2}=|x|=x}}{=}x$. Ainsi, $f_a(x)\sim_{+\infty}e^{\frac{\pi}{2}}x$. De même $f_a(x)\sim_{-\infty}-e^{-\frac{\pi}{2}}x$

   b. Posons $g(t)=tf_a\left(\frac{1}{t}\right)$

   Alors, pour t au voisinage de 0^+,

$tg(t)=t\frac{1-\frac{a}{t}+\frac{1}{t^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}e^{Arctan\left(\frac{1}{t}\right)}=t\frac{\frac{t^2-at+1}{t^2}}{\sqrt{\frac{t^2+1}{t^2}}}e^{\frac{\pi}{2}-Arctan(t)}\underset{\substack{t>0\ donc\\ \sqrt{t^2}=t}}{=}t\frac{\frac{t^2-at+1}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{1+t^2}}e^{\frac{\pi}{2}}e^{-Arctan(t)}=e^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-at+t^2}{\sqrt{1+t^2}}e^{Arctan(-t)}$

$tg(t) = e^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-(-a)(-t)+t^2}{\sqrt{1+t^2}} e^{Arctan(-t)} = e^{\frac{\pi}{2}} f_{-a}(-t) \underbrace{=}_{\substack{d'après\ (**) \\ avec\ \lim_{t\to 0} -t=0}} e^{\frac{\pi}{2}}[1 + (1-(-a))(-t) + (1-(-a))(-t)^2 + \frac{1}{3}(-t)^3 + o_0(t^3)].$

Ainsi, $tg(t) = e^{\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)t + e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)t^2 - \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{3}t^3 + o_0(t^3)$. Donc, $\frac{1}{x}f(x) = \frac{1}{x}g\left(\frac{1}{x}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} - (1+a)\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{x} + (1+a)\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{x^2} - \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{3x^3} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

Ainsi, $f(x) = e^{\frac{\pi}{2}}x - e^{\frac{\pi}{2}}(1+a) + e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)\frac{1}{x} - \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{3}\frac{1}{x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

J'en déduis que si $a \neq -1$ alors $f(x) - (e^{\frac{\pi}{2}}x - e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)) \sim_{+\infty} (1+a)\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{x}$. Comme $\lim_{x\to+\infty}(1+a)\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{x} = 0$ et $\begin{cases} (1+a)\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{x} > 0\ si\ a > -1 \\ (1+a)\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{x} < 0\ si\ a < -1 \end{cases}$,

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - e^{\frac{\pi}{2}}(x-(1+a)) = 0$ et $\begin{cases} f(x) - e^{\frac{\pi}{2}}(x-(1+a)) > 0\ si\ a > -1 \\ f(x) - e^{\frac{\pi}{2}}(x-(1+a)) < 0\ si\ a < -1 \end{cases}$ (puisque des fonctions équivalentes au voisinage de a ont en commun limite en a et signe au voisinage de a). De même, si $a = -1$ alors $f(x) - e^{\frac{\pi}{2}}x \sim_{+\infty} -\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{3}\frac{1}{x^2}$. Et par conséquent, $\lim_{x\to+\infty} f(x) - e^{\frac{\pi}{2}}x = 0$ et $f(x) - e^{\frac{\pi}{2}}x < 0$.

Ainsi la droite d'équation $y = e^{\frac{\pi}{2}}x - e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)$ est asymptote à Cf en $+\infty$ *et* Cf est $\begin{cases} au-dessus\ de\ cette\ asymptote\ si\ a > -1 \\ en-dessous\ de\ cette\ asymptote\ si\ a \leq -1 \end{cases}$

Alors, pour t au voisinage de 0^-,

$tg(t) = t\frac{1-\frac{a}{t}+\frac{1}{t^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} e^{Arctan\left(\frac{1}{t}\right)} = t\frac{\frac{t^2-at+1}{t^2}}{\sqrt{\frac{t^2+1}{t^2}}} e^{-\frac{\pi}{2}-Arctan(t)} \underbrace{=}_{\substack{t<0 \\ donc\ \sqrt{t^2}=-t}} t\frac{\frac{t^2-at+1}{t^2}}{\frac{1}{-t}\sqrt{1+t^2}} e^{-\frac{\pi}{2}}e^{-Arctan(t)} = -e^{-\frac{\pi}{2}}\frac{1-at+t^2}{\sqrt{1+t^2}} e^{Arctan(-t)} = -e^{-\frac{\pi}{2}} f_{-a}(-t)$

Donc, en utilisant les mêmes calculs que précédemment, je peux en déduire que :

$f(x) = -e^{-\frac{\pi}{2}}x + e^{-\frac{\pi}{2}}(1+a) - e^{-\frac{\pi}{2}}(1+a)\frac{1}{x} + \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{3}\frac{1}{x^2} + o_{-\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Ainsi la droite d'équation $y = -e^{-\frac{\pi}{2}}x + e^{-\frac{\pi}{2}}(1+a)$ est asymptote à Cf en $-\infty$ *et* Cf est $\begin{cases} au-dessus\ de\ cette\ asymptote\ si\ a \leq -1 \\ en-dessous\ de\ cette\ asymptote\ si\ a > -1 \end{cases}$

d. L'asymptote à Cf en $+\infty$ a pour coefficient directeur (pente) $e^{\frac{\pi}{2}}$ donc le vecteur $\vec{u} = \vec{i} + e^{\frac{\pi}{2}}\vec{j}$ est directeur de l'asymptote $+\infty$.

L'asymptote à Cf en $-\infty$ a pour coefficient directeur (pente) $-e^{-\frac{\pi}{2}}$ donc le vecteur $\vec{v} = \vec{i} - e^{-\frac{\pi}{2}}\vec{j}$ est directeur de cette asymptote en $-\infty$. Alors, $\vec{u}.\vec{v} = 1 \times 1 + e^{\frac{\pi}{2}} \times \left(-e^{-\frac{\pi}{2}}\right) = 1 - 1 = 0$. J'en conclus que $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont orthogonaux et ainsi les deux asymptotes sont perpendiculaires.

De plus, l'asymptote en $+\infty$ coupe l'axe des abscisses au point $A(x,0)$ tel que $0 = e^{\frac{\pi}{2}}x - e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)$ *i.e.* $x = 1 + a$. Et l'asymptote en $-\infty$ coupe l'axe des abscisses au point $A'(x,0)$ tel que $0 = -e^{-\frac{\pi}{2}}x + e^{-\frac{\pi}{2}}(1+a)$ *i.e.* $x = 1 + a$. Donc, $A = A'$ et ainsi, les deux asymptotes se coupent perpendiculairement au point A de la droite des abscisses.

Ex 18 Etude de fonctions

1. Etude complète et tracé de la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-2)}$.
2. Etude complète et tracé de la fonction $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+x}$
3. Soit $0 < a < b$. Etude complète de la fonction $f(x) = \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Ex 19 Raccord dans une équation différentielle

1. Résoudre $x^2(1+x)y' + y = x$ sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $|x|y' + (x-1)y = x^3$.

Ex 20 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos(x) e^{\frac{1}{1-\sin(x)}}$

b) $\lim_{x\to+\infty} x(Arctan(x) - \frac{\pi}{2})$

c) $\lim_{x\to 0}(1+x^\alpha)^{\frac{1}{x^{\alpha+\beta}}}$

d) $\lim_{x\to 1}\frac{x^x - x}{1-x+ln(x)}$

e) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{sin^2 x} - \frac{1}{1-\cos(x)}\right)$

f) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{cos^2 x} + \frac{1}{\ln(sin(x))}\right)$

g) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{\ln(x)}{x}} - x}{x^2\ln(x)}$

h) $\lim_{x\to 0}\frac{sin^n x - x^n}{x^{n+2}}$

i) $\lim_{x\to 1}\frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{x-1}$

j) $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - ex^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}$

l) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$

m) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2^x+3^x}{2^{x+1}+5^{\frac{x}{2}}}\right)^{\frac{1}{2-x}}$

n) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

o) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^n x-n\cos(x)+n-1}{\sin^4 x}$

p) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\mathrm{Arctan}(2\sin x)-\frac{\pi}{4}}{\cos\ (3x)}$

q) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x}$

r) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$

s) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(2x^2-3x+1)\tan(\pi x)$

t) $\lim\limits_{x\to 2}(2^x+3^x-12)^{\tan\frac{\pi x}{4}}$

u) $\lim\limits_{x\to 0}\sin(x)^{\mathrm{Arctan}(x)}$

v) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{ch(x)}$

w) $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x^x-a^a}$ où $a\in\mathbb{R}^{+*}$

Limite en 0 de $\frac{2}{\sin^2(x)}-\frac{1}{1-\cos(x)}$.

$\frac{2}{\sin^2(x)}\sim_0\frac{2}{x^2}$ et $\frac{1}{1-\cos(x)}\sim_0\frac{1}{-\frac{x^2}{2}}=\frac{2}{x^2}$. Donc, je ne peux pas conclure.

$$\frac{2}{\sin^2(x)}-\frac{1}{1-\cos(x)}=\frac{2}{\left(x-\frac{x^3}{6}+o_0(x^4)\right)^2}-\frac{1}{\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o_0(x^4)}=\frac{2}{x^2-\frac{x^4}{3}o_0(x^4)}-\frac{2}{x^2-\frac{x^4}{12}+o_0(x^4)}=\frac{2}{x^2}\left(\frac{1}{1-\frac{x^2}{3}o_0(x^2)}-\frac{1}{1-\frac{x^2}{12}+o_0(x^2)}\right)$$

$=\frac{2}{x^2}\left(\left(1+\frac{x^2}{3}o_0(x^2)\right)-\left(1+\frac{x^2}{12}+o_0(x^2)\right)\right)=\frac{2}{x^2}\left(\frac{x^2}{4}+o_0(x^2)\right)\sim_0\frac{1}{2}$. Donc, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\sin^2(x)}-\frac{1}{1-\cos(x)}=\frac{1}{2}$

Limite en $+\infty$ de $\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x}$.

$\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x}=e^{x\ln\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$. Posons $t=\frac{1}{x}$ et $g(t)=f(x)$.

Alors $x=\frac{1}{t}$ et $g(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$ et $f(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)$. Déterminons la limite de g en 0 .

$g(t)=e^{\frac{1}{t}\ln(\sin(t)+\cos(t))}=e^{\frac{1}{t}\ln(1+t+o_0(t)))}=e^{\frac{1}{t}(t+o_0(t))}=e^{1+o_0(1)}$. Donc, $\lim\limits_{t\to 0}g(t)=e$ et ainsi, $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=e$.

Limite en $+\infty$ de $\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$.

$\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}=e^{x\ln(x)\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)}=e^{x\ln(x)[\ln(\ln(1+x))-\ln(\ln(x))]}$. Posons $t=\frac{1}{x}$ et $g(t)=f(x)$.

Alors $g(t)=e^{\frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{t}\right)\left[\ln\left(\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right)-\ln\left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right]}$.Posons $h(t)=\frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{t}\right)\left[\ln\left(\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right)-\ln\left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right]$.

$h(t)=\frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{t}\right)\left[\ln\left(\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right)-\ln\left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right]=-\frac{1}{t}\ln(t)\left[\ln(\ln(1+t))-\ln(t))-\ln(-\ln(t))\right]$

$h(t)=-\frac{1}{t}\ln(t)\left[\ln(-\ln(t))+\ln\left(1-\frac{\ln(1+t)}{\ln(t)}\right)-\ln(-\ln(t))\right]$

$=-\frac{1}{t}\ln(t)\ln\left(1-\frac{\ln(1+t)}{\ln(t)}\right)\underbrace{\sim_0}_{\substack{\text{car }\lim\limits_{t\to 0}-\frac{\ln(1+t)}{\ln(t)}=0\\ \text{et }\ln(1+u)\sim_0 u}}-\frac{1}{t}\ln(t)\left(-\frac{\ln(1+t)}{\ln(t)}\right)=\frac{\ln(1+t)}{t}\sim_0 1.$

Donc, $\lim\limits_{t\to 0}g(t)=e$ et ainsi, $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=e.\frac{2}{3e}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+o_{\frac{\pi}{4}}\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\right)$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{1}{\ln(\sin(x))}\right)$?

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-\sin(t)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\cos(t)$

Posons $t=x-\frac{\pi}{2}$ et $g(t)=f(x)$. Alors,

$$g(t)=f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\frac{2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}+\frac{1}{\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\right)}=\frac{2}{\sin^2(t)}+\frac{1}{\ln(\cos(t))}=\frac{2}{\left(t-\frac{t^3}{6}+o_0(t^3)\right)^2}+\frac{1}{\ln\left(1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+o_0(t^4)\right)}=\frac{2}{t^2\left(1-\frac{t^2}{6}+o_0(t^2)\right)^2}+\frac{1}{-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}-\frac{t^4}{8}o_0(t^4)}$$

$=\frac{2}{t^2\left(1-\frac{t^2}{3}+o_0(t^2)\right)}+\frac{1}{-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}-\frac{t^4}{8}+o_0(t^4)}=\frac{2}{t^2\left(1-\frac{t^2}{3}+o_0(t^2)\right)}+\frac{1}{\frac{t^2}{2}\left[-1-\frac{t^2}{6}+o_0(t^2)\right]}=\frac{2}{t^2}\left[\frac{1}{1-\frac{t^2}{3}+o_0(t^2)}-\frac{1}{1+\frac{t^2}{6}+o_0(t^2)}\right]=\frac{2}{t^2}\left[1+\frac{t^2}{3}+o_0(t^2)-\left(1-\frac{t^2}{6}+o_0(t^2)\right)\right]=\frac{2}{t^2}\left[\frac{t^2}{2}+o_0(t^2)\right]\sim_0 1$. Donc $\lim\limits_{t\to 0}g(t)=1$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{1}{\ln(\sin(x))}\right)=1.$

$\frac{1}{1+u}=1-u+o_0(u)$ et $\lim\limits_{t\to 0}-\frac{t^2}{3}+o_0(t^2)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t^2}{6}+o_0(t^2)$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(2x^2-3x+1)\tan(\pi x)$

Posons $t=x-\frac{1}{2}$ et $g(t)=f(x)$. Alors,

$$g(t)=f\left(\frac{1}{2}+t\right)=\left(2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-3\left(t+\frac{1}{2}\right)+1\right)\tan\left(\pi\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)=(2t^2-t)\tan\left(\frac{\pi}{2}+\pi t\right)=(2t^2-t)\left(-\frac{1}{\tan(\pi t)}\right)\sim_0(-t)\times\frac{1}{-\pi t}=\frac{1}{\pi}.$$

Donc $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = \frac{1}{\pi}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\pi}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{2x}\right)^{ch(x)}$

$f(x) = e^{ch(x)ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)}$. Posons $H(x) = ch(x)ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)$.

$ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{2x}$. Donc, $H(x) \sim_{+\infty} \frac{ch(x)}{2x} = \frac{1}{4x}(e^x + e^{-x}) \sim_{+\infty} \frac{e^x}{4x}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \overset{CC}{=} +\infty$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = +\infty$. Et ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0} \sin(x)^{Arctan(x)}$

$f(x) = e^{Arctan(x)ln(\sin(x))}$. Posons $H(x) = Arctan(x)ln(\sin(x))$.

$Arctan(x) \sim_0 x$. Donc, $H(x) \sim_0 xln(\sin(x))$. Or, $xln(\sin(x)) = xln(x + o_0(x)) = x[ln(x) + \ln(1 + o_0(1))] \sim_0 xln(x)$.

Or, $\lim\limits_{x\to 0} xln(x) \underbrace{=}_{CC} 0$.Donc, $\lim\limits_{x\to 0} H(x) = 0$ et ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
donc $e^{-x} = o_{+\infty}(e^x)$.

$2t^2 = o_0(t)$ donc $2t^2 - t \sim_0 -t$.
$\tan(u) \sim_{u\to 0} u$ et $\lim\limits_{t\to 0} \pi t = 0$ donc $\tan(\pi t) \sim_0 \pi t$.

$\ln(1+u) \sim_0 u$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0$ donc $ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{2x}$