Méthodes de calcul des dérivées nièmes d'une fonction donnée.

Les SAVOIR-FAIRE fondamentaux !

Prérequis :

- **Connaitre parfaitement les dérivées successives des fonctions usuelles**
- **Connaitre la formule de Leibniz, la formule des dérivées successives de $u(ax+b)$**
- **Connaitre le critère de classe $C^{n\,(\infty)}$**
- **Savoir dériver une fonction (formule de dérivation d'une combinaison linéaire, produit, inverse, quotient, composée)**
- **Savoir linéariser**
- **Savoir passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement**
- **Savoir décomposer en éléments simples**
- **Savoir calculer une limite**

1. CONJECTURE (+ récurrence) : cette méthode peut toujours être tentée....

Dérivées successives de $\varphi(x) = \frac{1}{3-2x}$.

φ est de classe C^∞ sur $D = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$ car $(x \mapsto 3-2x)$ l'est et ne s'annule pas sur D.

Et $\forall x \in D, \varphi(x) = (3-2x)^{-1}$.

$\varphi'(x) = (-1)(-2)(3-2x)^{-2}$.

$\varphi''(x) = (-2)(-1)(-2)^2(3-2x)^{-3}$

$\varphi'''(x) = (-3)(-2)(-1)(-2)^3(3-2x)^{-4}$.

Conjecture $H(n)$: $\forall x \in D, \varphi^{(n)}(x) = n!\,2^n(3-2x)^{-(n+1)}$.

$H(0)$ est vraie. Supposons $H(n)$ pour un entier naturel n. Alors $\forall x \in D, \varphi^{(n)}(x) = n!\,2^n(3-2x)^{-(n+1)}$. Donc,

$\forall x \in D, \varphi^{(n+1)}(x) = \varphi^{(n)\prime}(x) = n!\,2^n[-(n+1)][-2](3-2x)^{-(n+1)-1} = (n+1)!\,2^{n+1}(3-2x)^{-(n+2)}$.

Donc $H(n+1)$ vraie dès que $H(n)$ vraie.

J'en conclus par le théorème de récurrence simple que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D, \varphi^{(n)}(x) = n!\,2^n(3-2x)^{-(n+1)}$.

2. LEIBNIZ : cette méthode s'applique lorsque φ est le produit de deux fonctions dont je connais les dérivées successives.

Dérivées successives de $\varphi(x) = e^x\underbrace{(3x^2-2x+5)}_{P(x)}$. φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ car P et exp le sont et $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\underbrace{P^{(k)}(x)}_{=0\ si\ k\geq 3}exp^{(m-k)}(x) = \binom{m}{0}P(x)e^x + \binom{m}{1}P'(x)e^x + \binom{m}{2}P''(x)e^x + \underbrace{\binom{m}{3}P'''(x)e^x + \cdots + \binom{m}{m}P^{(m)}(x)e^x}_{=0} .$$

Donc , si $m \geq 2$, alors $\varphi^{(m)}(x) = (3x^2-2x+5)e^x + m(6x-2)e^x + \frac{m(m-1)}{2}6e^x$

Ie. $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi^{(m)}(x) = \left(3x^2+(6m-2)x+5-2m+3m(m-1)\right)e^x$ (formule encore valable pour $m \in \{0,1\}$ ... à $vérifier$).

3. LINEARISATION : cette méthode s'applique lorsque φ est le produit de fonctions trigonométriques

Dérivées successives de $\varphi(x) = sin^2(2x)cos^3(5x)$

φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ car sin et cos le sont.

Et $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \left(\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i}\right)^2\left(\frac{e^{i5x}+e^{-i5x}}{2}\right)^3 = -\frac{1}{2^5}\left(e^{i4x}-2+e^{-i4x}\right)\left(e^{i15x}+3e^{i5x}+3e^{-i5x}+e^{-i15x}\right)$

$$= -\frac{1}{2^5}\left(e^{i19x}+3e^{i9x}+3e^{-ix}+e^{-i11x}-2e^{i15x}-6e^{i5x}-6e^{-i5x}-2e^{-i15x}+e^{i11x}+3e^{ix}+3e^{-i9x}+e^{-i19x}\right)$$

$$= -\frac{1}{2^4}(\cos(19x)-2\cos(15x)+\cos(11x)+3\cos(9x)-6\cos(5x)+3\cos(x))$$

Donc $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$,

$\varphi^{(m)}(x) = -\frac{1}{2^4}\left(19^m\cos\left(19x+m\frac{\pi}{2}\right) - 2\times 15^m\times\cos\left(15x+m\frac{\pi}{2}\right) + 11^m\cos\left(11x+m\frac{\pi}{2}\right) + 3\times 9^m\times\cos\left(9x+m\frac{\pi}{2}\right) - 6\times 5^m\times\cos\left(5x+m\frac{\pi}{2}\right) + 3\cos\left(x+m\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

4. PASSAGE EN COMPLEXE : cette méthode s'applique lorsque φ est le produit d'une fonction exponentielles et d'une fonction trigonométrique.

Dérivées successives de φ : $(x \mapsto \sin(x)e^x)$. $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = Im\left(e^{ix}e^x\right) = Im\left(\underbrace{e^{(1+i)x}}_{g(x)}\right)$. D'après ce qui précède, g est C^∞ sur $\mathbb{R}$

et $\forall x \in \mathbb{R}, g^{(k)}(x) = (1+i)^k e^{(1+i)x} = \sqrt{2}^k e^{ik\frac{\pi}{4}}e^{(1+i)x} = \sqrt{2}^k e^{i\left(k\frac{\pi}{4}+x\right)}e^x$. Donc , φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$

et $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi^{(k)}(x) = Im\left(g^{(k)}(x)\right) = \sqrt{2}^k e^x \sin\left(x+k\frac{\pi}{4}\right)$.

Dérivées successives de φ : $(x \mapsto \sin^2(x)e^{-2x})$. $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}e^{-2x} = \frac{e^{-2x}}{2} - \frac{1}{2}Re\left(e^{i2x}e^{-2x}\right) = \frac{e^{-2x}}{2} - \frac{1}{2}Re\left(\underbrace{e^{2(-1+i)x}}_{g(x)}\right)$.

D'après ce qui précède, g est C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc $Re(g)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$

et $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, g^{(k)}(x) = 2^k(-1+i)^k e^{2(-1+i)x} \overset{\substack{car \\ -1+i=\sqrt{2}e^{i3\frac{\pi}{4}}}}{\triangleq} 2^k\sqrt{2}^k e^{ik3\frac{\pi}{4}}e^{2(-1+i)x} = \left(2\sqrt{2}\right)^k e^{-2x}e^{i\left(\frac{3k\pi}{4}+2x\right)}$

$g^{(k)}(x) = \left(2\sqrt{2}\right)^k e^{-2x}\cos\left(\frac{3k\pi}{4}+2x\right) + i\left(2\sqrt{2}\right)^k e^{-2x}\sin\left(\frac{3k\pi}{4}+2x\right)$.

Donc , φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme somme de telles fonctions

et $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi^{(k)}(x) = \frac{1}{2}(-2)^k e^{-2x} - \frac{1}{2}Re\left(g^{(k)}(x)\right) = \frac{1}{2}\left[(-2)^k - 2^{\frac{3k}{2}}\cos\left(2x+\frac{3k\pi}{4}\right)\right] e^{-2x}$.

5. DECOMPOSITION EN ELEMENTS SIMPLES : cette méthode s'applique lorsque φ est une fonction rationnelle.

Dérivées successives de f : $\left(x \mapsto \frac{x}{(x-2)(x+3)}\right)$. Je décompose f en éléments simples et je dérive chaque élément simple .Ici , f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\{2,-3\}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\{2,-3\}, f(x) = \frac{x}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{5}\left(\frac{2}{(x-2)} + \frac{3}{(x+3)}\right)$. Donc $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2,-3\},\ f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{5}\left(\frac{2}{(x-2)^{k+1}} + \frac{3}{(x+3)^{k+1}}\right)$.

Dérivée $n$ième de $f(x) = \frac{x^2+1}{1-5x}$.

$Df = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{5}\right\}$. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{5}\right\}$ car f est constituée de fonctions de classe C^∞ sur leur propre domaine de définition.

Division euclidienne : je fais la division euclidienne de x^2+1 par $1-5x$: $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+1 = (1-5x)\left(-\frac{1}{5}x - \frac{1}{25}\right) + \frac{26}{25}$.

Réécriture de $f(x)$: $\forall x \in Df, f(x) = \frac{x^2+1}{1-5x} = \frac{(1-5x)\left(-\frac{1}{5}x-\frac{1}{25}\right)+\frac{26}{25}}{1-5x} = \underbrace{-\frac{1}{5}x - \frac{1}{25}}_{P(x)} + \frac{26}{25}\underbrace{\left(\frac{1}{1-5x}\right)}_{Q(x)}$.

Comme P et Q sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{5}\right\}$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in Df, f^{(n)}(x) = P^{(n)}(x) + \frac{26}{25}Q^{(n)}(x)$.

Or, $\forall x \in Df nP'(x) = -\frac{1}{5}$ et $\forall n \geq 2, P^{(n)}(x) = 0$.

Et, $\forall x \in Df, Q(x) = u(1-5x)\ avec\ u(t) = \frac{1}{t}\ donc\ \ Q^{(n)}(x) = (-5)^n u^{(n)}(1-5x) \underbrace{=}_{\substack{le\ cours \\ assure\ que \\ u^{(n)}(t)=\frac{(-1)^n n!}{t^{n+1}}}}$

On peut aussi trouver les dérivées successives de Q par conjecture .

$\forall x \in Df, f'(x) = -\frac{1}{5} + \frac{26}{25}\frac{5}{(1-5x)^2}$ et $\forall n \geq 2, f^{(n)}(x) = \frac{26}{25}\frac{(-5)^n(-1)^n n!}{(1-5x)^{n+1}}$.

6. CRITERE DE CLASSE C^n : cette méthode s'applique aux fonctions définies par morceaux et permet de connaitre la dérivabilité d'ordre n au(x) point(s) de raccord et les nombres dérivées successifs en ce point.

Soit n un entier naturel non nul . Soit f: $\left(x \mapsto \begin{cases} x^n \ln(x)\ si\ x > 0 \\ 0\ si\ x = 0 \end{cases}\right)$. Montrer que f est de classe C^{n-1} mais pas n-fois dérivable sur $\mathbb{R}^+$et $\forall k \in [\![0, n-1]\!], f^{(k)}(0) = 0$. Que peut-on en conclure sur les ensembles D^n (ℝ,ℝ) et C^{n-1}(ℝ,ℝ) ?

Posons $g(x) = \underbrace{x^n}_{u(x)}\ \underbrace{\ln(x)}_{v(x)}$. g est de classe C^∞ sur $Dg = \mathbb{R}^{+*}$ car constituée des fonctions u et v de classe C^∞ sur leur propre domaine de définition et d'après **Leibniz**, $\forall p \in [\![0, n]\!], \forall x > 0, g^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}u^{(k)}(x)v^{(p-k)}(x)$

car $ln^{(m)}(x) = \begin{cases} \ln(x)\ si\ m = 0 \\ \frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{x^m}\ si\ m > 0 \end{cases}$

$g^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}u^{(k)}(x)v^{(p-k)}(x) + u^{(p)}(x)v^{(0)}(x)$

$g^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}\frac{(-1)^{p-k-1}(p-k-1)!}{x^{p-k}} + \frac{n!}{(n-p)!}x^{n-p}\ln(x)$

Comme $p \in [\![0, n]\!], \forall k \in [\![0, p]\!], n-k \geq 0, donc\ u^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$.

$g^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}(-1)^{p-k-1}(p-k-1)x^{n-p} + \frac{n!}{(n-p)!}x^{n-p}\ln(x)$

$g^{(p)}(x) = \left[\sum_{k=0}^{p-1}\frac{p!}{(p-k)!k!}(-1)^{p-k-1}\frac{n!(p-k-1)!}{(n-k)!} + \frac{n!}{(n-p)!}\ln(x)\right]x^{n-p}$

$g^{(p)}(x) = \left[p!(-1)^{p-k-1}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k}{(p-k)} + \frac{n!}{(n-p)!}\ln(x)\right]x^{n-p} = [A_p + B_p\ln(x)]x^{n-p}$ où $A_p\ et\ B_p$ sont réels.

$g^{(p)}(x) = A_p\, x^{n-p} + B_p x^{n-p}\ \ln(x)$ où $A_p\ et\ B_p$ sont réels.

Si $0 \leq p < n$ alors $\lim_{x\to 0} x^{n-p}\ \ln(x) = 0$ et donc, $\lim_{x\to 0} g^{(p)}(x) = 0$. Alors le critère de classe C^{n-1}assure que f est de classe C^{n-1} sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f^{(p)}$: $\left(x \mapsto \begin{cases} A_p\, x^{n-p} + B_p x^{n-p}\ \ln(x)\ si\ x > 0 \\ 0\ si\ x = 0 \end{cases}\right)$.

Par contre, $g^{(n)}(x) = A_n + B_n\ln(x)$ donc $\lim_{x\to 0} g^{(n)}(x) = +\infty$. Alors le critère de dérivabilité assure que $f^{(n-1)}$ n'est pas dérivable en 0 et $Cf^{(n-1)}$ a une tangente verticale en 0.