Dérivées d'ordre supérieur.
Comparaison de fonctions et développements limités.

K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. D est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

I Dérivées d'ordre supérieur.

1. Définitions et notations

1 **Définition :** Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans K définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$. Soit a un point non isolé de D .

- Par convention, $f^{(0)}(a) = f(a)$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. f est k-fois dérivable en a lorsque $f, f', f'', \dots, f^{(k-2)}$ $sont$ dérivables en a et sur un voisinage de a dans D et $f^{(k-1)}$ est dérivable en a . Alors par définition , la dérivée k −ième de f en a est : $f^{(k)}(a) = \left(f^{(k-1)}\right)'(a)$.
- Par convention , $f^{(0)} = f$ fonction dérivée 0 −ième de f

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. f est k-fois dérivable sur D lorsque f est $(k-1)$-fois dérivable sur D et $f^{(k-1)}$ est dérivable sur D. Alors par définition , la fonction dérivée k −ième de f est : $f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'$.

- f est de classe C^k sur D lorsque f est k-fois dérivable sur D et $f^{(k)}$ est continue sur D .
- f est infiniment dérivable ou de classe C^∞ sur D lorsque pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f est k-fois dérivable sur D.
- $D^k(D, K)$ est l'ensemble des fonctions k-fois dérivables sur D et à valeurs dans K .
- $C^0(D, K)$ est l'ensemble des fonctions continues sur D et à valeurs dans K.
- $C^k(D, K)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^k sur D et à valeurs dans K.
- $C^\infty(D, K)$ est l'ensemble des fonctions $infiniment$ dérivables sur D et à valeurs dans K .

2 **Conséquence :** *Si* f est à valeurs complexes, alors f est k-fois dérivable sur D **si et ssi** $Re(f)$ et $Im(f)$ le sont . Et dans ce cas , $Re\left(f^{(k)}\right) = \left(Re(f)\right)^{(k)}$ et $Im\left(f^{(k)}\right) = \left(Im(f)\right)^{(k)}$.

3 **Remarque :** Soit $k \in \mathbb{N}^*$ $tel\ que$ $k \geq 2$. $D^{k+1}(D,K) \subsetneq C^k(D,K) \subsetneq D^k(D,K)$ et $D^2(D,K) \subsetneq C^1(D,K) \subsetneq D^1(D,K) \subsetneq C^0(D,K) \subsetneq F(D,K)$. Ces inclusions sont strictes.

4 **Prop :** si f est paire et et de classe C^∞ sur I alors $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(2k+1)}$ est impaire et $f^{(2k)}$ est paire .
si f est impaire et de classe C^∞ sur I alors $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(2k+1)}$ est paire et $f^{(2k)}$ est impaire .

2. Exemples de référence

5 **Prop Dérivées successives des fonctions usuelles ♥♥♥:** Les fonctions inverse, logarithme , exponentielle , puissances , sinus et cosinus sont infiniment dérivables sur leur domaine de définition respectif. **Soit $k \in \mathbb{N}$**.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, exp^{(k)}(x) = e^x$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{k/2}\sin(x)\ si\ k\ pair \\ (-1)^{(k-1)/2}\cos(x) si\ k\ impair \end{cases}$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{k/2}\cos(x)\ si\ k\ pair \\ (-1)^{(k+1)/2}\sin(x) si\ k\ impair \end{cases}$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, sh^{(k)}(x) = \begin{cases} \mathrm{sh}(x)\ si\ k\ pair \\ \mathrm{ch}(x) si\ k\ impair \end{cases}$ et $ch^{(k)}(x) = \begin{cases} \mathrm{ch}(x)\ si\ k\ pair \\ \mathrm{sh}(x) si\ k\ impair \end{cases}$
5. Soit q un entier naturel et $f_q: (x \mapsto x^q)$. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_q^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{q!}{(q-k)!} x^{q-k}\ si\ k \in [\![0, q]\!] \\ 0\ si\ k > q\ . \end{cases}$
6. Soit $f: \left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$. Si $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^*$ alors $\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$.
7. Si $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^*$ alors $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, ln^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$
8. Soit α un réel tq $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $f_\alpha: (x \mapsto x^\alpha)$. Si $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^*$ $alors, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f_\alpha^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-k}$.

3. Opérations sur les fonctions n-fois dérivables

6 **Prop Dérivées successives d'une somme et d'un produit -F0RMULE DE LEIBNIZ**

Soient f , g des fonctions définies sur D et α , β deux constantes et n un entier naturel .
Si f , g sont n- fois dérivables (resp. de classe C^n) sur D alors $\alpha f + \beta g$ et fg sont n- fois dérivables (resp. de classe C^n) sur D et

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)} \quad \text{et} \quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad (Leibniz)$$ ♥♥♥

7 **Généralisation :** Soient $f_1, f_2, \dots, f_p$ des fonctions définies sur D et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ des constantes .Si $f_1, f_2, \dots, f_p$ sont n- fois dérivables sur D alors $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k f_k$ et $\prod_{k=1}^{p} f_k$ sont n- fois dérivables sur D et $\left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k f_k\right)^{(n)} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k {f_k}^{(n)}$

⚠ pas de formule générale pour le produit de p fonctions sauf pour $n = 1$: $\left(\prod_{k=1}^{p} f_k\right)' = \sum_{j=1}^{p} f_j' \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{p} f_k\right)$.

8 **Dérivées successives des fonctions polynomiales :** Toute fonction polynomiale est de classe C^∞sur $\mathbb{R}$.

Si, $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{q=0}^{n} a_q x^q$ alors $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ P^{(k)}(x) = \begin{cases} \sum_{q=k}^{n} a_q \frac{q!}{(q-k)!} x^{q-k} & \text{si } k \leq \deg(P) \\ 0 & \text{si } k > \deg(P) \end{cases}$.

9 **Prop. : Dérivabilité d'ordre supérieur d'un quotient .** Soient f , g des fonctions définies sur D et n un entier naturel .
Si f, g sont n- fois dérivables (resp. de classe C^n) sur D et g ne s'annule pas sur D alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont n- fois dérivables (resp. de classe C^n) sur D . ⚠ pas de formule générale pour $\left(\frac{1}{g}\right)^{(k)}$ et $\left(\frac{f}{g}\right)^{(k)}$

10 **Prop. : Dérivées successives d'une composée** Soient f , g des fonctions définies sur resp. I et J et n un entier naturel .
Si f et g sont n- fois dérivables (resp. de classe C^n) sur resp I et J et $\forall x \in I, f(x) \in J$ alors $g \circ f$ est n- fois dérivables (resp. de classe C^n) sur I ⚠ pas de formule générale pour $(g \circ f)^{(n)}$.

11 **Cas particulier :** Si f est k- fois dérivable sur Df et a et b deux constantes réelles alors $g: (x \mapsto f(ax+b))$ est k- fois dérivable sur Dg et $\forall x \in \mathbb{R}, g^{(k)}(x) = a^k f^{(k)}(ax+b)$.

12 **Exemples à connaitre :** $f: \left(x \mapsto ln(1+x)\right)$ est de classe C^∞sur $]-1,+\infty[$ et $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall x \in D, f^{(m)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$.
$g: \left(x \mapsto \frac{1}{x-a}\right)$ est de classe C^∞sur $D = \mathbb{R}\backslash\{a\}$ et $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall x \in D, g^{(m)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(x-a)^{k+1}}$.

13 **BILAN : Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ toute fonction constituée uniquement de fonctions de classe C^k (resp . k-fois dérivables) sur leur domaine de définition respectifs est de classe C^k (resp . k-fois dérivables) sur son domaine de définition .**

14 **Exemples : 1) Dérivées successives de $\varphi(x) = e^x \underbrace{(3x^2 - 2x + 5)}_{P(x)}$** . φ est de classe C^∞sur $\mathbb{R}$ car P et exp le sont et $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall x \in D$,

$$\varphi^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \underbrace{P^{(k)}(x)}_{=0 \ si\ k\geq 3} exp^{(m-k)}(x) = \binom{m}{0} P(x)e^x + \binom{m}{1} P'(x)e^x + \binom{m}{2} P''(x)e^x + \underbrace{\binom{m}{3} P'''(x)e^x + \cdots + \binom{m}{m} P^{(m)}(x)e^x}_{=0} .$$

Donc , si $m \geq 2$, alors $\varphi^{(m)}(x) = (3x^2 - 2x + 5)e^x + m(6x-2)e^x + \frac{m(m-1)}{2} 6e^x$
Ie. $\varphi^{(m)}(x) = (3x^2 + (6m-2)x + 5 - 2m + 3m(m-1))e^x$ (formule encore valable pour $m \in \{0,1\}$ ... à $vérifier$).

2)Dérivées successives de φ : $(x \mapsto \sin(x)e^x)$. $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = Im\left(e^{ix}e^x\right) = Im\left(\underbrace{e^{(1+i)x}}_{g(x)}\right)$. D'après ce qui précède, g est C^∞ sur $\mathbb{R}$
et $\forall x \in \mathbb{R}, g^{(k)}(x) = (1+i)^k e^{(1+i)x} = \sqrt{2}^k e^{ik\frac{\pi}{4}} e^{(1+i)x} = \sqrt{2}^k e^{i\left(k\frac{\pi}{4}+x\right)} e^x$. Donc , φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$
et $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi^{(k)}(x) = Im\left(g^{(k)}(x)\right) = \sqrt{2}^k e^x \sin\left(x + k\frac{\pi}{4}\right)$.

3) Dérivées successives de $f: \left(x \mapsto \frac{x}{(x-2)(x+3)}\right)$. Je décompose f en éléments simples et je dérive chaque élément simple .Ici , f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\{2,-3\}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\{2,-3\}, f(x) = \frac{x}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{5}\left(\frac{2}{(x-2)} + \frac{3}{(x+3)}\right)$. Donc $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2,-3\},\ f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{5}\left(\frac{2}{(x-2)^{k+1}} + \frac{3}{(x+3)^{k+1}}\right)$.

Dérivée $n$ième de $f(x) = \frac{x^2+1}{1-5x}$.
$Df = \mathbb{R}\backslash \left\{\frac{1}{5}\right\}$. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash \left\{\frac{1}{5}\right\}$ car f est constituée de fonctions de classe C^∞ sur leur propre domaine de définition.
Division euclidienne : je fais la division euclidienne de x^2+1 par $1-5x$: $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 = (1-5x)\left(-\frac{1}{5}x - \frac{1}{25}\right) + \frac{26}{25}$.
Réécriture de $f(x)$: $\forall x \in Df, f(x) = \frac{x^2+1}{1-5x} = \frac{(1-5x)\left(-\frac{1}{5}x - \frac{1}{25}\right) + \frac{26}{25}}{1-5x} = \underbrace{-\frac{1}{5}x - \frac{1}{25}}_{P(x)} + \frac{26}{25}\underbrace{\left(\frac{1}{1-5x}\right)}_{Q(x)}$.
Comme P et Q sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash \left\{\frac{1}{5}\right\}$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in Df, f^{(n)}(x) = P^{(n)}(x) + \frac{26}{25} Q^{(n)}(x)$. Or, $P'(x) = -\frac{1}{5}$ et $\forall n \geq 2, P^{(n)}(x) = 0$.
Et, $Q(x) = u(1-5x)\ avec\ u(t) = \frac{1}{t}\ donc\ \ Q^{(n)}(x) = (-5)^n u^{(n)}(1-5x) \underbrace{=}_{\substack{le\ cours \\ assure\ que \\ u^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n n!}{t^{n+1}}}} \frac{(-5)^n(-1)^n n!}{(1-5x)^{n+1}}$.

$\forall x \in Df, f'(x) = -\frac{1}{5} + \frac{26}{25}\frac{5}{(1-5x)^2}$ et $\forall n \geq 2, f^{(n)}(x) = \frac{26}{25}\frac{(-5)^n(-1)^n n!}{(1-5x)^{n+1}}$

4) Classe C^∞d'une solution d'edl . Considérons l'edl2 suivante (E): $(1+x^2)y''(x) + 4xy'x) - y(x) = e^{3x}$.
Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Montrons que f est de classe C^∞sur $\mathbb{R}$ et cherchons une relation entre les dérivées successives de f .
Alors f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{1}{1+x^2}\left(-4xf'(x) + f(x) + e^{3x}\right)$.
<u>Initialisation</u> : f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
<u>Propagation</u> : supposons que f soit n-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ où n entier naturel fixé et $n \geq 2$. On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{1}{1+x^2}(-4xf'(x) + f(x) + e^{3x})$.Alors j'en déduis que f'' est $n-1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (puisque f , f' et les autres fonctions le sont) donc f est $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$. CQFD.
J'en <u>conclus</u> que f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Et par conséquent, $\alpha : \left(x \mapsto (1+x^2)f''(x)\right) et\ \beta : \left(x \mapsto 4xf'(x)\right)$ le sont aussi.Or, $\gamma\ et\ f$ le sont aussi. De plus , $\forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{(1+x^2)f''(x)}_{\alpha(x)} + \underbrace{4xf'(x)}_{\beta(x)} - f(x) = \underbrace{e^{3x}}_{\gamma(x)}$.Donc, $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \alpha^{(n)}(x) + \beta^{(n)}(x) - f^{(n)}(x) = \gamma^{(n)}(x)$.
Or , $\alpha^{(n)}(x) = (1+x^2)f^{(n+2)}(x) + 2nxf^{(n+1)}(x) + n(n-1)f^{(n)}(x)$ et $\beta^{(n)}(x) = 4xf^{(n+1)}(x) + 4nf^{(n)}(x)$ et $\gamma^{(n)}(x) = 3^n e^{3x}$.
Ainsi , $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1+x^2)f^{(n+2)}(x) + 2nxf^{(n+1)}(x) + n(n-1)f^{(n)}(x) + 4xf^{(n+1)}(x) + 4nf^{(n)}(x) - f^{(n)}(x) = 3^n e^{3x}$.
C'est à dire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1+x^2)f^{(n+2)}(x) + (2n+4)xf^{(n+1)}(x) + (n^2+3n-1)f^{(n)}(x) = 3^n e^{3x}$.

15 **Méthode : Soit f une fonction dont je connais une expression .**

1) Pour prouver que f est k-fois dérivable ou de classe C^k, on applique les théorèmes précédents .
2) Pour trouver l'expression de $f^{(k)}$, on peut :
   a) Calculer les premières dérivées et en conjecturer la forme de $f^{(k)}$ à démontrer par récurrence .
   b) Reconnaitre l'une des formes précédentes : $\sin(px)e^{mx}$, $\varphi(ax+b)$, $\frac{ux+v}{(x-a)(x-b)}$ et appliquer les méthodes indiquées .
   c) Si $f = uv$, appliquer Leibniz si je connais les dérivées successives de u et de v .

16 **<u>Théorème admis Classe $C^{n(\infty)}$ d' une bijection réciproque</u>** Si $n \in \mathbb{N}^*$ et f est strictement monotone et de classe $C^{n(\infty)}$ sur l'intervalle I et $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$ alors f est bijective de I sur l'intervalle $f(I)$ et f^{-1}est de classe $C^{n(\infty)}$sur $f(I)$.

17 **<u>Classe $C^{n(\infty)}$des réciproques usuelles :</u>** Les fonctions $Arcsin$, $Arccos$ et $Arctan$ sont infiniment dérivables sur leur domaine de dérivation respectif.

18 **<u>Critère de Classe $C^{n(\infty)}$</u>** Soit I un intervalle et $a \in I$. et $\forall x \in I, f(x) = \begin{cases} g(x) \text{ si } x \in I\backslash\{a\} \\ L_0 \text{ si } x = a \end{cases}$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si g est de classe C^n sur $I\backslash\{a\}$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_0$ et $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\lim\limits_{x \to a} g^{(k)}(x) = L_k$ existe et est finie alors f est de classe C^n sur l'intervalle I et $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\forall x \in I, f^{(k)}(x) = \begin{cases} g^{(k)}(x) \text{ si } x \neq a \\ L_k \text{ si } x = a \end{cases}$.
2) Si g est de classe C^∞ sur $I\backslash\{a\}$ et et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to a} g^{(k)}(x) = L_k$ existe et est finie et alors f est de classe C^∞ sur l'intervalle I et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I, f^{(k)}(x) = \begin{cases} g^{(k)}(x) \text{ si } x \neq a \\ L_k \text{ si } x = a \end{cases}$.

Rappel : Si f est continue sur I et dérivable au moins sur $I\backslash\{a\}$ et $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$.

19 **Exemple CLASSIQUE mais pas simple :** Montrons que la fonction f: $\left(x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}\right)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et

$\forall n \in \mathbb{N}, il\ existe\ une\ fonction\ polynomiale\ P_n\ telle\ que : f^{(n)}: \left(x \mapsto \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}\right)$.

A. Posons $g(x) = e^{-1/x^2}$. g est la composée de l'exp de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et de h: $(x \mapsto \frac{1}{x^2})$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. Donc , g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi , f l'est aussi et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x)$.

B. Montrons $H(n)$: " $il\ existe\ une\ fonction\ polynomiale\ P_n\ tq : \forall x \in \mathbb{R}^*,\ g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$ "par récurrence sur n

<u>Initialisation</u> : $\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = 1 \times e^{-1/x^2}$donc $P_n(t)$=1 convient .

<u>Propagation</u> : Soit n un entier naturel . Je suppose $H(n)$ vraie . Alors il existe une fonction polynomiale $P_n\ telle\ que : \forall x \in \mathbb{R}^*,\ g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$. Donc , $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} + P_n\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2}{x^3}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = [-\frac{1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + P_n\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2}{x^3}\right)]e^{-\frac{1}{x^2}}$

$g^{(n+1)}(x) \underbrace{=}_{t=\frac{1}{x}} [-t^2 P_n'(t) + 2t^3 P_n(t)]e^{-t^2}$. Posons $P_{n+1}(t) = -t^2 P_n'(t) + 2t^3 P_n(t)$. Alors P_{n+1} est polynomiale et $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$. Donc $H(n+1)$ vraie dès que $H(n)$ vraie .

<u>Conclusion</u> : $\forall n \in \mathbb{N}, H(n) est\ vraie$.

Montrons que f est infiniment dérivable en 0 . Soit n un entier naturel .$\forall x > 0,\ g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \underbrace{=}_{u=\frac{1}{x^2}} P_n(\sqrt{u})e^{-u}$. Or ,

$\lim\limits_{u \to +\infty} u^{k/2}e^{-u} \overset{CC}{\triangleq} 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Donc par composition, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^k} e^{-\frac{1}{x^2}} \overset{CC}{\triangleq} 0$ et ainsi , $\lim\limits_{x \to 0^+} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$. (autre démon : $\frac{1}{x^k} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{\ln\left(\frac{1}{x^k}\right)} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{x^2} - k\ln(x)} = e^{-\frac{1}{x^2}(1 - kx^2 \ln(x))}. Or,\ \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln(x) \overset{CC}{\triangleq} 0.\ \text{Donc},\ \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^k} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$)

De même, $\forall x < 0,\ g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \underbrace{=}_{u=\frac{1}{x^2}} P_n(-\sqrt{u})e^{-u}$. Or , $\lim\limits_{u \to +\infty} (-1)^k u^{\frac{k}{2}} e^{-u} \overset{CC}{\triangleq} 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Donc par composition,

$\lim\limits_{x \to 0^+} (-1)^k \frac{1}{x^k} e^{-\frac{1}{x^2}} \overset{CC}{\triangleq} 0$ et ainsi , $\lim\limits_{x \to 0^-} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0} g^{(n)}(x) = 0$.

Je conclus par le critère C^∞, que f est infiniment dérivable en 0 et $f^{(n)}(0) = 0$.

<u>II Comparaison des fonctions au voisinage d'un point ou d'un infini.</u>

Soit I intervalle non réduit à un point et f une fonction réelle définie au moins sur I et a un élément ou bord de I réel ou infini.

20 **Rappels :** On dit que f vérifie une propriété au voisinage de a ou sur un voisinage de a lorsque cette propriété est vraie sur

- $Un\ intervalle\ ouvert\ contenant\ a\ et\ inclus\ dans\ I$ si a est réel .
- $]M, +\infty[\ inclus\ dans\ I\ tq\ M \in \mathbb{R}$ si $a = +\infty$
- $]-\infty, M[\ inclus\ dans\ I\ tq\ M \in \mathbb{R}$ si $a = -\infty$.

Propriétés : si f est bornée au voisinage de a et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.

Théorème admis pour le moment :

1. Si f a une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a . En particulier, toute fonction continue en un réel a est bornée sur un voisinage de a .
2. Si f a une limite strictement positive (resp. nég.) en a alors f est strictement positive (resp. nég.) sur un voisinage de a .

1. Définition et premières propriétés

21 **Définition** Soit f *et* g deux fonctions réelles définies sur un même voisinage V de a (mais pas forcément en a).
1. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a lorsqu'il existe une application ε définie au voisinage de a telle que : $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et pour x au voisinage de a, $f(x) = g(x) \times \varepsilon(x)$. On note alors $f(x) = o_a(g(x))$ ou $f = o_a(g)$ ou $f \ll_a g$
2. On dit que f est équivalente à g au voisinage de a lorsqu'il existe une application φ définie au voisinage de a telle que : $\lim_{x\to a} \varphi(x) = 1$ et pour x au voisinage de a, $f(x) = g(x) \times \varphi(x)$. On note alors $f \sim_a g$ *ou* $f(x) \sim_a g(x)$.
NB : Si $f \sim_a g$ alors $g \sim_a f$ *et on dit que* f *et* g sont équivalentes au voisinage de a .
3. On dit que f est dominée par g au voisinage de a lorsqu'il existe une application b définie au voisinage de a telle que : pour x au voisinage de a ,$f(x) = g(x)b(x)$ et b bornée au voisinage de a. On note alors $f(x) = O_a\big(g(x)\big)$ *ou* $f = O_a(g)$.
Autrement dit $f = O_a(g) \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in V, |f(x)| \le M|g(x)|$.

22 **Exemple :** $sin(x)e^x \sim_0 sin(x)$ et $sin(x)e^x = o_{-\infty}(\sin(x))$ *et* $sin(x)e^x = O_{+\infty}(e^x)$

23 **Caractérisation ♥♥:** Soit f *et* g deux fonctions réelles définies sur un même voisinage de a . On suppose ici que g ne s'annule pas au voisinage de a sauf éventuellement en a. Alors,

1. $f = o_a(g) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
2. $f \sim_a g \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
3. $f = O_a(g) \Leftrightarrow \frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a .

⚠ $\boldsymbol{f \sim_a g \not\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) - g(x) = 0}$.
Ex : ■ $\frac{1}{x} \nsim_{+\infty} \frac{2}{x}$ mais $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - \frac{2}{x} = 0$.
■ $x^2 \sim_{+\infty} x^2 - x$ mais $\lim_{x\to+\infty} x^2 - (x^2 - x) \neq 0$.

24 **Exemple :** $ch(x) \sim_{+\infty} sh(x) \sim_{+\infty} \frac{e^x}{2}$ et $Arctan(t) \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2}$

25 **Application :** On suppose que φ ne s'annule pas au vois. de a sauf éventuellement en a et de signe constant au vois. de a.

1. Si au voisinage de a , $f \le g \le h$ et $f \sim_a \varphi$ *et* $h \sim_a \varphi$ alors $g \sim_a \varphi$.
2. Si au voisinage de a , $f \le g \le h$ et $f = o_a(\varphi)$ *et* $h = o_a(\varphi)$ et alors $g = o_a(\varphi)$.

26 **THEO♥♥**

1. $\boldsymbol{f = o_a(0) = O_a(0) \sim_a 0 =}$ ***une fonction nulle sur tout un voisinage de a***   ⚠ **Donc , cela n'arrive presque jamais !!!!!!**
2. $o_a(1)$ symbolise une fonction qui tend vers 0 en a.
3. **Autre écriture d'une fonction négligeable :** $o_a(g) = g \times o_a(1)$
4. **Autre écriture d'un équivalent :** $f \sim_a g \Leftrightarrow f = g + o_a(g) \Leftrightarrow f = g + go_a(1)$.

27 **THEO ♥♥: équivalent et limite /signe**

1. Si $f \sim_a g$ alors f *et* g sont de même signe strict au voisinage de a .
2. Si $f \sim_a g$ et $\lim_{x\to a} f(x) = L$ (L *finie ou inifinie*) alors $\lim_{x\to a} g(x) = L$
3. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ tel que L réel non nul alors $f(x) \sim_a L$.
4. Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors $f(x) - f(a) \sim_a f'(a)(x - a)$.

2. Exemples

a. Fonctions puissances:

29 Soit α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$. Alors

1. $x^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta)$
2. $x^\beta = o_0(x^\alpha)$
3. $(x-a)^\beta = o_a((x-a)^\alpha)$ où $a \in \mathbb{R}$

b. Fonctions polynomiales

30 Si $P(x) = a_p\, x^p + a_{p+1}\, x^{p+1} + \cdots + a_n\, x^n$ où $n > p$ *et* $a_n \neq 0$ *et* $a_p \neq 0$ alors $P(x) \sim_{+\infty} a_n\, x^n$ et $P(x) \sim_0 a_p\, x^p$.

c. Croissances comparées *Soit* $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ *et* $a \in]1, +\infty[$

31 $(\ln(x))^\beta = o_{+\infty}(x^\alpha)$
$x^\alpha = o_{+\infty}(a^x)$
$|\ln(x)|^\beta = o_{0^+}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$
$a^x = o_{-\infty}\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)$

d. Equivalent usuels ♥♥: Soit α un réel non nul.

33 $e^x - 1 \sim_0 x$
$ln(1 + x) \sim_0 x$
$ln(y) \sim_1 y - 1$
$\sin(x) \sim_0 x$

$\tan(x) \sim_0 x$
$sh(x) \sim_0 x$
$\mathrm{Arctan}(x) \sim_0 x$
$Arcsin(x) \sim_0 x$

$(1+x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x$
$ch(x) - 1 \sim_0 \frac{1}{2} x^2$

$cos(x) - 1 \sim_0 -\frac{1}{2} x^2$

3. Comparaison

34 **Théorème DE COMPARAISON ♥♥:**

1. Si $f \sim_a g$ et $g \sim_a h$ alors $f \sim_a h$.
2. Si $f \sim_a g$ ou $f = o_a(g)$ alors $f = O_a(g)$.
3. Si $h = o_a(g)$ et $g = O_a(f)$ alors $h = o_a(f)$. Donc, Si $h = o_a(g)$ et $(g = o_a(f)$ ou $g \sim_a f)$ alors $h = o_a(f)$.
4. Si $f = O_a(g)$ et $g = o_a(h)$ alors $f = o_a(h)$. Donc, Si $(f = o_a(g)$ ou $f \sim_a g)$ et $g = o_a(h)$ alors $f = o_a(h)$.
5. Si $f = O_a(g)$ et $g = O_a(h)$ alors $f = O_a(h)$.
6. Si $f \sim_a g$ et $u \sim_a v$ et $v = o_a(g)$ (resp. $v = O_a(g)$) alors $u = o_a(f)$ (resp. $u = O_a(f)$)
7. Si f est bornée au voisinage de a (en particulier si f a une limite finie en a) et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ alors $f = o_a(g)$.
8. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe et est non nulle et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ alors $g = o_a(f)$.

4. Opérations

35 **Théorème d'OPERATIONS 1 ♥♥:**

1. $o_a(g) + o_a(g) = o_a(g)$ et pour tout réel β non-nul , $\beta o_a(g) = o_a(g)$ $= o_a(\beta g)$ et $o_a(fg) = f o_a(g)$.
2. $O_a(g) + O_a(g) = O_a(g)$ et pour tout réel β non nul , $\beta O_a(g) = O_a(g) = O_a(\beta g)$.
3. $g + o_a(g) \sim_a g$. Autrement dit, *Si* $h = o_a(g)$ alors $g + h \sim_a g$

36 **Théorème d'OPERATIONS 2 ♥♥:**

4. Si $f \sim_a g$ et $u \sim_a v$ alors $f \times u \sim_a g \times$. En particulier , *Si* $f \sim_a g$ alors $fu \sim_a gu$.
5. Si $f \sim_a g$ et $u \sim_a v$ et u ne s'annule pas au voisinage de a , alors $\frac{f}{u} \sim_a \frac{g}{v}$ et $\frac{1}{u} \sim_a \frac{1}{v}$.
6. Si α est une constante réelle (indépendante de la variable x) et $f(x) \sim_a g(x)$ et f^α est définie au voisinage de a *(pas forcément en a)* , alors $(f(x))^\alpha \sim_a (g(x))^\alpha$.
7. Si $f(t) \sim_{t \to a} g(t)$ et $\lim\limits_{x \to b} u(x) = a$ alors $f(u(x)) \sim_{x \to b} g(u(x))$ **(composition à droite ou changement de variable)**

Dans la recherche d'équivalent :
Produit , quotient , inverse , puissance indépendante de x , composition à droite d'équivalents **sont autorisés.**

37 **ATTENTION, ON NE SOMME PAS ET ON NE COMPOSE PAS A GAUCHE LES EQUIVALENTS.**
SI LA PUISSANCE α DEPEND DE x ALORS LA PROPRIETE 6. NE S'APPLIQUE PAS

Dans la recherche d'équivalent,
il est interdit
de sommer
$f(x) \sim_a g(x) \nRightarrow u(x) + f(x) \sim_a u(x) + g(x))$
de composer à gauche …
$f(x) \sim_a g(x) \nRightarrow u(f(x)) \sim_a u(g(x))$
ni de mettre à une puissance qui « bouge »
$f(x) \sim_a g(x) \nRightarrow f(x)^{u(x)} \sim_a g(x)^{u(x)}$

38 **Contre-exemples :**

1. $x^2 + x \sim_0 x$ et $- x^{\sim 0} - x + x^3$ mais x^2n' est pas équivalent au voisinage de 0 à x^3.
2. $x^2 + x \sim_{+\infty} x^2$ mais e^{x^2+x} n'est pas équivalent à e^{x^2} au voisinage de $+\infty$.
3. $1 + x \sim_0 1$ et $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} e$ donc $(1+x)^{\frac{1}{x}} \sim_0 e$ mais $1^{\frac{1}{x}} = 1 \sim_0 1$.

39 **Exemples et techniques :**

1) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $e^{-\frac{1}{x^2}} = o_0(x^k)$.
2) Montrer que $\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt = o_{+\infty}(x^2)$.
3) Soit $f: (x \mapsto \frac{Arccos(x)sin^2(x)}{\sqrt[3]{ch(x)-1}})$. Cherchons un équivalent puis la limite de f en 0.
4) Soit $f: \left(x \mapsto \frac{\sqrt{x} - 2^{\frac{x}{2}} + Arctan(x^2)}{3ch(x) - \ln^{2024}(x)}\right)$. Cherchons un équivalent puis la limite de f en $+\infty$.
5) Soit $f: (x \mapsto \sqrt{x^3+1} - \sqrt[3]{x^2-1} + \sin(x))$.
Cherchons un équivalent puis la limite de f en $+\infty$.
6) Soit $f: (x \mapsto \sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3-2})$.
Cherchons un équivalent puis la limite de f en $+\infty$.
7) Soit $f: (x \mapsto \ln(\cos(x)))$ .Cherchons un équivalent de f en 0.
8) Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^x - x}{\ln(1+\sqrt{x^2-1})}$.
9) Soit $f: (x \mapsto \text{Arcsin}(\pi \sin(x)))$.
Cherchons un équivalent de f au voisinage de 0.
10) Soit $h: (x \mapsto \ln(-2x + \sqrt{x} + Arctan(x)))$.
Cherchons un équivalent de f en 0
11) Soit $f: (x \mapsto e^{x^2 - 1 - \frac{1}{x} + \ln(x)})$.
Cherchons un équivalent puis la limite de f en $+\infty$.
12) Soit $f: x \mapsto (1 - \tan(x))^{\frac{1}{x}}$. Cherchons un équivalent puis la limite de f en 0.
13) Soit $f: x \mapsto (sh(x))^{\sin(x)}$. Cherchons un équivalent puis la limite de f en 0.
14) Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$, continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$,et telle que : $f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}$. Déterminer un équivalent de f^{-1}en 0^+.
15) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une application décroissante et telle que : $f(x+1) + f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$. Montrer que $f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{2x}$.

Par limite du quotient

Par encadrement

Pour obtenir un équivalent simple de $f + g$ au voisinage de a
1. je regarde si l'une des deux fonctions f ou g est négligeable devant l'autre au voisinage de a.
Si $f = o_a(g)$ alors $f + g \sim_a g$.
2. Je remplace $f(x)$ et $g(x)$ par leur développement limité ou asymptotique en a avec au moins deux termes non nuls… si ces deux termes se simplifient, je vais jusqu'au troisième terme non nul….

Pour obtenir un équivalent simple de $ln(f(x))$ au voisinage de a
1. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 1$ alors $ln(f(x)) \sim_a f(x) - 1$.
2. Sinon, je remplace $f(x)$ par son développement limité ou asymptotique à un terme significatif au voisinage de a.
3. Ensuite je réinjecte dans le logarithme et j'utilise les propriétés de ce ln.

Pour obtenir un équivalent simple de $f(x)^{g(x)}$ au voisinage de a
1. J'écris $f(x)^{g(x)}$ sous forme exponentielle $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)ln(f(x))}$.
2. Je cherche un équivalent simple de $g(x)$et un autre de $ln(f(x))$ et j'en fais leur produit.
3. Je transforme cet équivalent par une égalité $u \sim_a v \Longrightarrow u = v + o_a(v)$.
4. Ensuite je réinjecte dans l'exponentielle et j'utilise les propriétés de l'exponentielle.

4. Changement de variable pour se ramener en 0

40 **1.** Soit f une fonction dont je cherche un équivalent au voisinage du réel a non nul .
Je pose $g(t) = f(t+a)$. Alors g est définie au voisinage de 0 et $f(x) = g(x-a)$. De plus,
$\lim\limits_{t\to 0} g(t) = L \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ et $g(t) \sim_0 h(t) \Rightarrow f(x) \sim_a h(x-a)$.
2. Soit f une fonction dont je cherche un équivalent au voisinage de $+\infty$(resp. $-\infty$).
Je pose $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ .Alors g est définie au voisinage de 0^+(resp. 0^-) et $f(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$. De plus,
$\lim\limits_{\substack{t\to 0^+ \\ (0^-)}} g(t) = L \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to +\infty \\ (-\infty)}} f(x) = L$ et $g(t) \sim_{\substack{0^+ \\ (0^-)}} h(t) \Rightarrow f(x) \sim_{\substack{+\infty \\ (-\infty)}} h\left(\frac{1}{x}\right)$.

41 **Exemples 1)** Cherchons un équivalent simple de $f(x) = \ln(sin(x))$ au voisinage de $\frac{\pi}{2}$.

1) Cherchons un équivalent simple de $f(x) = 1 + cos(x)$ au voisinage de π .
Posons $g(t) = f(t+\pi)$. Alors $g(t) = 1 + \cos(t+\pi) = 1 - \cos(t) \sim_0 \frac{t^2}{2}$. *Donc* , $f(x) \sim_\pi \frac{(x-\pi)^2}{2}$.
2) Cherchons un équivalent simple de $f(x) = x^x - 4$ au voisinage de 2 .
$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^x-4}{x-2} \overset{TA}{=} 4(1+\ln(2))$. Donc, $x^x - 4 \sim_2 4(1+\ln(2))(x-2)$.

III Développements limités

42 **RAPPEL :** Soit x_0 un réel . $o_{x_0}((x-x_0)^n) = (x-x_0)^n \times o_{x_0}(1) = (x-x_0)^n \times \varepsilon(x)$ tel que $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$
En particulier , $o_0(x^n) = x^n \times o_0(1) = x^n \times \varepsilon(x)$ tel que $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$
De plus, $o_0(x^n) \times o_0(x^p) = o_0(x^{n+p})$ et $x^n \times o_0(x^p) = o_0(x^{n+p})$ et si $n > p$ alors $x^n = o_0(x^p)$.

1. Définition et unicité

43 **Définition** •Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0 .
On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 lorsqu'il existe $n+1$ réels $a_0, a_1, a_2, .., a_n$ tels que :

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}_{\substack{P_n(x) \\ partie\ polynimiale\ ou\ partie\ principale \\ de\ degré\ inférieur\ ou\ égal\ à\ n}} + \underbrace{o_0(x^n)}_{\substack{reste \\ fonction \\ négligeable\ devant\ x^n \\ au\ voisinage\ de\ 0}} .$$

•Soit f une fonction définie sur un voisinage du réel x_0 (pas forcément en x_0)
On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 lorsqu'il existe $n+1$ ré els $a_0, a_1, a_2, .., a_n$ tels que :

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n}_{\substack{Q_n(x)=P_n(x-x_0) \\ partie\ polynomiale\ ou\ partie\ principale \\ P_n(t)=a_0+a_1 t+a_2 t^2+\cdots+a_n t^n \\ de\ degré\ inférieur\ ou\ égal\ à\ n}} + \underbrace{o_{x_0}((x-x_0)^n)}_{\substack{reste \\ fonction \\ négligeable\ devant\ (x-x_0)^n \\ au\ voisinage\ de\ x_0}} .$$

44 **Théo pour se ramener à un DL en 0 :**
Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 réel non nul . On pose $h = x - x_0$ et $g(h) = f(x_0+h)$.

f vérifie: $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o_{x_0}((x-x_0)^n)$

$\Leftrightarrow$

g vérifie : $g(h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + o_0(h^n)$.

45 **Théo d'UNICITE**: Il y a unicité de la partie polynomiale du développement limité d'une fonction donnée en un point donné à un ordre fixé (i.e. pour tout ordre $\boldsymbol{n}$ unicité des réels $\boldsymbol{a_0, a_1, a_2, .., a_n}$) .

46 **Exemple** : Montrons que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n o_0(1) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o_0(x^n)$ ♥♥♥

Et $\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - \cdots + +(-1)^n(x-1)^n + (x-1))^n o_1((x-1)^n)$ ***ON NE DEVELOPPE JAMAIS !!!***

47 **NB** : $a_0 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Donc, il est facile de vérifier le terme constant d'un DL !!!!

2. Propriétés

48 **EQUIVALENT** Soit f une fonction définie au voisinage du réel x_0 .
Si f admet le $DL_n(x_0)$ suivant :
$f(x) = a_{k_0}(x-x_0)^{k_0} + a_{k_0+1}(x-x_0)^{k_0+1} + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o_{x_0}((x-x_0)^n)$ tel que $a_{k_0} \neq 0$,
alors $f(x) \sim_{x_0} a_{k_0}(x-x_0)^{k_0}$.

49 **TRONCATURE** : Si f admet le $DL_n(x_0)$ suivant : $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$
Alors f admet un $DL_{n-1}(x_0)$ suivant : $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + o_{x_0}((x - x_0)^{n-1})$.

50 **FONCTION PAIRE / FONCTION IMPAIRE**
Si f admet un $DL_n(0)$ et f est paire alors tous les coefficients d'indices impairs de la partie polynomiale sont nuls
i.e. $f(x) = a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + o_0(x^n)$ si n pair
et $f(x) = a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + o_0(x^n)$ si n impair
Si f admet un $DL_n(0)$ et f est impaire alors tous les coefficients d'indices pairs de la partie polynomiale sont nuls
i.e. $f(x) = a_1x + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + o_0(x^n)$ si n impair
et $f(x) = a_1x + a_3x^3 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + o_0(x^n)$ si n impair

51 **Remarque :** P est une fonction polynomiale paire si et ssi P est de la forme $P(x) = a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_{2p}x^{2p}$.
De même , Pest une fonction polynomiale impaire sietssi P est de la forme $P(x) = a_1x + a_3x^3 + \cdots + a_{2p+1}x^{2p+1}$.
Ainsi , si f est paire (resp impaire) alors la partie polynomiale de son $DL_n(0)$, s'il existe, est paire (resp. impaire).

3. Obtention d'un DL

51 bis **DL en 0 d'une fonction polynomiale :** Si P est polynomiale telle que : $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_Nx^N$ alors
pour tout entier $n \geq N$, $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_Nx^N$ est le $DL_n(0)$ de P
pour tout entier $n < N$, $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + o_0(x^n)$ est le $DL_n(0)$ de P.

52 **<u>Théorème de Taylor Young ♥♥</u> (admis pour le moment)**

Si f est de classe C^n sur l'intervalle I et $x_0 \in I$ alors f admet le $DL_n(x_0)$: $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{Q_n(x-x_0)} + \underbrace{o_{x_0}((x - x_0)^n)}_{reste}$.

Si f est de classe C^n sur l'intervalle I et $0 \in I$ alors f admet le $DL_n(0)$: $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k}_{P_n(x)} + \underbrace{o_0(x^n)}_{reste}$.

53 <u>Développements limités d'ordre n au voisinage de 0 des fonctions usuelles :</u> ♥♥♥

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n o_0(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o_0(x^n).$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots + \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}x^n}{n!} + x^n o_0(1) \text{ si } n \text{ impair} \\ \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}x^{n-1}}{(n-1)!} + x^n o_0(1) \text{ si } n \text{ pair} \end{cases} = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^n).$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots + \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}x^n}{n!} + x^n o_0(1) \quad \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}x^{n-1}}{(n-1)!} + x^n o_0(1) \text{ si } n \text{ impair} \end{cases} = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^n).$$

$$\text{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots + \begin{cases} \frac{x^n}{n!} + x^n o_0(1) \quad \text{si } n \text{ impair} \\ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + x^n o_0(1) \quad \text{si } n \text{ pair} \end{cases} = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^n).$$

$$\text{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots + \begin{cases} \frac{x^n}{n!} + x^n o_0(1) \quad \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + x^n o_0(1) \quad \text{si } n \text{ impair} \end{cases} = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^n).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)..(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n o_0(1).$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n o_0(1) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o_0(x^n).$$

54 **Démo :**

1. Cos est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc TY s'applique à cos en tout point et à tout ordre. Appliquons-le en 0 , à l'ordre $2n$:

$\forall p \in \mathbb{N}, cos^{(2p)}(0) = (-1)^p$ *et* $cos^{(2p+1)}(0) = 0$ i.e. $cos^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \text{ impair} \\ (-1)^{k/2} \text{ si } k \text{ pair} \end{cases}$.

Alors $\cos(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{cos^{(k)}(0)}{k!}x^k + o_0(x^{2n}) \underbrace{=}_{\substack{\text{pour } k \text{ impair} \\ cos^{(k)}(0)=0}} \sum_{\substack{0 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{cos^{(k)}(0)}{k!}x^k + o_0(x^{2n})$

$\cos(x) \underbrace{=}_{\substack{\text{on pose } k=2p \\ \text{Alors,} \\ 0 \leq k \leq 2n \Leftrightarrow 0 \leq p \leq n}} \sum_{p=0}^{n} \frac{cos^{(2p)}(0)}{(2p)!}x^k + o_0(x^{2n}) = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} + o_0(x^{2n})$.

2. Sin est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc TY s'applique à sin en tout point et à tout ordre. Appliquons-le en 0 , à l'ordre $2n + 1$:

$\forall p \in \mathbb{N}, sin^{(2p+1)}(0) = 0$ et $sin^{(2p+1)}(0) = (-1)^p$ i.e. $sin^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \text{ pair} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} \text{ si } k \text{ impair} \end{cases}$.

Alors $\sin(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{sin^{(k)}(0)}{k!} x^k + o_0(x^{2n+1}) \underbrace{=}_{\substack{pour\ k\ pair, \\ sin^{(k)}(0)=0}} \sum_{\substack{0 \le k \le 2n+1 \\ k\ impair}} \frac{sin^{(k)}(0)}{k!} x^k + o_0(x^{2n+1})$

$\sin(x) \underbrace{=}_{\substack{on\ pose\ k=2p+1 \\ Alors, \\ 0\le k \le 2n+1 \Leftrightarrow 0 \le p \le n}} \sum_{p=0}^{n} \frac{sin^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!} x^k + o_0(x^{2n+1}) = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o_0(x^{2n+1})$.

NB : TY assure que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \underbrace{\varepsilon(x)}_{\to_0 0}$. On obtient : $e^x \sim_0 1$ première estimation du comportement de exp en 0 puis $e^x - 1 \sim_0 x$ précise cette information…. On peut encore aller plus loin $e^x - 1 - x \sim_0 \frac{x^2}{2}$ puis $e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \sim_0 \frac{x^3}{6}$….

De même , $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \underbrace{\varepsilon(x)}_{\to_0 0}$. Donc , $\ln(1+x) \sim_0 x$ et $\ln(1+x) - x \sim_0 -\frac{x^2}{2}$ et …

55 **Attention :** $e^x \sim_0 ch(x) \sim_0 \cos(x) \sim_0 1 - 10x \sim_0 1$ cela signifie simplement que exp, ch et cos tendent vers 1 en 0 . Mais $e^x - 1 \nsim_0 ch(x) - 1 \nsim_0 \cos(x) - 1 \nsim_0 0$. Donc, exp, ch , cos et $(x \mapsto 1 - 10x)$ ne tendent pas vers 1 en 0 à la même vitesse.

63 **Théorème : INTEGRATION TERME A TERME ($TITT$) (admis pour le moment)**

•Si f est dérivable un intervalle I contenant 0 et f' admet le $DL_n(0)$ suivant :

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o_0(x^n).$$

alors f admet le $DL_{n+1}(0)$ suivant : $f(x) = f(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o_0(x^{n+1})$.

•Si f est dérivable sur un intervalle I contenant x_0 et f' admet le $DL_n(x_0)$ suivant :

$$f'(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$$

alors f admet le $DL_{n+1}(x_0)$ suivant :$f(x) = f(x_0) + a_0(x - x_0) + a_1 \frac{(x-x_0)^2}{2} + \cdots + a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} + o_{x_0}((x - x_0)^{n+1})$.

64 **La réciproque du TITT est fausse !! Voici un contre-exemple :** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$f(x) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{1}{x^2}\right)} sin\left(e^{\left(\frac{1}{x^2}\right)}\right) si\ x \neq 0 \\ 0\ si\ x = 0 \end{cases}$.$\forall n \in \mathbb{N}$, f admet le $DL_n(0)$ suivant: $f(x) = o_0(x^n)$ mais f' n'a pas de $DL_0(0)$.

65 **Exemple :** Soit $f: (x \mapsto Arctan(1+x))$. Cherchons son $DL_5(0)$.

66 **Exemples de référence ♥♥♥:**

$Arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o_0(x^{2n+1})$.

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + o_0(x^{n+1})$.

$Arcsin(x) = x + \frac{1}{6} x^3 \mp \frac{3}{40} x^5 + x^5 o_0(1)$.

$tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5 o_0(1)$.

67 **Conséquence du TITT :** Si f et f' admettent respectivement les $DL_{n+1}(x_0)$ et $DL_n(x_0)$ suivants

$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + o_{x_0}((x - x_0)^{n+1})$.

$f'(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \cdots + b_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$.

alors $a_1 = b_0$, $a_2 = \frac{b_1}{2}$, $a_3 = \frac{b_2}{3}$, …. , $a_{n+1} = \frac{b_n}{n+1}$.

c'est le cas lorsque f est de classe C^{n+1} sur un intervalle contenant x_0.

56 **Théorème COMBINAISON LINEAIRE ET PRODUIT :** *Soit α et β* deux réels .

Si f et g admettent les $DL_n(0)$ suivants :

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x}_{P(x)} + o_0(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = \underbrace{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n}_{Q(x)} + o_0(x^n)$$

alors $\alpha f + \beta g$ et fg admettent chacune un $DL_n(0)$ et

$\alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha P(x) + \beta Q(x) + o_0(x^n)$.

$f(x) \times g(x) = [somme\ des\ termes\ de\ degré\ inférieur\ ou\ égal\ à\ n\ de\ P(x) \times Q(x)] + o_0(x^n)$.

57 **Exemple :** Cherchons le $DL_4(0)$ de $f(x) = \sin(x) cos(x) - \frac{1}{1+x}$.

60 **Théorème (admis) COMPOSITION :** Si f admet le $DL_n(0)$ suivant : $f(x) = P(x) + o_0(x^n)$ et $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ et g admet un $DL_n(0)$ alors $g \circ f$ admet le $DL_n(0)$.

61 **Exemples de référence :** Cherchons le $DL_n(0)$ de $\ln(1-u)$ et $\frac{1}{1+u}$ et le $DL_{2n}(0)$ de $\frac{1}{1+x^2}$.

$$\frac{1}{1+u}=\frac{1}{1-(-u)}=1+(-u)+(-u)^2+(-u)^3+\cdots+(-u)^n+o_0(u^n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u^k+o_0(u^n)$$

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=1+(-x^2)+(-x^2)^2+(-x^2)^3+\cdots+(-x^2)^n+o_0(x^{2n})=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}+o_0(x^{2n}).$$

62 **Exemples et techniques :**

1) Cherchons le $DL_5(0)$ de $\sin(3x)$.
2) Cherchons le $DL_3(0)$ de $f(x)=\ln(4-x^2)-2e^{(x^2-1)^2}$
3) Cherchons le $DL_5\left(\frac{\pi}{2}\right)$ de $f(x)=\ln(2+\sin^2(x))$
4) Cherchons le $DL_5(0)$ de $f(x)=e^{\sqrt{2ch(x)}}$.

58 **Théorème $DL_n(0)$ d'un inverse , d'un quotient :**

Si f admet le $DL_n(0)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ admet un $DL_n(0)$.

Si f et g admettent des $DL_n(0)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\neq 0$ alors $\frac{g}{f}$ admet un $DL_n(0)$.

59 **Exemples** :1) cherchons le $DL_5(0)$ de $f(x)=\frac{1}{1+\sin^2(x)}$

1) Cherchons les $DL_4(0)$ de $g(x)=\frac{1}{(2+sh(x))}$
2) Cherchons les $DL_4(0)$ de $h(x)=\frac{\ln(1+x^2)}{\sin(x)}$.
3) Montrons que : $cotan(x)=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}+o_0(x^3)$

IV Applications à l'étude de fonctions.

1. Continuité – dérivabilité en un point – position de la courbe par rapport à une tangente- extremum local

68 **Prop** ■ Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 et en x_0 .

- f est continue en x_0 si et ssi f admet le $DL_0(x_0)$ suivant : $f(x)=f(x_0)+o_{x_0}(1)$.
- f est dérivable en x_0 et $f'(x_0)=m$ si et ssi f admet le $DL_1(x_0)$ suivant : $f(x)=f(x_0)+m(x-x_0)+(x-x_0)o_{x_0}(1)$.

■■ Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 mais pas en x_0 .

- f est prolongeable par continuité en x_0 par la valeur L si et ssi f admet le $DL_0(x_0)$ suivant : $f(x)=L+o_{x_0}(1)$.
- f est prolongeable par continuité en x_0 par la valeur L en une fonction $\tilde{f}$ dérivable en x_0 et $\tilde{f}'(x_0)=m$ si et ssi f admet le $DL_1(x_0)$ suivant : $f(x)=L+m(x-x_0)+(x-x_0)o_{x_0}(1)$.

69 **Méthode pour connaitre l'équation de la tangente et la position de la courbe ar rapport à cette tangente.**

Si f admet le $\boldsymbol{DL(x_0)}$ suivant : $f(x)=\boldsymbol{a_0}+\boldsymbol{a_1(x-x_0)}+a_{k_0}(x-x_0)^{k_0}+(x-x_0)^{k_0}o_{x_0}(1)$ où $a_{k_0}\neq 0$ alors je conclus que

OU BIEN f *est* définie en x_0

- f est continue et dérivable en x_0 et $f(x_0)=a_0$ $f'(x_0)=a_1$ et $y=a_0+a_1(x-x_0)$ est l'équation de la tangente à Cf au point $M_0(x_0,f(x_0))$
- $f(x)-[a_0+a_1(x-x_0)]\sim_{x_0}a_{k_0}(x-x_0)^{k_0}$. Alors au voisinage de x_0 , $f(x)-[a_0+a_1(x-x_0)]$ est du signe de $a_{k_0}(x-x_0)^{k_0}$ ce qui permet de connaitre , au voisinage de M_0, la position de Cf par rapport à sa tangente en M_0 .

OU BIEN f $n'est$ pas définie en x_0

$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_{k_0}(x-x_0)^{k_0}+(x-x_0)^{k_0}o_{x_0}(1)$ tel que $a_{k_0}\neq 0$ alors

- f est prolongable par continuité en x_0 par la valeur a_0 et son prolongement est dérivable en x_0 et $\tilde{f}(x_0)=a_0$, $\tilde{f}'(x_0)=a_1$ et $y=a_0+a_1(x-x_0)$ est l'équation de la tangente à $C\tilde{f}$ au point $M_0(x_0,\tilde{f}(x_0))$
- $\tilde{f}(x)-[a_0+a_1(x-x_0)]\sim_{x_0}a_{k_0}(x-x_0)^{k_0}$. Alors au voisinage de x_0 , $\tilde{f}(x)-[a_0+a_1(x-x_0)]$ est du signe de $a_{k_0}(x-x_0)^{k_0}$.

70 **Exemples :**

Etude de $f(x)=ln\left(\frac{1+2x^2}{1+Arcsin(x)}\right)$ au voisinage de 0

Etude de $f:(x\mapsto x^2Arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)$ au voisinage de $(-1)^{\pm}$.

71 **Méthode pour reconnaitre un extremum local**

Si f admet le $DL(x_0)$ suivant : $f(x)=f(x_0)+a_{k_0}(x-x_0)^{k_0}+(x-x_0)^{k_0}o_{x_0}(1)$ *tel que* $a_{k_0}\neq 0$ *et* k_0 *pair* alors au voisinage de x_0, $f(x)-f(x_0)$ *est du signe de* a_{k_0} *et par conséquent, si* $a_{k_0}>0$ *alors* $f(x_0)$ est un minimum local de f et si $a_{k_0}<0$ *alors* $f(x_0)$ est un maximum local de f.

72 **Exemple** : Etude au voisinage de 0 de $f(x)=e^x-\sqrt{1+2x}$.

2. Calculs de limite et recherche d'un équivalent

73 **Exemples :** 1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ch(x)-\cos(x)}{sin(x)-sh(x)}$ D'après TY, $ch(x)-\cos(x)=1+\frac{x^2}{2}+o_0(x^2)-1+\frac{x^2}{2}+o_0(x^2)=x^2+o_0(x^2)\sim_0 x^2$.

Et $sin(x)-sh(x)=x-\frac{x^3}{6}+o_0(x^3)-x-\frac{x^3}{6}+o_0(x^3)=-\frac{x^3}{3}+o_0(x^3)\sim_0-\frac{x^3}{3}$. Donc, $\frac{ch(x)-\cos(x)}{\sin(x)-sh(x)}\sim_0-\frac{3}{x}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{3}{x}=\mp\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ch(x)-\cos(x)}{\sin(x)-sh(x)}=\mp\infty$.

2.Trouver un équivalent au voisinage de 0 de $f(x)=\sin(x)-x$ puis de $g(x)=\sin(x)-2x$

$\sin(x)=x+o_0(x)=x-\frac{x^3}{6}+o_0(x^3)$. Donc, $f(x)=-\frac{x^3}{6}+o_0(x^3)=-\frac{x^3}{6}+o_0\left(\frac{x^3}{6}\right)\sim_0-\frac{x^3}{6}$ et $g(x)=-x+o_0(x)\sim_0-x$.

74 **Exemples** : 1. Limite en 0 de $f(x)=\frac{\sqrt{\sin(x)}-\sqrt{x}}{sin(\sqrt{x})-\sqrt{x}}$ – et limite en e de $f(x)=\frac{x^e-e^x}{(e-x)^2}$.

2.Trouver un équivalent de $f(x)=\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt[2]{1+2x}+\frac{x^2}{2}$ au voisinage de 0 .

3.Trouver un équivalent de $f(x) = \ln(\tan(x))$ au voisinage de 0 .

75 **Méthode générale pour trouver un équivalent d'une fonction f au voisinage de a :**
1) je peux écrire $f(x)$ sous la forme $g(x) \times une\ fonction\ de\ limite\ 1\ en\ a$.
2)Je peux trouver une fonction g telle que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
3)si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ tel que <u>L réel non nul</u> alors $f(x) \sim_a L$.
4) Si $f = g \times h$ alors je cherche un équivalent de g et un équivalent de h au voisinage de a et j'en fais le quotient (ou un produit).
5) Si $f = g^\alpha$ avec α constante alors je cherche un équivalent de g que j'élève à la puissance α .
6) Si $f = g + h$, alors je cherche un équivalent simple de chacune des fonctions $g\ et\ h$ au voisinage de a et grâce à ces équivalents , je compare g et h au voisinage de a .

a) si $h = o_a(g)$ alors $f \sim_a g$.
b) si $\lim_{x\to a} g(x) + h(x) = L$ tel que <u>L réel non nul</u> alors $f(x) \sim_a L$.
c) sinon , je vais chercher des développements limités ou asymptotiques de g et de h au voisinage de a que je peux additionner contrairement aux équivalents (puisqu'un DL est une égalité) !!!L'ordre sera choisi de sorte qu'en les sommant , il reste un terme significatif.

7) Si $f(x) = \ln(g(x))$ alors après avoir écarté la situation 1) ,
Ou bien $\lim_{x\to a} g(x) = 1$. Alors j'utilise la propriété de composition à droite .
Ou bien $\lim_{x\to a} g(x)$ n' existe pas ou est infinie. Alors je cherche un DA ou un DL de g au voisinage de a et je mets le terme dominant en facteur puis j'utilise la propriété $ln(ab) = lna + lnb$ puis je compare $ln(a)$ et $ln(b)$.
8) Si $f(x) = e^{g(x)}$ alors après avoir écarté la situation 1) , je cherche un DA ou un DL de g au voisinage de a et je mets le terme dominant en facteur puis j'utilise la propriété $e^{a+b} = e^a e^b$.
9)Si $f(x) = u(x)^{v(x)}$ alors j'écris $f(x) = e^{v(x)\ln(u(x))}$, alors après avoir écarté la situation 1) , je vais chercher un DL ou $DA\ ou\ la\ limite\ de$ de $h(x) = u(x)\ln(v(x))$ en a puis conclure ou utiliser la propriété de l'exponentielle $e^{a+b} = e^a e^b$ Il faut parfois obtenir la limite de f pour avoir un équivalent.

3. Recherche d'asymptote et position de la courbe par rapport à cette asymptote.

76 **Méthode** S'il existe $k \in \mathbb{N}^*\ et$ des réels $a\ , b\ et\ c$ tels que : $c \neq 0\ et\ f(x) = ax + b + \frac{c}{x^k} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^k}\right)$
alors $f(x) - [\,ax + b] \sim_{+\infty} \frac{c}{x^k}$ et j'en déduis que :
$\lim_{x\to+\infty} f(x) - [\,ax + b] = 0$ et $f(x) - [\,ax + b]\ est\ du\ signe\ \frac{c}{x^k}$ et ainsi , la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à Cf en $+\infty$ et je peux connaitre la position de Cf par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$ selon le signe de $signe\ \frac{c}{x^k}$.
Pour obtenir l'écriture $f(x) = ax + b + \frac{c}{x^k} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^k}\right)$, je peux effectuer le changement de variable
$t = \frac{1}{x}\ et\ g(t) = f(x)$. Je vais alors tenter d'obtenir : $tg(t) = a + bt + ct^{k+1} + o_0(t^{k+1})$.
En fait, Il suffit en fait d'obtenir $f(x) = ax + b + terme\ significatif\ ie\ f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ et de connaitre un équivalent de $\varepsilon(x)$ au voisinage de $+\infty$. Cet équivalent est souvent de la forme $\frac{c}{x^k}$ mais peut avoir une autre forme

77 **Exemple :** Soit f définie par: $f(x) = \sqrt{3x^2 - 5x + 1}e^{\frac{1}{x}}$. Etude de sa branche inifinie en $+\infty$.

4. Recherche du DL d'une primitive.

78 **Exemple :** Soit $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{1+ln(t)}dt$. Cherchons le $DL_3(1)$ de f.

5. Recherche du DL d'une bijection réciproque.

79 **Exemple** : Soit $f: (x \mapsto 2x - sin(x))$. Montrons que f est bijectve de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et cherchons un $DL_5(0)$ de f^{-1}.

6. Recherche de développement asymptotique.

80 Exemples :

1. Déterminons une développement asymptotique de $Arctan$ en $+\infty$ à la précision $\frac{1}{x^n}$.
2. Soit $f(x) = \sqrt{\frac{3-x^2}{2-4x}}$. Montrer que $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{4\sqrt{x}} - \frac{21}{16x\sqrt{x}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$ .Que peut – on en conclure sur Cf ?

Développements limités usuels

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n o_0(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o_0(x^n).$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} o_0(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^{2n+2}).$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} o_0(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^{2n+1}).$$

$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} o_0(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^{2n+2}).$$

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} o_0(1) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^{2n+1}).$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n o_0(1) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o_0(x^n).$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n o_0(1) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o_0(x^n).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n o_0(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o_0(x^n).$$

$$\ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} \ldots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} + (x-1)^n o_1(1).$$ ⚠ $DL_n(1)$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)..(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n o_0(1).$$

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + x^4 o_0(1)$. **A savoir retrouver en prenant** $\alpha = \frac{1}{2}$.

$$Arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o_0(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o_0(x^{2n+1}).$$

$$tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + x^6 o_0(1).$$

$$Arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40} x^5 + o_0(x^6).$$