

# Méthodes pour obtenir le développement limité d'une fonction donnée en un point donné à un ordre donné.

Les SAVOIR-FAIRE fondamentaux !

## Prérequis :

- Connaître parfaitement les développements limités des fonctions usuels
- Connaître parfaitement le théorème de Taylor-Young
- Connaître parfaitement le théorème d'intégration terme à terme d'un DL
- Connaître parfaitement les règles de calcul sur les développements limités
- Savoir choisir le bon ordre du DL pour obtenir le DL d'un produit, d'une combinaison linéaire, d'un quotient, d'une composée
- Savoir faire un bon changement de variable pour se ramener en 0
- Connaître parfaitement les règles de calcul sur les fonctions négligeables (les « petits o »)
- Bien connaître les propriétés des fonctions usuelles ( $\ln(ab) = \ln(|a|) + \ln(|b|)$ ,  $e^{a+b} = e^a e^b$ ,  $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$ ,  $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $\text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos(a+b)$ ,  $\sin p - \sin q$ ;  $\tan\left(a + \frac{\pi}{2}\right) \dots$ )

## Nota-bene

LORSQUE VOUS CHERCHEZ UN DEVELOPPEMENT LIMITE, LE PLUS IMPORTANT EST DE VERIFIER SYSTEMATIQUEMENT QUE VOUS AVEZ LE DROIT DE COMPOSER :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(u) = a + bu + cu^2 + du^3 + o_{u \rightarrow 0}(u^3) \\ \lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow f(u(x)) = a + bu(x) + cu(x)^2 + du(x)^3 + o_{x \rightarrow a}(u(x)^3).$$

IL EST AUSSI TRES IMPORTANT DE BIEN CHOISIR L'ORDRE DES DIFFERENTS DL POUR NE PAS PERDRE DE TERME...

LES REGLES GENERALES :

Si  $f$  et  $g$  admettent un  $DL_n(0)$  alors  $f + g$ ,  $f \times g$  admettent un  $DL_n(0)$ .

Si  $f$  et  $g$  admettent un  $DL_n(0)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = L \neq 0$  alors  $\frac{f}{g}$  admet un  $DL_n(0)$ .

Si  $f$  et  $g$  admettent un  $DL_n(0)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$  alors  $f \circ g$  admet un  $DL_n(0)$ .

1. En utilisant Taylor Young : cette méthode s'applique aux fonctions de classe  $C^n$  sur un intervalle contenant le point où l'on cherche le DL et lorsque l'ordre de DL n'est pas trop élevé et les dérivées de  $f$  ne sont pas trop compliquées à déterminer.

$$f(x) = \text{Arcsin}(x) \quad (\text{ordre 2 en } \frac{1}{2}).$$

$f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $] -1; 1[$  et  $f'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$  et  $f''(x) = -\frac{1}{2}(-2x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$ .

Donc  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ ,  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$  et  $f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}}$ . Alors Taylor-Young assure que :

$$\text{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + o_{\frac{1}{2}}\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right)$$

Si  $f$  est de classe  $C^n$  sur un intervalle contenant  $a$  alors  $f$  admet le  $DL_n(a)$  suivant :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o_a((x-a)^n)$$

2. En utilisant les propriétés de la fonction racine  $n^{\text{ième}}$  réelle : cette méthode s'applique aux fonctions de la forme  $\sqrt[n]{h(x)}$ .

$$f(x) = \sqrt{4 + e^x} \quad (\text{ordre 3 en } 0).$$

$$f(x) = \sqrt{4 + e^x} = \sqrt{4 + 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)} = \sqrt{5 \left(1 + \frac{x}{5} + \frac{x^2}{10} + \frac{x^3}{30} + o_0(x^3)\right)} = \sqrt{5} \sqrt{1 + \frac{x}{5} + \frac{x^2}{10} + \frac{x^3}{30} + o_0(x^3)}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$  et  $\sqrt{1+u} = (1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{u^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\frac{u^3}{6} + o_0(u^3)$ ,

$$\sqrt{1+u(x)} = 1 + \frac{1}{2}u(x) - \frac{u(x)^2}{8} + \frac{u(x)^3}{16} + o_0(x^3)$$

$$\text{avec } \begin{cases} u(x) = \frac{x}{5} + \frac{x^2}{10} + \frac{x^3}{30} + o_0(x^3) \\ u(x)^2 = \frac{x^2}{25} + \frac{x^3}{25} + o_0(x^3) \\ u(x)^3 = u(x) \times u(x)^2 = \frac{x^3}{125} + o_0(x^3) \end{cases} \quad (a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

$$\text{Ainsi, } f(x) = \sqrt{5} \left(1 + \frac{1}{2}\left[\frac{x}{5} + \frac{x^2}{10} + \frac{x^3}{30}\right] - \frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{25} + \frac{x^3}{25}\right] + \frac{1}{16}\left[\frac{x^3}{125}\right] + o_0(x^3)\right) = \sqrt{5} \left(1 + \frac{1}{10}x + \frac{9}{200}x^2 + \frac{73}{6000}x^3 + o_0(x^3)\right).$$

Pour obtenir un  $DL_3(0)$  de  $\sqrt[n]{h(x)}$ , je remplace  $h(x)$  par son  $DL_3(0)$  puis je mets sous la racine le terme dominant du DL en facteur, j'utilise ensuite  $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$  de sorte de faire apparaître  $\sqrt{1+u(x)}$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$  et  $u$  admet un  $DL_3(0)$ .

3. En utilisant les propriétés de la fonction logarithme : En utilisant les propriétés de la fonction racine  $n^{\text{ième}}$  réelle : cette méthode s'applique aux fonctions de la forme  $\ln(h(x))$ .

$$DL_4(0) \text{ de } f(x) = \ln(1 + \text{Arctan}(x) + \cos(x))$$

$$f(x) = \ln(1 + \text{Arctan}(x) + \cos(x)) = \ln\left(1 + x - \frac{x^3}{3} + o_0(x^4) + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)\right)$$

$$f(x) = \ln\left(2 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)\right) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{48} + o_0(x^4)\right).$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$  et  $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + u^4 \varepsilon(u)$  et  $\lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon(u) = 0$ ,

Pour obtenir un  $DL_3(0)$  de  $\ln(h(x))$ , je remplace  $h(x)$  par son  $DL_3(0)$  puis je mets dans le logarithme le terme dominant du DL en facteur, j'utilise ensuite  $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$  de sorte de faire apparaître  $\ln(1+u(x))$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$  et  $u$  admet un  $DL_3(0)$ .

$$\ln(1+u(x)) = u(x) - \frac{u(x)^2}{2} + \frac{u(x)^3}{3} - \frac{u(x)^4}{4} + u(x)^4 \varepsilon(u(x)) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(u(x)) = 0 \text{ et}$$

$$u(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{48} + o_0(x^4)$$

$$u^2(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{4} - \frac{5x^4}{48} + o_0(x^4)$$

$$u^3(x) = \frac{x^3}{8} - \frac{3x^4}{16} + o_0(x^4)$$

$$u^4(x) = \frac{x^4}{16} + o_0(x^4)$$

$$\text{Donc, } f(x) = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + o_0(x^4).$$

$$f(x) = \ln(1 + \sqrt[3]{8+x}) \quad (\text{ordre 3 en 0})$$

$$\sqrt[3]{8+x} = 2\sqrt[3]{1+\frac{x}{8}} = 2\left(1+\frac{x}{8}\right)^{\frac{1}{3}}. \text{ Comme } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{8} = 0 \text{ et } \left(1+\frac{x}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}u + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\frac{u^2}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\frac{u^3}{6} + o_0(u^3),$$

$$\left(1+\frac{x}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3} \times \frac{x}{8} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\frac{\left(\frac{x}{8}\right)^2}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\frac{\left(\frac{x}{8}\right)^3}{6} + o_0\left(\left(\frac{x}{8}\right)^3\right) = 1 + \frac{x}{24} - \frac{x^2}{3^2 \times 2^6} + \frac{5x^3}{3^4 \times 2^9} + o_0(x^3).$$

$$\text{Donc, } f(x) = \ln\left(3 + \frac{x}{3 \times 2^2} - \frac{x^2}{3^2 \times 2^5} + \frac{5x^3}{3^4 \times 2^8} + o_0(x^3)\right) = \ln\left(3\left[1 + \frac{x}{3^2 \times 2^2} - \frac{x^2}{3^3 \times 2^5} + \frac{5x^3}{3^5 \times 2^8} + o_0(x^3)\right]\right)$$

$$f(x) = \ln(3) + \ln\left(1 + \underbrace{\frac{x}{3^2 \times 2^2} - \frac{x^2}{3^3 \times 2^5} + \frac{5x^3}{3^5 \times 2^8} + o_0(x^3)}_{=u(x)}\right). \text{ Comme } \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0 \text{ et } \ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{u^3}{3} + o_0(u^3),$$

$$\ln(1+u(x)) = u(x) - \frac{1}{2}u(x)^2 + \frac{u(x)^3}{3} + o_0(x^3) \text{ avec } \begin{cases} u(x) = \frac{x}{3^2 \times 2^2} - \frac{x^2}{3^3 \times 2^5} + \frac{5x^3}{3^5 \times 2^8} + o_0(x^3) \\ u(x)^2 = \frac{x^2}{3^4 \times 2^4} - \frac{x^3}{3^5 \times 2^6} + o_0(x^3) \\ u(x)^3 = u(x) \times u(x)^2 = \frac{x^3}{3^6 \times 2^6} + o_0(x^3) \end{cases}.$$

$$\text{Donc, } f(x) = \ln(3) + \frac{x}{3^2 \times 2^2} - \frac{x^2}{3^3 \times 2^5} + \frac{5x^3}{3^5 \times 2^8} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{3^4 \times 2^4} - \frac{x^3}{3^5 \times 2^6}\right] + \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3^6 \times 2^6}\right] + o_0(x^3) = \ln(3) + \frac{x}{3^2 \times 2^2} - \frac{x^2}{3^4 \times 2^3} + \frac{67x^3}{3^7 \times 2^8} + o_0(x^3).$$

$$f(x) = \text{Arccos}(x)^{\text{Arcsin}(x)}, \text{ ordre 3 en } a = 0$$

$$f(x) = e^{\text{Arcsin}(x) \ln(\text{Arccos}(x))}. \text{ Posons } h(x) = \text{Arcsin}(x) \ln(\text{Arccos}(x)).$$

$$\text{Arcsin}(x) = x + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3) \text{ et } \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right).$$

$$\ln(\text{Arccos}(x)) = \ln\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right)\right) = \ln\left\{\frac{\pi}{2} \left[1 - \underbrace{\left(\frac{2}{\pi}x + \frac{2}{\pi} \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right)}_{=u(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0}\right]\right\} = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + \ln(1-u(x)).$$

$$\ln(\text{Arccos}(x)) = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - u(x) - \frac{u(x)^2}{2} - \frac{u(x)^3}{3} + o_0(x^3) = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{2}{\pi}x + \frac{2}{\pi} \frac{x^3}{6}\right) - \frac{2}{\pi^2}x^2 - \frac{8}{3\pi^3}x^3 + o_0(x^3)$$

$$\ln(\text{Arccos}(x)) = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\pi}x - \frac{2}{\pi^2}x^2 - \left(\frac{8}{3\pi^3} + \frac{1}{3\pi}\right)x^3 + o_0(x^3).$$

$$\text{Alors, } h(x) = \left(x + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right) \left(\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\pi}x - \frac{2}{\pi^2}x^2 - \left(\frac{8}{3\pi^3} + \frac{1}{3\pi}\right)x^3 + o_0(x^3)\right)$$

$$h(x) = \underbrace{\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)x - \frac{2}{\pi}x^2 + \left(\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)}{6} - \frac{2}{\pi^2}\right)x^3 + o_0(x^3)}_{=v(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0}. \text{ Donc, } f(x) = e^{v(x)} = 1 + v(x) + \frac{v(x)^2}{2} + \frac{v(x)^3}{6} + o_0(x^3).$$

$$f(x) = 1 + \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)x - \frac{2}{\pi}x^2 + \left(\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)}{6} - \frac{2}{\pi^2}\right)x^3 + \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{\pi}{2}\right)x^2 - \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)x^3 + \frac{1}{6}\ln^3\left(\frac{\pi}{2}\right)x^3 + o_0(x^3).$$

$$f(x) = 1 + \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)x + \left(\frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\pi}\right)x^2 + \left(\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)}{6} - \frac{2}{\pi^2} - \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6}\ln^3\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)x^3 + o_0(x^3).$$

#### 4. En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle : En utilisant les propriétés de la fonction racine $n^{\text{ième}}$ réelle : cette méthode s'applique aux fonctions de la forme $e^{h(x)}$ .

$$f(x) = e^{\text{Arccos}(x)} \quad (\text{ordre 6 en 0})$$

$$f(x) = e^{\text{Arccos}(x)} = e^{\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x)}. \text{ Arcsin est dérivable sur } ]-1, 1[ \text{ et } \text{Arcsin}' \text{ admet le } DL_5(0) \text{ suivant :}$$

$$\text{Arcsin}'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \underset{\substack{= \\ \text{car} \\ \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0}}{=} 1 + \left(\frac{-1}{2}\right)(-x^2) + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}-1\right)(-x^2)^2}{2} + o(x^5) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2^3}x^4 + o(x^5). \text{ Donc le théorème d'intégration}$$

$$\text{terme à terme assure que : } \text{Arcsin}(x) = \text{Arcsin}(0) + x = \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2^3} \frac{x^5}{5} + o(x^6) = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2^3} \frac{x^5}{5} + o(x^6).$$

$$\text{Donc, } f(x) = e^{\text{Arccos}(x)} = e^{\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x)} = e^{\frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2^3} \frac{x^5}{5} + o(x^6)} = e^{\frac{\pi}{2}} \overbrace{e^{-x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2^3} \frac{x^5}{5} + o(x^6)}}^{u(x)}.$$

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0 \text{ et } e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^5}{5!} + \frac{u^6}{6!} + o_0(u^6),$$

Pour obtenir un  $DL_3(0)$  de  $e^{h(x)}$ , je remplace  $h(x)$  par son  $DL_3(0)$  puis j'isole le terme constant de ce  $DL$  comme suit :  $h(x) = \lambda + u(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$  et  $u$  admet un  $DL_3(0)$  ; j'utilise ensuite  $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$  de sorte de faire apparaître  $\exp(u(x))$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$  et  $u$  admet un  $DL_3(0)$ .

$$e^{u(x)} = 1 + u(x) + \frac{1}{2}u(x)^2 + \frac{u(x)^3}{3!} + \frac{u(x)^4}{4!} + \frac{u(x)^5}{5!} + \frac{u(x)^6}{6!} + o_0(x^6) \text{ avec } \begin{cases} u(x) = -x - \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2^3}x^5 + o(x^6) \\ u(x)^2 = x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{8}{3^2 \cdot 5}x^6 + o(x^6) \\ u(x)^3 = u(x) \times u(x)^2 = -x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^6) \\ u(x)^4 = u(x) \times u(x)^3 = x^4 + \frac{2x^6}{3} + o(x^6) \\ u(x)^5 = u(x) \times u(x)^4 = -x^5 + o(x^6) \\ u(x)^6 = u(x) \times u(x)^5 = x^6 + o(x^6) \end{cases}$$

$$\text{Donc, } f(x) = e^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + \left[ -x - \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2^3}x^5 \right] + \frac{1}{2} \left[ x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{8}{3^2 \cdot 5}x^6 \right] + \frac{1}{2 \times 3} \left[ -x^3 - \frac{x^5}{2} \right] + \frac{1}{2^3 \times 3} \left[ x^4 + \frac{2x^6}{3} \right] + \frac{1}{2^3 \times 3 \times 5} \left[ -x^5 \right] + \frac{1}{2^4 \times 3^2 \times 5} x^6 + o(x^6) \right)$$

$$\text{Ainsi, } f(x) = e^{\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}x + \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2}x^2 - \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{3}x^3 + \frac{5e^{\frac{\pi}{2}}}{24}x^4 - \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{6}x^5 + \frac{17e^{\frac{\pi}{2}}}{144}x^6 + o(x^6).$$

**5. En se ramenant en 0 : cette méthode s'applique lorsqu'on cherche le DL d'une fonction en un point autre que 0 ou bien le développement asymptotique (DA) en  $\pm\infty$ .**

$$f(x) = \sqrt[3]{9 - 2\sin(x)}, \text{ ordre 4 en } a = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Posons } t = x - \frac{\pi}{6} \text{ et } g(t) = f(x).$$

$$\begin{aligned} g(t) &= f\left(\frac{\pi}{6} + t\right) = \sqrt[3]{9 - 2\sin\left(\frac{\pi}{6} + t\right)} = \sqrt[3]{9 - 2\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(t) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(t)\right]} \\ &= \sqrt[3]{9 - 2\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o_0(t^5)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(t - \frac{t^3}{6} + o_0(t^4)\right)\right]} = \sqrt[3]{9 - 1 - \sqrt{3}t + \frac{t^2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}t^3 - \frac{t^4}{24} + o_0(t^4)} \\ &= \sqrt[3]{8 - \sqrt{3}t + \frac{t^2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}t^3 - \frac{t^4}{24} + o_0(t^4)} = \sqrt[3]{8\left[1 - \frac{\sqrt{3}}{8}t + \frac{1}{16}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{6 \times 8}t^3 - \frac{t^4}{24 \times 8} + o_0(t^4)\right]} \\ &= 2 \sqrt[3]{1 + \underbrace{\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}t + \frac{1}{16}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{6 \times 8}t^3 - \frac{t^4}{24 \times 8} + o_0(t^4)\right)}_{=u(t)}} \end{aligned}$$

$$\text{Comme } \lim_{t \rightarrow 0} u(t) = 0 \text{ et } (1 + u)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{3^2}u^2 + \frac{5}{3^4}u^3 - \frac{10}{3^5}u^4 + o_0(u^4),$$

$$(1 + u(t))^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}u(t) - \frac{1}{3^2}u(t)^2 + \frac{5}{3^4}u(t)^3 - \frac{10}{3^5}u(t)^4 + o_0(t^4) \text{ avec}$$

$$\begin{cases} u(t) = \frac{1}{8}\left(-\sqrt{3}t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{6}t^3 - \frac{t^4}{24} + o_0(t^4)\right) \\ u(t)^2 = \frac{1}{64}\left[3t^2 - \sqrt{3}t^3 + \frac{3}{4}t^4 + o_0(t^4)\right] \\ u(t)^3 = u(t)^2 \times u(t) = \frac{1}{8^3}\left[-3\sqrt{3}t^3 + \frac{9}{2}t^4 + o_0(t^4)\right] \\ u(t)^4 = (u(t)^2)^2 = \frac{1}{8^4}\left[9t^4 - 6\sqrt{3}t^5 + o_0(t^5)\right] \\ u(t)^5 = u(t)^3 \times u(t)^2 = o_0(t^4) \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } g(t) = 2 + \frac{2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}\left[-\sqrt{3}t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{6}t^3 - \frac{t^4}{24}\right] - \frac{2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{2}{3}}}\frac{1}{8^2}\left[3t^2 - \sqrt{3}t^3 + \frac{3}{4}t^4\right] + \frac{5 \cdot 2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{4}{3}}8^3}\left[-3\sqrt{3}t^3 + \frac{9}{2}t^4\right] - \frac{10 \cdot 2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{5}{3}}8^4}\left[9t^4\right] + o_0(t^4) \text{ puis}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{1}{3 \times 8} - \frac{1}{3 \times 4 \times 8}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6 \times 4 \times 3} + \frac{\sqrt{3}}{4 \times 8 \times 3^2} - \frac{5}{3^3 8^2 \times 4}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 \\ &\quad + \left(-\frac{1}{3 \times 6 \times 4^2} - \frac{1}{3 \times 8^2 \times 2} - \frac{5}{3^2 \times 8^3}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4 + o_{\frac{\pi}{6}}\left(\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4\right) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } f(x) = 2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{1}{4 \times 8}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{8^2 \times 4 \times 3^3}(115)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \frac{-1}{3^2 \times 8^3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4 + o_{\frac{\pi}{6}}\left(\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4\right)$$

$$DL_5(1) \text{ de } f(x) = e^{x^2 - 5x - 4}$$

$$\text{Posons } t = x - 1 \text{ et } g(t) = f(x). \text{ Alors } g(t) = f(t + 1) = e^{(t+1)^2 - 5(t+1) - 4} = e^{t^2 - 3t - 8} = e^{-8}e^{t^2 - 3t}.$$

$$\text{Comme } \lim_{t \rightarrow 0} t^2 - 3t = 0 \text{ et } e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + \frac{u^5}{120} + u^5 \varepsilon(u) \text{ et } \lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon(u) = 0,$$

$$e^{t^2 - 3t} = 1 + t^2 - 3t + \frac{(t^2 - 3t)^2}{2} + \frac{(t^2 - 3t)^3}{6} + \frac{(t^2 - 3t)^4}{24} + \frac{(t^2 - 3t)^5}{120} + \underbrace{(t^2 - 3t)^5}_{\sim 0 t^5} \varepsilon(u(t^2 - 3t)) \text{ et } \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t^2 - 3t) = 0. \text{ Donc, } e^{t^2 - 3t} = 1 + t^2 -$$

$$3t + \frac{9t^2 + t^4 - 6t^3}{2} + \frac{-27t^3 + 27t^4 - 9t^5}{6} + \frac{81t^4 - 108t^5}{24} + \frac{-243t^5}{120} + t^5 o_0(1).$$

$$\text{Alors } g(t) = e^{-8}\left[1 - 3t + \frac{11}{2}t^2 + \left(-3 - \frac{9}{2}\right)t^3 + \left(\frac{1}{2} + \frac{9}{2} + \frac{27}{8}\right)t^4 + \left(-\frac{3}{2} - \frac{9}{2} - \frac{81}{40}\right)t^5 + t^5 o_0(1)\right]$$

$$\text{Ainsi, } f(x) = e^{-8}\left[1 - 3(x - 1) + \frac{11}{2}(x - 1)^2 + \left(-\frac{15}{2}\right)(x - 1)^3 + \left(\frac{67}{8}\right)(x - 1)^4 + \left(-\frac{321}{40}\right)(x - 1)^5 + o_1((x - 1)^5)\right].$$

$$f(x) = (x + 1)\text{Arctan}\left(\frac{2+x}{x}\right) \text{ DA en } +\infty \text{ à 3 termes significatifs (i.e. non nuls)}$$

$$\text{Posons } g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right). \text{ Alors, } tg(t) = t\left(\frac{1}{t} + 1\right)\text{Arctan}\left(\frac{2+\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}\right) = (1 + t)\text{Arctan}(2t + 1).$$

Cherchons un DL(0) (ordre 2 ou 3 : il faut un terme significatif après l'ordre 1) de  $tg(t)$ :

$$\text{Soit } \varphi(t) = \text{Arctan}(2t + 1).$$

$$\varphi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \varphi'(t) = \frac{2}{1 + (2t + 1)^2} = \frac{2}{2 + 4t + 4t^2} = \frac{1}{1 + (2t + 2t^2)} = 1 - (2t + 2t^2) + 4t^2 + o_0(t^2) = 1 - 2t + 2t^2 + o_0(t^2).$$

$$\text{Donc le théorème d'intégration terme à terme d'un DL assure que } \varphi(t) = \varphi(0) + t - t^2 + \frac{2}{3}t^3 + o_0(t^3) = \frac{\pi}{4} + t - t^2 + \frac{2}{3}t^3 + o_0(t^3)$$

$$\begin{aligned} \text{On pose } t = \frac{1}{x} \text{ et } g(t) &= f(x) = f\left(\frac{1}{t}\right) \\ f \text{ admet le } DA_n(\infty) : f(x) &= \sum_{k=p}^n \lambda_k \frac{1}{x^k} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right) \\ \text{si et seulement si} \\ g \text{ admet le } DA_n(0) : g(t) &= f\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{k=-p}^n \lambda_k t^k + o_0(t^n) \end{aligned}$$

Donc,  $tg(t) = (1+t) \left( \frac{\pi}{4} + t - t^2 + \frac{2}{3}t^3 + o_0(t^3) \right) = \frac{\pi}{4} + \left( \frac{\pi}{4} + 1 \right)t + \left( -\frac{1}{3} \right)t^3 + o_0(t^3)$ .

Donc  $\frac{1}{x}f(x) = \frac{\pi}{4} + \left( \frac{\pi}{4} + 1 \right) \left( \frac{1}{x} \right) + \left( -\frac{1}{3} \right) \left( \frac{1}{x} \right)^3 + o_{-\infty} \left( \left( \frac{1}{x} \right)^3 \right)$ . Et finalement,  $f(x) = \frac{\pi}{4}x + \left( \frac{\pi}{4} + 1 \right) + \left( -\frac{1}{3} \right) \left( \frac{1}{x} \right)^2 + o_{+\infty} \left( \left( \frac{1}{x} \right)^2 \right)$ .

**6. En utilisant le  $DL(0)$  de  $\frac{1}{1+u}$  : cette méthode s'applique aux fonctions définies par un quotient.**

$f(x) = \frac{\sin(x)}{1-x^2+x^3}$  (ordre 6 en 0)

$f(x) = \frac{\sin(x)}{1-x^2+x^3} = \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o_0(x^6) \right) \frac{1}{1-(x^2-x^3)} = x \left( 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o_0(x^5) \right) \frac{1}{1-\left( \frac{x^2-x^3}{u(x)} \right)}$ .

Le facteur  $x$  nous permet de gagner un rang dans le DL ; il suffit donc de trouver un  $DL_5(0)$  de  $\left( 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o_0(x^5) \right) \frac{1}{1-\left( \frac{x^2-x^3}{u(x)} \right)}$  pour

obtenir un  $DL_6(0)$  de  $f$ . Et dans cet objectif, il suffit de trouver un  $DL_5(0)$  de  $\frac{1}{1-\left( \frac{x^2-x^3}{u(x)} \right)}$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$  et  $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + o_0(u^5)$ ,

$\frac{1}{1-u(x)} = 1 + u(x) + u(x)^2 + u(x)^3 + u(x)^4 + u(x)^5 + o_0(x^5)$  avec  $\begin{cases} u(x) = x^2 - x^3 \sim_0 x^2 \\ u(x)^2 = x^4 - 2x^5 + o_0(x^5) \\ u(x)^3 \sim_0 x^6 \text{ donc } u(x)^3 = o_0(x^5) \\ \text{de même, } u(x)^4 = o_0(x^5) \\ u(x)^5 = o_0(x^5) \end{cases}$ .

Donc,  $f(x) = x \left( 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o_0(x^5) \right) \left( 1 + x^2 - x^3 + x^4 - 2x^5 + o_0(x^5) \right) = x \left( 1 + \frac{5}{6}x^2 - x^3 + \frac{101}{120}x^4 - \frac{11}{6}x^5 + o_0(x^5) \right)$ .

Ainsi,  $f(x) = x + \frac{5}{6}x^3 - x^4 + \frac{101}{120}x^5 - \frac{11}{6}x^6 + o_0(x^6)$ .

$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2+x^3}$  (ordre 3 en 1)

Posons  $g(t) = f(t+1)$ . Et cherchons le  $DL_3(0)$  de  $g$ .

$g(t+1) = \frac{\ln(2+t)}{(t+1)^2 + (t+1)^3} = \frac{\ln(2+t)}{2+5t+4t^2+t^3} = \frac{\ln\left(2\left(1+\frac{t}{2}\right)\right)}{2\left(1+\frac{5}{2}t+2t^2+\frac{1}{2}t^3\right)} = \frac{1}{2} \left[ \ln(2) + \ln\left(1+\frac{t}{2}\right) \right] \frac{1}{1+u(t)}$ .

Comme  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2} = 0$  et  $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o_0(u^3)$ ,  $\ln\left(1+\frac{t}{2}\right) = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{24} + o_0(t^3)$ ,

Comme  $\lim_{t \rightarrow 0} u(t) = 0$  et  $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o_0(u^3)$ ,  $\frac{1}{1+u(t)} = 1 - u(t) + u(t)^2 - u(t)^3 + o_0(t^3)$  avec  $\begin{cases} u(t) = \frac{5}{2}t + 2t^2 + \frac{1}{2}t^3 \\ u(t)^2 = \frac{25}{4}t^2 + 10t^3 + o_0(t^3) \\ u(t)^3 = \frac{125}{8}t^3 + o_0(t^3) \end{cases}$ .

Donc,  $\frac{1}{1+u(t)} = 1 - \left( \frac{5}{2}t + 2t^2 + \frac{1}{2}t^3 \right) + \left( \frac{25}{4}t^2 + 10t^3 \right) - \frac{125}{8}t^3 + o_0(t^3) = 1 - \frac{5}{2}t + \frac{17}{4}t^2 + \frac{49}{8}t^3 + o_0(t^3)$ .

Alors,  $g(t) = \frac{1}{2} \left[ \ln(2) + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{24} + o_0(t^3) \right] \left[ 1 - \frac{5}{2}t + \frac{17}{4}t^2 + \frac{49}{8}t^3 + o_0(t^3) \right]$

$g(t) = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{5\ln(2)}{2} \right] t + \left[ -\frac{11}{8} + \frac{17\ln(2)}{4} \right] t^2 + \left[ \frac{119}{48} + \frac{49\ln(2)}{8} \right] t^3 + o_0(t^3)$ .

Par conséquent,  $f(x) = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{5\ln(2)}{2} \right] (x-1) + \left[ -\frac{11}{8} + \frac{17\ln(2)}{4} \right] (x-1)^2 + \left[ \frac{119}{48} + \frac{49\ln(2)}{8} \right] (x-1)^3 + o_1((x-1)^3)$ .

$DL_3(0)$  de  $f(x) = \frac{\ln(\operatorname{ch}(x))}{\sin(x)\operatorname{sh}(x)}$

$\frac{\ln(\operatorname{ch}(x))}{\sin(x)\operatorname{sh}(x)} = \frac{\ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^5)\right)}{\left(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^4)\right)\left(x + \frac{x^3}{6} + o_0(x^4)\right)} = \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^5)}{x^2 + o_0(x^5)} = \frac{x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{12} + o_0(x^3)\right)}{x^2(1 + o_0(x^3))} = \left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{12} + o_0(x^3)\right) \frac{1}{1 + o_0(x^3)} = \left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{12} + o_0(x^3)\right) (1 + o_0(x^3)) = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{12} + o_0(x^3)$ .

$f(x) = \frac{x \operatorname{Arctan}(x)}{\ln(\cos(x))}$   $a=0, n=4$

$\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 - \underbrace{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + o_0(x^6)\right)}_{=u(x)}\right)$   $\ln(1-u) = -u - u^2 - u^3 - u^4 - u^5 - u^6 + o_{u \rightarrow 0}(u^6)$   $= -u(x) - \frac{u(x)^2}{2} - \frac{u(x)^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^6)$  avec  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0 \\ \text{et } u(x) \sim_0 \frac{x^2}{2} \\ \text{donc } u(x)^4 = o_0(x^6) \end{cases}$

$\begin{cases} u(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + o_0(x^6) \end{cases}$

$\ln(\cos(x)) \sim_0 -\frac{1}{2}x^2$  et  $x \operatorname{Arctan}(x) \sim_0 x^2$ . De plus,  $\ln(\cos(x))$  et  $x \operatorname{Arctan}(x)$  admettent des  $DL(0)$  à tout ordre d'après Taylor-Young. Je peux donc anticiper le calcul, le premier terme du  $DL(0)$  de  $\ln(\cos(x))$  est  $-\frac{1}{2}x^2$  et celui de  $x \operatorname{Arctan}(x)$  est  $x^2$ . Par conséquent, il faudra factoriser par  $x^2$  numérateur et dénominateur puis simplifier pour faire apparaître  $\frac{1}{1+u(x)}$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$  et  $u$  admet un  $DL(0)$ . Comme j'ai simplifié par  $x^2$ , je dois prendre un ordre 6 au tout début, pour finalement obtenir un ordre 4 à la fin.

$$u(x)^3 = \frac{x^6}{8} + o_0(x^6)$$

$$\text{Donc, } \ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} - \frac{1}{2} \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} \right) - \frac{1}{3} \frac{x^6}{8} + o_0(x^6) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o_0(x^6)$$

$$f(x) = \frac{x(x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + o_0(x^5))}{-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o_0(x^6)} = \frac{x^2(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{5} + o_0(x^4))}{-\frac{x^2}{2}(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{2x^4}{45} + o_0(x^4))} = -2\left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{5} + o_0(x^4)\right) \times \frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{2x^4}{45} + o_0(x^4)}.$$

L'objectif est de faire apparaître  $\frac{1}{1+u(x)}$   
avec  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$  et  $u$  admet un  $DL_n(0)$ .

$$\text{De plus, } \frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{2x^4}{45} + o_0(x^4)} \underset{\text{car}}{=} 1 - u(x) + u(x)^2 + o_0(x^4) = 1 - \left( \frac{x^2}{6} + \frac{2x^4}{45} \right) + \frac{x^4}{36} + o_0(x^4) = 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{60} + o_0(x^4)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} u(x) &= 0 \\ \text{et } u(x) &\sim_0 \frac{x^2}{6} \\ \text{donc } u(x)^3 &= o_0(x^4) \end{aligned}$$

$$\text{donc } f(x) = -2 \left( 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{5} + o_0(x^4) \right) \times \left( 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{60} + o_0(x^4) \right) = -2 \left( 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{29}{180} x^4 + o_0(x^4) \right)$$

Ainsi,  $f(x) = -2 + x^2 + \frac{29}{90}x^4 + o_0(x^4)$ .

$f(x) = (\tan(x))^{\tan(2x)}$ .  $DL_2\left(\frac{\pi}{4}\right)$  de  $f$ ? Qu'en déduit-on sur  $f$ ?

Posons  $t = x - \frac{\pi}{4}$  et  $g(t) = f(x)$ . Alors  $x = t + \frac{\pi}{4}$  et  $g(t) = f\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$  et  $f(x) = g\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ . Cherchons un  $DL_2(0)$  de  $g$  :

$$g(t) = f\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \left(\tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right)^{\tan\left(2\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right)} = e^{\tan\left(2\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right)\ln\left(\tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right)} = e^{\tan\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)\ln\left(\frac{\tan(t+1)}{1-\tan(t)}\right)}.$$

$$\text{Posons } h(t) = \tan\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) \ln\left(\frac{\tan(t)+1}{1-\tan(t)}\right) = -\frac{[\ln(1+\tan(t))-\ln(1-\tan(t))]}{\tan(2t)} = -\frac{\ln\left(1+\left(t+\frac{t^3}{3}+o_0(t^3)\right)\right)-\ln\left(1+\left(-t-\frac{t^3}{3}+o_0(t^3)\right)\right)}{2t+\frac{(2t)^3}{3}+o_0(t^3)}$$

$$h(t) = -\frac{\left[\left(t+\frac{t^3}{3}\right)-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+o_0(t^3)\right]-\left[-\left(t+\frac{t^3}{3}\right)+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}+o_0(t^3)\right]}{2t+\frac{(2t)^3}{2}+o_0(t^3)} = -\frac{2t+\frac{4}{3}t^3+o_0(t^3)}{2t+\frac{8}{3}t^3+o_0(t^3)} = -\frac{2t\left(1+\frac{2t^2}{3}+o_0(t^2)\right)}{2t\left(1+\frac{4}{3}t^2+o_0(t^2)\right)}$$

$$h(t) = -\left(1 + \frac{2t^2}{3} + o_0(t^2)\right) \frac{1}{1 + \frac{4}{3}t^2 + o_0(t^2)} = -\left(1 + \frac{2t^2}{3} + o_0(t^2)\right) \left(1 - \frac{4}{3}t^2 + o_0(t^2)\right) = -1 + \frac{2}{3}t^2 + o(t^2).$$

Donc,  $g(t) = e^{-1+\frac{2}{3}t^2+o(t^2)} = e^{-1}e^{\frac{2}{3}t^2+o(t^2)} = \frac{1}{e}\left(1 + \frac{2}{3}t^2 + o(t^2)\right)$ .

Donc,  $f(x) = \frac{1}{e} + \frac{2}{3e} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + o_{\frac{\pi}{4}}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)$ .

J'en déduis que :

- 1)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = \frac{1}{e}$ . Donc  $f$  est prolongeable par continuité en  $\frac{\pi}{4}$  par la valeur  $1/e$ . On note  $\tilde{f}$  son prolongement par continuité en  $\frac{\pi}{4}$ .

$$2) \quad \forall x \neq \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{f(x) - \frac{1}{e}}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{2}{3e} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + o_{\frac{\pi}{4}}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3e} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + o_{\frac{\pi}{4}}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right).$$

Donc,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}} = 0$ . Ainsi,  $\tilde{f}$  est dérivable en  $\frac{\pi}{4}$  et  $\tilde{f}'(\frac{\pi}{4}) = 0$  et y =  $\frac{1}{e}$  est l'équation de la tangente à  $C\tilde{f}$  en  $\frac{\pi}{4}$ .

- 3) Son prolongement  $\tilde{f}$  admet le  $DL_2(\frac{\pi}{4})$  suivant :  $f(x) = \frac{1}{e} + \frac{2}{3e} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + o_{\frac{\pi}{4}}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)$  donc,

$f(x) - \frac{1}{e} \sim_{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{3e} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$ . Par conséquent,  $f(x) - \frac{1}{e}$  est du signe de  $\frac{2}{3e} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$  donc positif au voisinage de  $\frac{\pi}{4}$ . Donc  $Cf$  est au-dessus de sa tangente horizontale et  $\tilde{f}$  admet en  $\frac{\pi}{4}$  un minimum local.

car si  $f(x) \sim_a g(x)$  alors  $f$  et  $g$  ont le même signe au voisinage de  $a$  et la même limite en  $a$  dès que l'une de ces limites existe.

7. **Par Intégration terme à terme:** cette méthode s'applique aux fonctions dérivables au point  $a$  où l'on cherche le DL et pour lesquels la dérivée admet un  $DL(a)$  plus simple à déterminer que la  $DL(a)$  de  $f$ .

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\tan(x)}{2}\right) \text{ ordre 5 en } a = \frac{\pi}{3}.$$

Pour  $x$  au voisinage de  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\tan(x)}{2}$  est au voisinage de  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Or, Arcsin est dérivable sur  $] -1, 1[$  donc au voisinage de  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Et par conséquent,  $f$  est dérivable au voisinage de  $\frac{\pi}{3}$  et

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(1 + \tan^2(x))}{\sqrt{1 - \frac{\tan^2(x)}{4}}} \stackrel{\xi}{=} \frac{1}{2} \left( 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o_0(x^4) \right) \left( \underbrace{1 - \left( \frac{x^2}{4} + \frac{1}{6}x^4 + o_0(x^4) \right)}_{=u(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left( 1 + x^2 + \frac{2}{3} x^4 + o_0(x^4) \right) \left( 1 - \frac{1}{2} u(x) + \frac{3}{8} u(x)^2 + o_0(x^4) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( 1 + x^2 + \frac{2}{3} x^4 + o_0(x^4) \right) \left( 1 - \left( \frac{x^2}{8} + \frac{1}{12} x^4 \right) + \frac{3}{8} \times \frac{1}{16} x^4 + o_0(x^4) \right)$$

Si  $f$  est dérivable sur un intervalle contenant  $a$  et  $f'$  admet le  $DL_n(a)$  suivant :  $f'(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n)$  alors  $f$  admet le  $DL_{n+1}(a)$  suivant :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{k+1} (x-a)^{k+1} + o_a((x-a)^{n+1})$$

On cherche donc le  $DL_{n-1}(a)$  de  $f'$  pour obtenir le  $DL_n(a)$  de  $f$ .

$$= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{7}{8}x^2 + \left(-\frac{1}{8} + \frac{2}{3} - \frac{1}{12} + \frac{3}{8} \frac{1}{16}\right)x^4 + o_0(x^4) \right) = \frac{1}{2} + \frac{7}{16}x^2 + \frac{185}{768}x^4 + o_0(x^4).$$

Donc le théorème d'intégration terme à terme d'un DL assure que :  $f(x) = \underbrace{f(0)}_{= \text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2}x + \frac{7}{16}\frac{x^3}{3} + \frac{185}{768}\frac{x^5}{5} + o_0(x^5)$

Ainsi,  $f(x) = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}x + \frac{7}{48}x^3 + \frac{37}{768}x^5 + o_0(x^5)$ .

$$DL_4(0) \text{ de } f(x) = \text{Arcsin}\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$\text{Arcsin}$  étant dérivable sur  $] -1 ; 1[$ ,  $f$  est dérivable est  $] -\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}[$  et  $\forall x \in ] -\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}[$ ,  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4} - x - x^2}}$ .

Cherchons un  $DL_3(0)$  de  $f'(x)$  :  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4} - x - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}\sqrt{1 - \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}x^2}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( 1 + \left( \frac{-\frac{4}{3}x - \frac{4}{3}x^2}{u(x)} \right) \right)^{-\frac{1}{2}}$ .

Or  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$  et  $(1+t)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)t^2}{2} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)t^3}{6} + t^3\varepsilon(t)$  tq  $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$ . Donc,

$$(1 + u(x))^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}u(x) + \frac{3}{8}u(x)^2 + \frac{5}{16}u(x)^3 + u(x)^3\varepsilon(u(x)) \text{ et } \begin{cases} u(x) = -\frac{4}{3}x - \frac{4}{3}x^2 \\ u^2(x) = \frac{16}{9}x^2 + \frac{32}{9}x^3 + o_0(x^3) \\ u^3(x) = \frac{64}{27}x^3 + o_0(x^3) \sim_0 \frac{64}{27}x^3 \\ u(x)^3\varepsilon(u(x)) = o_0(x^3) \end{cases}$$

Alors,  $(1 + u(x))^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3}x - \frac{4}{3}x^2\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{16}{9}x^2 + \frac{32}{9}x^3\right) + \frac{5}{16} \cdot \frac{64}{27}x^3 + o_0(x^3) = 1 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}x^2 + \frac{20}{27}x^3 + o_0(x^3)$ .

Donc,  $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3\sqrt{3}}x + \frac{8}{3\sqrt{3}}x^2 + \frac{40}{27\sqrt{3}}x^3 + o_0(x^3)$ . Alors le TITT assure que :

$$f(x) = f(0) + \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{x^2}{2} + \frac{8}{3\sqrt{3}}\frac{x^3}{3} + \frac{40}{27\sqrt{3}}\frac{x^4}{4} + o_0(x^4) = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{3\sqrt{3}}x^2 + \frac{8}{9\sqrt{3}}x^3 + \frac{10}{27\sqrt{3}}x^4 + o_0(x^4).$$