

Méthodes d'un équivalent d'une fonction donnée en un point donné

Les SAVOIR-FAIRE fondamentaux !

Prérequis :

- Connaître parfaitement les équivalents usuels
- Connaître les comparaisons entre fonctions usuelles (croissances comparées, fonctions exponentielles, fonctions puissances)
- Connaître parfaitement les règles de calcul sur les équivalents
- Connaître parfaitement les interdits sur les équivalents
- Savoir comparer deux fonctions en étudiant la limite du quotient
- Connaître parfaitement les règles de calcul sur les fonctions négligeables (les « petits o »)
- Connaître les développements limités des fonctions usuels (ordre 3 ou 4)
- Bien connaître les propriétés des fonctions usuelles ($\ln(ab) = \ln(|a|) + \ln(|b|)$, $e^{a+b} = e^a e^b$, $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|} \sqrt[n]{|b|}$, $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$, $\text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$, $\cos(a+b)$, $\sin p - \sin q$; $\tan\left(a + \frac{\pi}{2}\right) \dots$)

1. PAR PRODUIT OU QUOTIENT

Equivalent simple en $+\infty$ de $\varphi(x) = \frac{(\ln(x))^{2026} - \frac{1}{2026} \sqrt[2026]{x} - 2026 \times \sin(x)}{2026^x - e^{2026x} - 2026x^{20} \ln(x)^{26}}$. En déduire la limite de φ en $+\infty$

Notons $N(x)$ le numérateur et $D(x)$ le dénominateur de $\varphi(x)$.

Cherchons un équivalent simple de $N(x)$ au voisinage de $+\infty$.

D'après les croissances comparées, $(\ln(x))^{2026} \underset{cc}{\sim} o_{+\infty}\left(\sqrt[2026]{x}\right)$. Alors comme $-\frac{1}{2026}$ est constant, $(\ln(x))^{2026} = o_{+\infty}\left(-\frac{1}{2026} \sqrt[2026]{x}\right)$.
De plus $(x \mapsto 2026 \sin(x))$ est bornée car $\sin$ l'est mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[2026]{x} = +\infty$. Par conséquent,

$$2026 \sin(x) = o_{+\infty}\left(\sqrt[2026]{x}\right) \underset{\substack{\text{car} \\ -\frac{1}{2026} \text{ cste} \\ \text{non nulle.}}}{\sim} o_{+\infty}\left(-\frac{1}{2026} \sqrt[2026]{x}\right).$$

Attention : $o_a(g) \pm o_a(g) = o_a(g)$
si λ cste non nulle, $0, \lambda o_a(g) = o_a(\lambda g) = o_a(g)$.

$$\text{Alors, } N(x) = -\frac{1}{2026} \sqrt[2026]{x} + o_{+\infty}\left(-\frac{1}{2026} \sqrt[2026]{x}\right) - o_{+\infty}\left(-\frac{1}{2026} \sqrt[2026]{x}\right) = -\frac{1}{2026} \sqrt[2026]{x} + o_{+\infty}\left(-\frac{1}{2026} \sqrt[2026]{x}\right).$$

Cela signifie que : $N(x) \underset{+}{\sim} -\frac{1}{2026} \sqrt[2026]{x}$.

$f \sim_a g$ si et si $f = g + o_a(g)$

Cherchons un équivalent simple de $D(x)$ au voisinage de $+\infty$.

$2026 < e^{2026}$ donc $2026^x = o_{+\infty}(e^{2026x}) = o_{+\infty}(-e^{2026x})$.

De plus, $\ln(x)^{26} \ll_{+\infty} x$ donc $x^{20} \ln(x)^{26} \ll_{+\infty} x^{21}$; or, $x^{21} \ll_{+\infty} e^{2026x}$. Ainsi, par transitivité des « petits o », $x^{20} \ln(x)^{26} = o_{+\infty}(e^{2026x})$. Et par conséquent, $-2026 \times x^{20} \ln(x)^{26} = o_{+\infty}(-e^{2026x})$

Alors, $D(x) = -e^{2026x} + o_{+\infty}(-e^{2026x}) + o_{+\infty}(-e^{2026x}) = -e^{2026x} + o_{+\infty}(-e^{2026x}) \underset{+}{\sim} -e^{2026x}$.

J'en déduis que $\varphi(x) \underset{+}{\sim} \frac{-\frac{1}{2026} \sqrt[2026]{x}}{-e^{2026x}} = \frac{1}{2026} \frac{\sqrt[2026]{x}}{e^{2026x}}$. Comme $\sqrt[2026]{x} \underset{cc}{\sim} o_{+\infty}(e^{2026x})$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2026} \frac{\sqrt[2026]{x}}{e^{2026x}} = 0$. J'en conclus que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$.

2. PAR COMPOSITION A DROITE : cette méthode s'applique à une fonction composée

Equivalent simple en 0 de $\varphi(x) = \ln(\cos(x))$.

$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1 \\ \ln(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} (t-1) \end{cases}$ donc par composition à droite, $\ln(\cos(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} (\cos(x) - 1)$.

$f \sim_a g$ et $g \sim_a h \Rightarrow f \sim_a h$

De plus, $\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$. Donc, par transitivité de l'équivalence, $\ln(\cos(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.

Equivalent simple en $-\infty$ de $\varphi(x) = \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\text{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}}$

$\begin{cases} f(t) \sim_a g(t) \\ \lim_{x \rightarrow b} u(x) = a \Rightarrow f(u(x)) \sim_b h(u(x)) \end{cases}$

$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \exp(t) - 1 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t \end{cases}$ donc par composition à droite, $\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

Pour $x < 0$, $\text{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2} = -\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$. Or, $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \text{Arctan}(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t \end{cases}$ donc par composition à droite, $\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ et par

conséquent, $\text{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2} \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} -\frac{1}{x}$.

Ainsi, $\varphi(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} -1$.

Soit $f(x) = (\ln(x))^2 \left(\sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) - \sin\left(\frac{1}{\ln(x+1)}\right) \right)$. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ pour x au voisinage de $+\infty$.

$\sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) - \sin\left(\frac{1}{\ln(x+1)}\right) = 2 \sin\left(\frac{1}{2\ln(x)} - \frac{1}{2\ln(x+1)}\right) \cos\left(\frac{1}{2\ln(x)} + \frac{1}{2\ln(x+1)}\right)$. Alors,

$\sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) - \sin\left(\frac{1}{\ln(x+1)}\right) \underset{+}{\sim} 2 \sin\left(\frac{1}{2\ln(x)} - \frac{1}{2\ln(x+1)}\right)$ puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{2\ln(x)} + \frac{1}{2\ln(x+1)}\right) = 1$;

Or, $\sin\left(\frac{1}{2\ln(x)} - \frac{1}{2\ln(x+1)}\right) \underset{+}{\sim} \frac{1}{2\ln(x)} - \frac{1}{2\ln(x+1)}$ car $\sin(u) \underset{0}{\sim} u$ et $u(x) = \frac{1}{2\ln(x)} - \frac{1}{2\ln(x+1)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Par conséquent, $\sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) - \sin\left(\frac{1}{\ln(x+1)}\right) \underset{+}{\sim} \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x+1)}$.

$$\text{Or, } \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x+1)} = \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{\ln(x) \ln(x+1)} = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x) \left(\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)} \underset{+}{\sim} \frac{1}{x (\ln(x))^2}$$

Au numérateur, $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$ et $u(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et par conséquent, $N(x) \underset{+}{\sim} \frac{1}{x}$

Au dénominateur, $\ln(x) \gg_{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ puisque $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et par conséquent, $D(x) \underset{+}{\sim} \frac{1}{(\ln(x))^2}$.

Ainsi, $\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x+1)} \underset{+}{\sim} \frac{1}{x (\ln(x))^2}$ J'en déduis que $f(x) \underset{+}{\sim} \frac{1}{x}$ et ensuite que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

3. PAR DERIVATION : cette méthode s'applique pour déterminer un équivalent en a d'une fonction f dérivable en a telle que $f(a) = 0$ et $f'(a) \neq 0$.

Soit $f(x) = x^x - 2x$, $a = 2$. Déterminer un équivalent simple au voisinage de a de 2

$f(x) = e^{x \ln(x)} - 2x$. Donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 2 + 4 \ln(2) \in \mathbb{R}^*$.

Donc, $\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \underset{\text{car } f(2)=0}{=} \frac{f(x)}{x-2} \sim_2 2 + 4 \ln(2)$. J'en déduis que $f(x) \sim_2 2(1 + 2 \ln(2))(x - 2)$.

4. PAR LIMITE : cette méthode s'applique pour déterminer un équivalent en a d'une fonction f qui a une limite finie et non nulle en a

Soit a et b deux réels non nuls et $f(x) = \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx}$. Equivalent en $+\infty$ de f ?

$$\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ax \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)} = e^{\frac{bx \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)}{\frac{a}{x} \cdot a}} = e^{ab \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)}{\frac{a}{x}}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^{ab} \in \mathbb{R}^*. \text{ J'en déduis que } \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} \sim_{+\infty} e^{ab}$$

5. PAR DEVELOPPEMENT LIMITE : cette méthode s'applique pour déterminer un équivalent en a d'une fonction f qui est soit une somme de fonctions dont aucune ne prédomine les autres soit une composée pour laquelle on ne peut pas appliquer la méthode « par composition ».

$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$. Equivalent de f en 0 ?

$\frac{1}{\ln(1+x)} \sim_0 \frac{1}{x}$. Donc aucun des deux termes de cette somme n'est négligeable devant l'autre. Utilisons les développements limités pour

préciser : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_0(x^2) = x \left(1 - \frac{x}{2} + o_0(x)\right)$. Donc, $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x \left(1 - \frac{x}{2} + o_0(x)\right)} = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + o_0(x)}\right)$

$f(x) = \frac{1}{x} \left(1 - \left(1 + \frac{x}{2} + o_0(x)\right)^{-1}\right) = -\frac{1}{2} + o_0(1)$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) \sim_0 -\frac{1}{2}$.

$$DL_1(0) \frac{1}{1-u} = 1 + u + o_0(u) \text{ avec } u(x) = \frac{x}{2} + o_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$f(x) = \sqrt[p]{1+px} - \sqrt[q]{1+qx} + \left(\frac{p-q}{2}\right)x^2$. Equivalent de f en 0 ?

$$\sqrt[p]{1+px} = (1+px)^{\frac{1}{p}} \underset{\text{car avec } \alpha = \frac{1}{p}}{=} 1 + \frac{1}{p}(px) + \left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p}-1\right)\frac{(px)^2}{2} + \left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p}-1\right)\left(\frac{1}{p}-2\right)\frac{(px)^3}{6} + o_0(x^3)$$

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}u^3 + o_0(u^3) \text{ et } u(x) = px \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\sqrt[p]{1+px} = 1 + \frac{1}{p}(px) + \frac{1-p}{2}x^2 + \frac{(1-p)(1-2p)}{6}x^3 + o_0(x^3)$$

$$f(x) = \sqrt[p]{1+px} - \sqrt[q]{1+qx} + \left(\frac{p-q}{2}\right)x^2$$

$$f(x) = 1 + x + \frac{1-p}{2}x^2 + \frac{(1-p)(1-2p)}{6}x^3 - \left(1 + x + \frac{1-q}{2}x^2 + \frac{(1-q)(1-2q)}{6}x^3\right) + \left(\frac{p-q}{2}\right)x^2 + o_0(x^3)$$

$$f(x) = \left(\frac{(1-p)(1-2p)}{6} - \frac{(1-q)(1-2q)}{6}\right)x^3 + o_0(x^3) = \frac{(2p^2-2q^2+3q-3p)}{6}x^3 + o_0(x^3). \text{ Donc, } f(x) \sim_0 \frac{(p-q)(2p+2q-3)}{6}x^3.$$

$f(x) = \text{sh}(x)^{\frac{1}{\ln(x)}}$. Equivalent en 0 de f ?

$f(x) = \text{sh}(x)^{\frac{1}{\ln(x)}} = e^{\frac{1}{\ln(x)} \ln(\text{sh}(x))}$. Posons $h(x) = \frac{1}{\ln(x)} \ln(\text{sh}(x))$.

$$\frac{1}{\ln(x)} \ln(\text{sh}(x)) = \frac{1}{\ln(x)} \ln\left(x + \frac{x^3}{6} + x^3 o_0(1)\right) = \frac{1}{\ln(x)} \ln\left(x \left(1 + \frac{x^2}{6} + x^2 o_0(1)\right)\right) = \frac{1}{\ln(x)} \left[\underbrace{\ln(x)}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty} + \underbrace{\ln\left(1 + \frac{x^2}{6} + x^2 o_0(1)\right)}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0} \right] \sim_0 \frac{\ln(x)}{\ln(x)} = 1.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e \in \mathbb{R}^*$. J'en conclus que $f(x) \sim_0 e$.

$\ln\left(1 + \frac{x^2}{6} + x^2 o_0(1)\right)$ est négligeable devant $\ln(x)$ en 0