DS3 - Correction

Calculatrice non autorisée, durée : 4 heures

Le sujet comporte 2 pages (1 feuille recto-verso). Les 6 exercices sont indépendants.

— Bien lire tout le sujet avant de commencer. Traiter les exercices dans l'ordre que vous souhaitez.

— Justifier toutes vos réponses. Bien relire chaque raisonnement et s'assurer que :

- Vous n'avez pas d'emblée affirmé que la propriété à démontrer est vraie (sans justifier). Posez - vous les bonnes questions : je sais que ? ou je cherche quand ou qui ?
- Le raisonnement est clairement exposé : avec une syntaxe correcte en maths et en français. Relisez-vous pour vous assurer que vous avez bien écrit ce que vous vouliez dire (en maths comme en français).
- Les liens logiques (donc, si et seulement si, car, alors, si, par conséquent, je sais que, en conclusion, . . ., ?, ?) sont utilisés et utilisés à bon escient.
- La phrase réponse, attendue et soulignée (ou encadrée ou surlignée) répond clairement à la question posée.

Si vous avez un doute sur l'énoncé (erreur d'énoncé ? ?), n'hésitez pas à le partager avec le professeur-surveillant.

Exercice 1 (Un calcul d'intégrale)

1. Déterminer une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+2t+3}$; en précisant l'ensemble de définition.

   La fonction $t \mapsto t^2 + 2t + 3$ est définie, continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+2t+3}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une primitive sur définie sur $\mathbb{R}$.
   On a obtient une primitive :

$$\begin{aligned}
\int_{.}^{x} \frac{1}{t^2+2t+3}dt &= \int_{.}^{x} \frac{1}{(t+1)^2-1+3}dt \\
&= \int_{.}^{x} \frac{1}{(t+1)^2+2}dt \\
&= \int_{.}^{x} \frac{1}{2\left[\dfrac{(t+1)^2}{2}+1\right]}dt \\
&= \int_{.}^{x} \frac{1}{2\left[1+\left(\dfrac{t+1}{\sqrt{2}}\right)^2\right]}dt
\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $u = \dfrac{t+1}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire $t = u\sqrt{2} - 1$, donc $dt = \sqrt{2}du$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{.}^{x} \frac{1}{t^2+2t+3}dt &= \int_{.}^{\frac{x+1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2(1+u^2)}\sqrt{2}du \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\arctan(u)\right]_{.}^{\frac{x+1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$ est donc une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+2t+3}$ sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\cos(x)+\sin(x)}dx$ est bien définie.

Pour tout $x \in [0;\pi/2]$, on a $2+\cos(x)+\sin(x) \geqslant 2$, on en déduit que $x \mapsto \dfrac{1}{2+\cos(x)+\sin(x)}$ est continue sur $[0;\pi/2]$.

L'intégrale I est bien définie.

3. Pour $x \in]-\pi;\pi[$, on pose $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Montrer que $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

Pour tout $x \in]-\pi;\pi[$, $\tan(x/2)$ est bien défini. On a :

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \cos\left(2\frac{x}{2}\right) \\
&= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \\
&= \frac{2}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 \\
&= \frac{2}{1+t^2} - 1 \\
&= \frac{2}{1+t^2} - \frac{1+t^2}{1+t^2} \\
&= \frac{1-t^2}{1+t^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= \sin\left(2\frac{x}{2}\right) \\
&= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= 2t\frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{2t}{1+t^2}
\end{aligned}$$

4. En effectuant un changement de variable, calculer I.

   On effectue le changement de variable : $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, c'est-à-dire $x = 2\arctan(t)$ (car $x \in [0;\pi/2]$). On a donc $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$. On obtient finalement :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\cos(x)+\sin(x)}dx &= \int_0^1 \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2(1+t^2)+(1-t^2)+2t}2dt \\
&= 2\int_0^1 \frac{1}{t^2+2t+3}dt \\
&= 2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1 \\
&= \sqrt{2}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\right) - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\right) - \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\sqrt{2}\right)\right) \\
&= 2\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi
\end{aligned}$$

   On en déduit :

   $I = 2\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

Exercice 2 (une EDL1)

1. Déterminer une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto Arctan(x)$.

   La fonction arctan est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc une primitive. On obtient avec une IPP en posant $u'(t) = 1$, $v(t) = \arctan(t)$, c'est-à-dire : $u(t) = t$ et $v'(t) = \frac{1}{1+t^2}$:

$$\begin{aligned}
\int_.^x \arctan(t)dt &= [t\arctan(t)]_.^x - \int_.^x \frac{t}{1+t^2}dt \\
&= [t\arctan(t)]_.^x - \frac{1}{2}\int_.^x \frac{2t}{1+t^2}dt \\
&= [t\arctan(t)]_.^x - \frac{1}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_.^x
\end{aligned}$$

   On en déduit :

   La fonction $x \mapsto x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ est une primitive de arctan sur $\mathbb{R}$.

2. Résoudre sur l'intervalle $]0;+\infty[$, l'équation différentielle :

$$(E) : xy' + y = \arctan(x)$$

Résoudre (E) sur $]0;+\infty[$ est équivalent à résoudre (E') sur $]0;+\infty[$ où :

$$(E') : y' + \frac{1}{x}y = \frac{\arctan(x)}{x}$$

On commence par résoudre l'équation homogène (EH) où :

$$(EH) : y' + \frac{1}{x}y = 0$$

On sait que les solutions sont de la forme $x \mapsto ke^{-A(x)}$ où $k \in \mathbb{R}$ et A est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. On peut donc choisir $A(x) = \ln(x)$. Les solutions de l'équation homogène sont donc $x \mapsto \dfrac{k}{x}$, où $k \in \mathbb{R}$.
On cherche maintenant une solution particulière de (E'). On utilise la méthode de la variation de la constante : on cherche donc une solution particulière sous la forme $x \mapsto \frac{k(x)}{x}$. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\frac{k'(x)}{x} - \frac{k(x)}{x^2} + \frac{k(x)}{x} &= \frac{\arctan(x)}{x} \\
\frac{k'(x)}{x} &= \frac{\arctan(x)}{x} \\
k'(x) &= \arctan(x)
\end{aligned}$$

On peut donc choisir $k(x) = x\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$ et la fonction $x \mapsto \arctan(x) - \dfrac{1}{2x}\ln(1+x^2)$ est une solution particulière de (E') sur $]0;+\infty[$.

Les solutions de (E) sur $]0;+\infty[$ sont les fonctions $x \mapsto \arctan(x) - \dfrac{1}{2x}\ln(1+x^2) + \dfrac{k}{x}$, où $k \in \mathbb{R}$.

3. Calculer la limite éventuelle d'une solution de (E) sur $]0;+\infty[$ en 0^+.

   Soit f une solution de (E) sur $]0;+\infty[$. Alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \arctan(x) - \dfrac{1}{2x}\ln(1+x^2) + \dfrac{k}{x}$.
   On a les résultats suivants :

$$\lim_{x \to 0^+} \arctan(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2x}\ln(1+x^2) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2}x\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 0$$

   car $\lim_{u \to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$. On en déduit les trois cas suivants :

   Premier cas $k = 0$: Dans ce cas $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$.
   Deuxième cas $k > 0$: Dans ce cas $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.
   Troisième cas $k < 0$: Dans ce cas $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

4. L'équation (E) admet-elle une solution sur $\mathbb{R}$?

   Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, en particulier f est solution de (E) sur $]0;+\infty[$. Il existe donc $k_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \arctan(x) - \dfrac{1}{2x}\ln(1+x^2) + \dfrac{k_1}{x}$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.
   On a aussi : f solution de (E') sur $]-\infty;0[$. On montre que les solutions de (E') sur $]-\infty;0[$ s'écrivent de la même façon que les solutions sur $]0;+\infty[$. Il existe donc $k_2 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \arctan(x) - \dfrac{1}{2x}\ln(1+x^2) + \dfrac{k_2}{x}$ pour tout $x \in]-\infty;0[$.
   Une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ doit être continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après la question précédente $k_1 = k_2 = 0$.

Si f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, on a donc

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x) - \dfrac{1}{2x}\ln(1+x^2), \text{ si } x \neq 0 \\ 0, \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Il reste à vérifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On sait déjà qu'elle est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[$. Pour montrer que f est dérivable en 0, on étudie :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} - \frac{1}{2x^2}\ln(1+x^2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc f est bien dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$. On vérifie également que $0 \times f'(0) + f(0) = \arctan(0)$.

L'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x) - \dfrac{1}{2x}\ln(1+x^2), \text{ si } x \neq 0 \\ 0, \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 3 (une étude de fonction)

On définit la fonction f par $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right) - \arccos\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)$.

1. Donner en justifiant le domaine de définition D_f de f.

Les fonctions arcsin et arccos sont définies sur $[-1;1]$, donc $f(x)$ existe si $\frac{x}{2} \in [-1;1]$ et $\frac{x}{\sqrt{3}} \in [-1;1]$, c'est-à-dire $x \in [-2;2] \cap [-\sqrt{3};\sqrt{3}]$.

$D_f = \left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$

2. Montrer qu'il existe un réel a tel que la fonction f est dérivable sur au moins $D_f \backslash \{-a;a\}$. Calculer sa dérivée sur ce domaine. La fonction f est-elle dérivable en a et en $-a$?

Les fonctions arcsin et arccos sont dérivables sur $]-1;1[$, donc $f(x)$ est dérivable sur $]-\sqrt{3};\sqrt{3}[$ (c'est-à-dire $a = \sqrt{3}$). Pour tout $x \in]-\sqrt{3};\sqrt{3}[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} \end{aligned}$$

On peut calculer la limite de $f'(x)$ quand x tend vers $\sqrt{3}$ ou $-\sqrt{3}$:

$$\lim_{x\to\sqrt{3}} f'(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}} f'(x) = +\infty$$

On en déduit que f n'est pas dérivable en $\pm\sqrt{3}$.

f est dérivable sur $\left]-\sqrt{3};\sqrt{3}\right[$ et pour tout $x \in \left]-\sqrt{3};\sqrt{3}\right[$:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}$$

3. Donner les variations de f.

La dérivée de f est strictement positive sur $\left]-\sqrt{3};\sqrt{3}\right[$, donc

La fonction f est strictement croissante sur D_f.

On calcule $f(\sqrt{3}) = \arcsin(\sqrt{3}/2) - \arccos(1) = \dfrac{\pi}{3}$ et $f(-\sqrt{3}) = \arcsin(-\sqrt{3}/2) - \arccos(-1) = -\dfrac{\pi}{3} - \pi = \dfrac{-4\pi}{3}$.

x	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$
$f'(x)$		$+$	
f	$\frac{-4\pi}{3}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{3}$

4. Donner la relation entre $f(-x)$ et $f(x)$. Qu'en déduit-on sur la courbe représentative de f ?

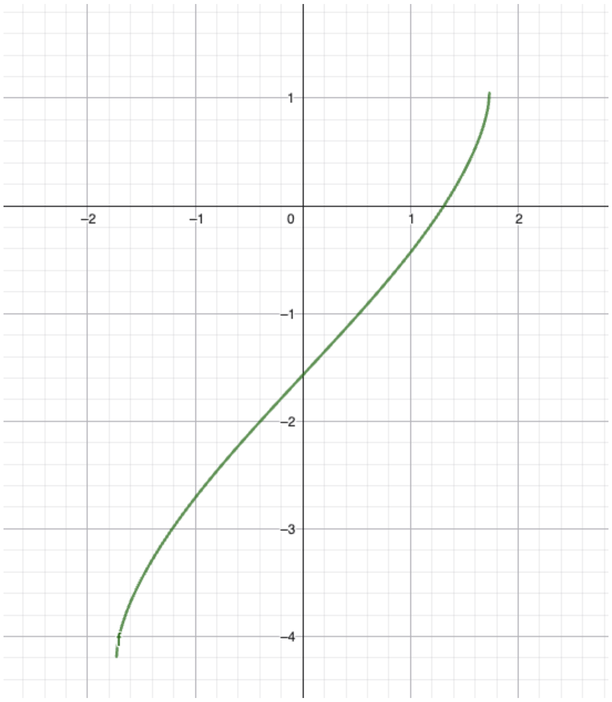
Pour tout $x \in \left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$, on a

$$\begin{aligned} f(-x) &= \arcsin\left(\frac{-x}{2}\right) - \arccos\left(\frac{-x}{\sqrt{3}}\right) \\ &= -\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \arccos\left(\frac{-x}{\sqrt{3}}\right), \text{ car la fonction arcsin est impaire} \\ &= -\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \left(\pi - \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right) \\ &= -\pi - f(x) \end{aligned}$$

En remarquant que $f(0) = -\dfrac{\pi}{2}$, on en déduit que la courbe de la fonction f est symétrique par rapport au point $(0, -\pi/2)$.

Pour tout $x \in \left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$, $f(-x) = -\pi - f(x)$.

5. Tracer la courbe de la fonction f.



6. Montrer que f est bijective de D_f sur un domaine J à déterminer.

   La fonction f est strictement croissante de $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ sur $\left[-\dfrac{4\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right]$. Elle induit donc une bijection de $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ sur $\left[-\dfrac{4\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right]$.

7. Déterminer l'image de 0 par la bijection réciproque de f et le nombre dérivé en 0 de la bijection réciproque.

   On note $x = f^{-1}(0)$, cela revient à trouver $x \in [-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ tel que $f(x) = 0$, c'est-à-dire :

$$\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\sin(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)) = \sin(\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right))$$

$$\frac{x}{2} = \sqrt{1-\frac{x^2}{3}}$$

$$\frac{x^2}{4} = 1-\frac{x^2}{3}$$

$$\frac{7x^2}{12} = 1$$

$$x = \sqrt{\frac{12}{7}}$$

   On sait que $x > 0$ car $\arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right) = \arccos\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right) \in [0;\pi/2]$.

$$\boxed{f^{-1}(0) = \sqrt{\frac{12}{7}}}$$

Comme $f'(f^{-1}(0)) \neq 0$, on en déduit que f^{-1} est dérivable en 0 et $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(0)}$:

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{\frac{12}{7}}^2}} + \frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{\frac{12}{7}}^2}}}$$

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{4-\frac{12}{7}}} + \frac{1}{\sqrt{3-\frac{12}{7}}}}$$

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\frac{16}{7}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{7}}}}$$

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{\sqrt{7}}{3}}$$

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{\frac{7\sqrt{7}}{12}}$$

$$(f^{-1})'(0) = \frac{12}{7\sqrt{7}}$$

$$(f^{-1})'(0) = \frac{12\sqrt{7}}{49}$$

Exercice 4 (une suite d'intégrales)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^e \frac{(\ln(x))^n}{x^2} dx$

1. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $g : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a; b]$ telle que $g(x) \leqslant M$ pour tout $x \in [a; b]$, $M \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b g(x)dx \leqslant M(b-a)$.

   Comme $g(x) \leqslant M$ pour tout $x \in [a; b]$, on a d'après le théorème de comparaisons des intégrales :

$$\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b M dx = [Mx]_a^b = M(b-a)$$

2. Justifier l'existence de I_n. Calculer I_0.

   La fonction $x \mapsto \frac{(\ln(x))^n}{x^2}$ est continue sur $[1; e]$ car composée de fonctions continues et x ne s'annule pas, donc I_n est bien définie.
   On calcule :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_1^e \frac{1}{x^2} dx \\ &= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e = -\frac{1}{e} + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{I_0 = 1 - \frac{1}{e}}$$

3. A l'aide d'un changement de variable, montrer que $I_1 = \displaystyle\int_0^1 te^{-t}dt$. En déduire la valeur de I_1. On fait le changement de variable $t = \ln(x)$, c'est-à-dire $x = e^t$ et $dx = e^t dt$. On obtient :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}dx \\ &= \int_0^1 \frac{t}{e^{2t}}e^t dt = \int_0^1 te^{-t}tdt \end{aligned}$$

On fait maintenant une IPP avec $u' = e^{-t}$ et $v = t$ donc $u = -e^{-t}$ et $v' = 1$:

$$\begin{aligned} I_1 &= [-te^{-t}]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-t})dt \\ &= -e^{-1} + [-e^{-t}]_0^1 \\ &= -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - 2\frac{1}{e} \end{aligned}$$

$$\boxed{I_1 = 1 - 2\frac{1}{e}}$$

4. A l'aide d'une intégration par partie, trouver une expression de I_{n+1} en fonction de I_n. En déduire I_2 et I_3.
On fait une IPP dans I_{n+1} en posant $u' = 1/x^2$ et $v = \ln(x)^{n+1}$, c'est-à-dire $u = -1/x$ et $v' = (n+1)\ln(x)^n$. On obtient :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^e \frac{\ln(x)^{n+1}}{x^2}dx \\ &= \left[-\frac{1}{x}\ln(x)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x}(n+1)\frac{1}{x}\ln(x)^n dx \\ &= -\frac{1}{e} + (n+1)\int_1^e \frac{\ln(x)^{n+1}}{x^2}dx \\ &= -\frac{1}{e} + (n+1)I_n \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\boxed{I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n}$$

On peut donc calculer $I_1 = -\frac{1}{e} + I_0 = -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{2}{e}$ et $I_2 = -\frac{1}{e} + 2I_1 = -\frac{1}{e} + 2 - \frac{4}{e} = 2 - \frac{5}{e}$ et $I_3 = -\frac{1}{e} + 3I_2 = -\frac{1}{e} + 6 - 15\dfrac{1}{e} = 6 - \frac{16}{e}$

$$\boxed{I_1 = 1 - \frac{2}{e}, \quad I_2 = 2 - \frac{5}{e}; \quad I_3 = 6 - \frac{16}{e}}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $x \in [1; e]$, $0 \leqslant \dfrac{(\ln(x))^n}{x^2} \leqslant 1$.
Soit x tel que $1 \leqslant x \leqslant e$, la fonction ln étant croissante on a : $0 \leqslant \ln(x)^{n+1} \leqslant 1$ de plus $x \geqslant 1$ donc $\frac{1}{x^2} \leqslant 1$. On en déduit que $0 \leqslant \frac{\ln(x)^{n+1}}{x^2} \leqslant 1$.
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant I_n \leqslant 2$.
On utilise le résultat de la question 1 pour obtenir :

$$\int_1^e \frac{\ln(x)^{n+1}}{x^2}dx \leqslant 1 \times (e-1) \leqslant 2$$

7. En s'inspirant de la question 3, montrer que $I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la limite de la suite I_n ?

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fait le changement de variable $t = \ln(x)$, c'est-à-dire $x = e^t$ et $dx = e^t dt$. On obtient :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^e \frac{\ln(x)^n}{x^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{t^n}{e^{2t}} e^t dt = \int_0^1 t^n e^{-t} t dt \end{aligned}$$

Comme $e^{-t} \leqslant 1$ pour tout $t \in [0;1]$ et donc $t^n e^{-t} \leqslant t^n$, on en déduit :

$$I_n \leqslant \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1}\right]_0^1 \frac{1}{n+1}$$

> Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
> $$I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

8. On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1}{n!} I_n = 1 - \dfrac{1}{e} S_n$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété H_n : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n!} I_n = 1 - \dfrac{1}{e} S_n$ est vraie.

Initialisation : On a $\frac{1}{1!} I_1 = 1 - \frac{2}{e}$ et $S_1 = 1 + 1 = 2$. La proptiété est donc vraie pour $n = 1$.

Propagation : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que H_n est vraie. On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)!} I_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!} \left(-\frac{1}{e} + (n+1) I_n\right) \\ &= -\frac{1}{e} \frac{1}{(n+1)!} + (n+1) \frac{1}{(n+1)!} I_n \\ &= -\frac{1}{e} \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!} I_n \text{ on utilise l'hypothèse de récurrence} \\ &= -\frac{1}{e} \frac{1}{(n+1)!} + 1 - \frac{1}{e} S_n \\ &= 1 - \frac{1}{e} \left(\frac{1}{(n+1)!} + S_n\right) \\ &= 1 - \frac{1}{e} S_{n+1} \end{aligned}$$

On a montré que si H_n est vraie alors H_{n+1} est vraie.
On en déduit que H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

9. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = e$.

Comme $0 \leqslant I_n \leqslant 2$, on a $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} I_n = 0$. On en déduit $\lim_{n \to +\infty} (1 - \frac{1}{e} S_n) = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = e$.

Exercice 5 (une EDL2)

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) suivante :

$$(E) : y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$$

On pourra chercher une solution particulière de (E) sous la forme $(a_2 x^2 + a_1 x + a_0) e^{-x}$.

Résolution de l'EH : On écrit l'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$ pour laquelle $\Delta = 0$, il n'y a donc qu'une seule solution $r_0 = -1$. Les solutions de (EH) sont donc les fonctions :

$$x \mapsto (Ux + V) e^{-x}, \text{ où } U \text{ et } V \text{ sont des réels}$$

Recherche d'une solution particulière : On cherche une solution f_0 sous la forme : $f_0(x) = (a_2x^2 + a_1x + a_0)e^{-x}$. On obtient :

$$f_0'(x) = (2a_2x + a_1 - a_2x^2 - a_1x - a_0)e^{-x}$$
$$f_0''(x) = (2a_2 - 2a_2x - a_1 - 2a_2x - a_1 + a_2x^2 + a_1x + a_0)e^{-x}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} f_0''(x) + 2f_0'(x) + f_0(x) &= (2a_2 - 2a_2x - a_1 - 2a_2x - a_1 + a_2x^2 + a_1x + a_0 + 4a_2x \\ &\quad +2a_1 - 2a_2x^2 - 2a_1x - 2a_0 + a_2x^2 + a_1x + a_0)e^{-x} \\ &= 2a_2e^{-x} \end{aligned}$$

On en déduit que $f_0 : x \mapsto x^2e^{-x}$ est une solution particulière de (E).

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions :

$$x \mapsto x^2e^{-x} + (Ux + V)e^{-x},\ \text{où } U \text{ et } V \text{ sont des constantes}$$

2. On souhaite maintenant résoudre l'équation différentielle suivante sur $]0; +\infty[$:

$$(E_2) : xy'' + 2(x + 1)y' + (x + 2)y = 2e^{-x}$$

Résoudre (E_2) sur $]0; +\infty[$, en définissant la fonction z sur $]0; +\infty[$ par $z = xy$.

On définit $z = xy$, on obtient alors sur $]0; +\infty[$sur $y = \dfrac{z}{x}$ et $y' = \dfrac{z'}{x} - \dfrac{z}{x^2}$ et $y'' = \dfrac{z''}{x} - 2\dfrac{z'}{x^2} + 2\dfrac{z}{x^3}$.
Alors y est une solution de (E_2) sur $]0; +\infty[$ si et seulement si $xy'' + 2(x + 1)y' + (x + 2)y = 2e^{-x}$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} xy'' + 2(x + 1)y' + (x + 2)y &= z'' - 2\frac{z'}{x} + 2\frac{z}{x^2} + 2(x + 1)\frac{z'}{x} - 2(x + 1)\frac{z}{x^2} + (x + 2)\frac{z}{x} \\ &= z'' + 2z' + z = 2e^{-x} \end{aligned}$$

On en déduit que z est une solution de (E) sur $]0; +\infty[$, donc il existe U et V constantes réelles telles que :

$$z(x) = x^2e^{-x} + (Ux + V)e^{-x}$$

On en déduit que les solutions de (E_2) sur $]0; +\infty[$ sont les fonctions :

$$x \mapsto xe^{-x} + (U + \frac{V}{x})e^{-x},\ \text{où } U \text{ et } V \text{ sont des constantes}$$

3. L'équation (E_2) admet-elle une solution sur $\mathbb{R}$?
Si y est une solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$ alors d'après la question précédente, il existe U_1 et V_1 tels que

$$y(x) = xe^{-x} + (U_1 + \frac{V_1}{x})e^{-x};\ \text{si } x \in]0; +\infty[$$

On montre de même qu'il existe U_2 et V_2 tels que

$$y(x) = xe^{-x} + (U_2 + \frac{V_2}{x})e^{-x};\ \text{si } x \in] - \infty; 0[$$

Si y est une solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$, alors y est continue sur $\mathbb{R}$. En particulier, on doit avoir $\lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^-} y(x)$. On remarque que si $V_1 > 0$ alors $\lim_{x\to 0^+} y(x) = +\infty$ et si $V_1 < 0$ alors $\lim_{x\to 0^+} y(x) = -\infty$. On en déduit que pour que y soit solution il faut que $V_1 = 0$. De même, on doit avoir $V_2 = 0$. On a dans ce cas :

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = U_1;\ \lim_{x\to 0^-} y(x) = U_2$$

On doit donc avoir $U_1 = U_2$ pour que y soit continue en 0. On étudie donc les fonctions suivantes avec $U \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = xe^{-x} + Ue^{-x}$$

Ces fonctions sont continues, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (1 - x - U)e^{-x}$ et f est solution de $(E2)$ sur $]0; +\infty[$ et sur $] - \infty; 0[$. Pour que f soit solution de $(E2)$ sur $\mathbb{R}$, il reste à vérifier que $2f'(0) + 2f(0) = 2$, c'est-à-dire $2(1 - U) + 2U = 2$, ce qui est bien vérifié pour tout $U \in \mathbb{R}$.
On en déduit :

> Les solutions de (E_2) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions :
>
> $$x \mapsto xe^{-x} + Ue^{-x}, \text{ où } U \text{ est une constante réelle}$$

Exercice 6 (une relation entre les fonctions arcsin et arctan)

1. Etudier la fonction $u : x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ (domaine de définition, dérivabilité, variations, limites).

   La fonction u est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. On calcule la dérivée de u. Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, on a :

   $$u'(x) = \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}$$

   On en déduit que $u'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, donc la fonction u est décroissante.
   On étudie maintenant les limites en -1^+, -1^-, $+\infty$ et $-\infty$. On obtient :

   $$\lim_{x \to -1^+} u(x) = +\infty$$

   $$\lim_{x \to -1^-} u(x) = -\infty$$

   $$\lim_{x \to +\infty} u(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1} = -1$$

   $$\lim_{x \to -\infty} u(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1} = -1$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
f	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-1

2. Montrer que pour tout $x \in [0; +\infty[$ on a : $\cos(2\arctan(\sqrt{x})) = \dfrac{1-x}{1+x}$.

   Pour tout $x \in [0; +\infty[$ on a

   $$\begin{aligned} \cos(2\arctan(\sqrt{x})) &= 2\cos^2(\arctan(\sqrt{x})) - 1 \\ &= 2\frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(\sqrt{x}))} - 1 \\ &= 2\frac{1}{1+x} - 1 \\ &= \frac{1-x}{1+x} \end{aligned}$$

3. En déduire

$$\forall x \in [0;+\infty[, \quad \arcsin\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + 2\arctan\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Pour tout $x \in [0;+\infty[$ on a

$$\begin{aligned}
\arcsin\left(\frac{1-x}{1+x}\right) &= \arcsin\left(\cos(2\arctan(\sqrt{x}))\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\cos(2\arctan(\sqrt{x}))\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - 2\arctan(\sqrt{x}), \text{ car } 2\arctan(\sqrt{x}) \in [0;\pi]
\end{aligned}$$