

Programme de colle 13

Chap 9 : Dérivées d'ordres supérieurs. Comparaison des fonctions. Développements limités.

II Comparaisons entre fonctions .

- Définitions d'une fonction négligeable devant une autre au voisinage de a , d'une fonction équivalente à une autre au voisinage de a , d'une fonction dominée par une autre au voisinage de a . Notations .
- $o_0(1)$: Définition . Ecriture : $o_0(g) = g \times o_0(1)$
- Caractérisation par le quotient
- Exemples déjà rencontrés : comparaison des fonctions puissances entre elles au voisinage de 0 et de $+\infty$. Comparaison des fonctions $(x \mapsto (x - a)^k)$ tel que $k \in \mathbb{Z}$ au voisinage de a .
Équivalent d'une fonction polynomiale au voisinage de $+\infty$ puis de 0 .
Croissances comparées .
Équivalents usuels obtenus par taux d'accroissement ou d'autres limites usuelles.
- Caractérisation et propriétés sur les équivalents : passage d'une équivalence à une égalité , signe et limite communs à deux fonctions équivalentes , équivalent simple d'une fonction ayant une limite finie non nulle .
- Relation entre fonction négligeable , fonction équivalente et fonction dominée . Théorème de comparaison .
- Opérations sur les fonctions négligeables : somme , multiplication par un scalaire , $o_0(fg)$.
- Opérations sur les fonctions équivalentes : produit , quotient , puissance constante , composition à droite .
- Opérations interdites sur les fonctions équivalentes : somme , composée à gauche et puissance non constante .
- Changement de variable pour se ramener au calcul d'une limite ou la recherche d'un équivalent en 0

III Développements limités .

- Définition d'un développement limité en un réel et particulière en 0. Unicité de ce DL.
- Développements limités usuels :
 - ✓ Développement limité en 0 de $\frac{1}{1-x}$ puis $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1+x^2}$.
 - ✓ Théorème de Taylor-Young et développement limité en 0 de e^x , $\cos(x)$, $\sin(x)$, $sh(x)$, $ch(x)$, $(1+x)^\alpha$.
 - ✓ Théorème d'intégration terme à terme et développement limité en 0 de $\ln(1+x)$, $Arctan(x)$, $\tan(x)$ et $Arcsin(x)$
ordre 5 uniquement
- Propriétés des DL :
 - ✓ Changement de variable pour se ramener à un DL en 0.
 - ✓ Troncature
 - ✓ Développement limité en 0 d'une fonction paire ou impaire
- Opérations sur les DL :
 - ✓ Somme et produit
 - ✓ Composition
 - ✓ Inverse et quotient
- Applications :
 - ✓ Recherche de limite et d'équivalent
 - ✓ Dérivabilité d'une fonction en un point et position de la courbe par rapport à son asymptote
 - ✓ Recherche d'asymptote et position de la courbe par rapport à son asymptote
 - ✓ Recherche de DL d'une fonction dont l'expression est intégrale.
 - ✓ Recherche de DL d'une bijection réciproque.

Questions de cours : CONNAITRE ET SAVOIR ENONCER TOUTES LES DEFINITIONS, PROPRIETES ET THEOREMES DU COURS. Savoir énoncer et démontrer les résultats suivants :

- $o_a(g) = g \times \dots$
- $f \sim_a g \Leftrightarrow f = g + \dots$
- Si $f \sim_a g$ alors f et g ont en commun..... au voisinage de a et leur en a si elle existe.
- Si $f(t) \sim_a g(t)$ et $\lim_{x \rightarrow b} u(x) = a$ alors
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ tel que L alors $f(x) \sim_a \dots$.

- 1) Obtention du $DL_{2n}(0)$ de $\cos(x)$ et du $DL_{2n+1}(0)$ de $\sin(x)$.
- 2) Obtention du $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1-x}$.
- 3) Obtention du $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1+x}$ puis de $\ln(1+x)$.
- 4) Obtention du $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1+x^2}$ puis de $Arctan(x)$.
- 5) Obtention du $DL_3(0)$ de $\tan(x)$.