

# Programme de colle 14

## Chap 9 Développements limités.

### III Développements limités.

- Définition d'un développement limité en un réel et en particulier en 0. **Unicité** de ce DL.

Si au voisinage de  $x_0$ ,  $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$  alors  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $a_k = b_k$ .

- Propriétés des DL :

- ✓ Équivalent

Si au voisinage de  $x_0$ ,  $f(x) = a_p(x - x_0)^p + \dots + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$  avec  $p \leq n$  et  $a_p \neq 0$  alors  $f(x) \sim_{x_0} a_p(x - x_0)^p$ .

- ✓ « se ramener en 0 »

Soit  $f$  définie au voisinage du réel  $x_0$ . Posons  $g(t) = f(x_0 + t)$  i.e.  $f(x) = g(x - x_0)$ . Alors,

$$g \text{ admet le } DL_n(0) \text{ suivant } g(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_n t^n + o_0(t^n)$$

$$\Leftrightarrow f \text{ admet le } DL_n(x_0) \text{ suivant : } f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$$

- ✓ Troncature

Si  $f$  admet le  $DL_n(x_0)$  suivant:  $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$

alors  $f$  admet le  $DL_{n-1}(x_0)$  suivant:  $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + o_{x_0}((x - x_0)^{n-1})$

- ✓ Développement limité en 0 d'une fonction paire ou impaire

Si  $f$  est paire et admet un  $DL_n(0)$  alors ce  $DL_n(0)$  est de la forme  $f(t) = a_0 + a_2t^2 + a_4t^4 \dots + \begin{cases} a_n t^n + o_0(t^n) & \text{si } n \text{ pair} \\ a_{n-1} t^{n-1} + o_0(t^n) & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

Si  $f$  est impaire et admet un  $DL_n(0)$  alors ce  $DL_n(0)$  est de la forme  $f(t) = a_1t + a_3t^3 \dots + \begin{cases} a_n t^n + o_0(t^n) & \text{si } n \text{ impair} \\ a_{n-1} t^{n-1} + o_0(t^n) & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$

- Développements limités usuels :

- ✓ Développement limité en 0 de  $\frac{1}{1-x}$  obtenu par somme géométrique puis de  $\frac{1}{1+x}$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n o_0(1) = \sum_{k=0}^n x^k + o_0(x^n).$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + x^n o_0(1) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o_0(x^n).$$

- ✓ **Théorème de Taylor-Young** et développement limité en 0 de  $e^x, \cos(x), \sin(x), \operatorname{sh}(x), \operatorname{ch}(x), (1+x)^\alpha$ .

Si  $f$  est de classe  $C^n$  un voisinage de  $x_0$  contenant  $x_0$  alors  $f$  admet le  $DL_n(x_0)$ :  $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}_{Q_n(x - x_0)} + \underbrace{o_{x_0}((x - x_0)^n)}_{\text{reste}}$ .

Si  $f$  est de classe  $C^n$  sur un voisinage de 0 contenant 0 alors  $f$  admet le  $DL_n(0)$ :  $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{P_n(x)} + \underbrace{o_0(x^n)}_{\text{reste}}$ .

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n o_0(1) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o_0(x^n).$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} o_0(1) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^{2n+2}).$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} o_0(1) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^{2n+1}).$$

$$\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} o_0(1) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^{2n+2}).$$

$$\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} o_0(1) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^{2n+1}).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n o_0(1).$$

- ✓ **Théorème d'intégration terme à terme** et développement limité en 0 de  $\ln(1+x)$ ,  $\operatorname{Arctan}(x)$ ,  $\operatorname{tan}(x)$  et  $\operatorname{Arcsin}(x)$ . ordre 5 uniquement

• Si  $f$  est dérivable sur un voisinage de 0 contenant 0 et  $f'$  admet le  $DL_n(0)$  suivant:  $f'(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o_0(x^n)$

alors  $f$  admet le  $DL_{n+1}(0)$  suivant:  $f(x) = f(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o_0(x^{n+1})$ .

• Si  $f$  est dérivable sur un voisinage de  $x_0$  contenant  $x_0$  et  $f'$  admet le  $DL_n(x_0)$  suivant:

$$f'(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$$

alors  $f$  admet le  $DL_{n+1}(x_0)$  suivant:  $f(x) = f(x_0) + a_0(x - x_0) + a_1 \frac{(x - x_0)^2}{2} + \dots + a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} + o_{x_0}((x - x_0)^{n+1})$ .

$$\operatorname{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o_0(x^{2n+1}) .$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + o_0(x^{n+1}).$$

$$\operatorname{Arcsin}(x) = x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{40} x^5 + x^5 o_0(1).$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5 o_0(1).$$

- **Opérations sur les DL**: Combinaison linéaire et produit. Composition. Inverse et quotient.

Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux constantes réelles. Si  $f$  et  $g$  admettent les  $DL_n(0)$  suivants:  $f(x) = P(x) + o_0(x^n)$  et  $g(x) = Q(x) + o_0(x^n)$

alors  $\alpha f + \beta g$  et  $fg$  admettent chacune un  $DL_n(0)$  et

$$\alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha P(x) + \beta Q(x) + o_0(x^n).$$

$$f(x) \times g(x) = [\text{somme des termes de degré inférieur ou égal à } n \text{ de } P(x) \times Q(x)] + o_0(x^n).$$

Si  $f$  admet le  $DL_n(0)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 0$  alors  $\frac{1}{f}$  admet un  $DL_n(0)$ .

Si  $f$  et  $g$  admettent des  $DL_n(0)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 0$  alors  $\frac{g}{f}$  admet un  $DL_n(0)$ .

Si  $f$  admet le  $DL_n(0)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  et  $g$  admet un  $DL_n(0)$  alors  $g \circ f$  admet le  $DL_n(0)$ .

### • Applications :

- ✓ Recherche de limite et d'équivalent
- ✓ Caractérisation de la dérivabilité d'une fonction en un point  $a$  par son  $DL_1(a)$  et position de la courbe par rapport à son asymptote

• Si  $f$  est définie en  $x_0$  et au voisinage de  $x_0$  alors

$f$  admet le  $DL_1(x_0)$   $f(x) = A + B(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0) \Leftrightarrow f$  est dérivable en  $x_0$ ,  $f(x_0) = A$  et  $f'(x_0) = B$ .

• Si  $f$  est définie au voisinage de  $x_0$  mais pas en  $x_0$  alors

$f$  admet le  $DL_1(x_0)$   $f(x) = A + B(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0) \Leftrightarrow f$  est prolongeable par continuité en  $x_0$  par la valeur  $A$  et son prolongement  $\tilde{f}$  est dérivable en  $x_0$ ,  $\tilde{f}'(x_0) = A$  et  $\tilde{f}'(x_0) = B$ .

- ✓ Recherche d'asymptote et position de la courbe par rapport à son asymptote
- ✓ Recherche de  $DL$  d'une fonction dont l'expression est définie par une intégrale.
- ✓ Recherche de  $DL$  d'une bijection réciproque.

## Chap 10 Suites réelles et suites complexes.

### I Définitions

- suite réelle, suite complexe, représentation
- suite bornée
- suite réelle majorée, minorée, croissante, décroissante
- suite ayant une limite finie :

Une suite réelle  $(u_n)$  tend vers le réel  $L$  lorsque :  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - L| \leq \varepsilon)$

- suite réelle ayant une limite infinie :

Une suite réelle  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  lorsque :  $\forall A \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_A \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_A \Rightarrow u_n \geq A)$ .

Une suite réelle  $(u_n)$  tend vers  $-\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  lorsque :  $\forall B \in \mathbb{R}^{-*}, \exists n_B \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_B \Rightarrow u_n \leq B)$ .

- suite convergente, suite divergente.

### II Propriétés fondamentales des suites

- Caractère borné ou pas :

Toute suite convergente est bornée.

Si  $(u_n)$  est une suite réelle de limite finie  $L$  et  $a$  et  $b$  sont deux réels tels que :  $a < L < b$  alors à partir d'un certain rang,  $a \leq u_n \leq b$ . En particulier, toute suite ayant une limite strictement positive est strictement positive à partir d'un certain rang.

Toute suite réelle ayant une limite infinie n'est pas bornée...

- Théorème Unicité de la limite.

Une suite  $(u_n)$  ne peut avoir qu'une seule limite quand  $n \rightarrow +\infty$ . On note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  cette limite lorsqu'elle existe.

- Caractérisation d'une suite convergente : Soit une suite  $(u_n)$  réelle (resp. complexe) et  $L$  un réel (resp. complexe)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - L = \dots \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - L| = \dots \Leftrightarrow |u_n - L| \leq \varepsilon_n$  tel que  $\lim_n \varepsilon_n = 0$ .

- Théorème des gendarmes ou de limite par encadrement :

Soit  $u, v$  et  $w$  des suites réelles.

Si à partir d'un certain rang,  $u_n \leq v_n \leq w_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L \in \mathbb{R}$  alors  $(v_n)$  converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L$ .

Si à partir d'un certain rang,  $u_n \leq v_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

Si à partir d'un certain rang,  $v_n \leq w_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ .

### III Densité.

- Définition :

Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $\mathbb{R}$  telles que  $A \subset B$ .  $A$  est dense dans  $B$  lorsqu'entre deux éléments quelconques et distincts de  $B$  se trouve au moins un élément de  $A$ .

- Caractérisation séquentielle :

Soient  $B$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $A$  une partie de  $B$ .  $A$  est dense dans  $B$  si et si tout élément de  $B$  est la limite d'une suite d'éléments de  $A$ .

- Densité de  $\mathbb{Q}$  et de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ .

## IV Borne sup. ou inf.

- Définition et théorème d'existence :

L'ensemble des majorants d'une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  non vide et majorée admet un plus petit élément appelé borne supérieure de  $A$  et noté  $\sup(A)$  ;  $\sup(A)$  est donc le plus petit majorant de  $A$ .

L'ensemble des minorants d'une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  non vide et minorée admet un plus grand élément appelé borne inférieure de  $A$  et noté  $\inf(A)$  ;  $\inf(A)$  est donc le plus grand minorant de  $A$ .

Lorsque  $A$  n'est pas majorée,  $\sup(A) = +\infty$ . Lorsque  $A$  n'est pas minorée,  $\sup(A) = -\infty$ .

- Relation entre plus petit (resp. grand) élément et borne inférieure (resp. supérieure). Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ .

Si il existe un élément  $m$  de  $A$  qui minore  $A$  alors  $m = \inf(A)$ .

Si il existe un élément  $m'$  de  $A$  qui majore  $A$  alors  $m' = \max(A) = \sup(A)$ .

Si  $A$  admet une borne inf  $M'$  et  $M' \notin A$  alors  $A$  n'admet pas de minimum.

Si  $A$  admet une borne sup  $M$  et  $M \notin A$  alors  $A$  n'admet pas de maximum.

- Caractérisation par les epsilon d'une borne sup. ou inf. finie.

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$  non vide et majorée et  $m$  un réel. Alors,  $m = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, a \leq m \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists a_\varepsilon \in A / m - \varepsilon < a_\varepsilon \end{cases}$

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$  non vide et minorée et  $m$  un réel. Alors,  $m = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, a \geq m \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists a_\varepsilon \in A / m + \varepsilon > a_\varepsilon \end{cases}$

- Caractérisation séquentielle d'une borne sup. ou inf. (même infinie).

Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$  et  $m$  un réel ou un infini.

$m = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, a \geq m \\ \text{il existe une suite } (a_n) \text{ d'éléments } A \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = m. \end{cases}$

$m = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, a \leq m \\ \text{il existe une suite } (a_n) \text{ d'éléments } A \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = m. \end{cases}$

## V Autres propriétés fondamentales des suites :

- Théorème d'opérations sur les limites
- Limite d'une suite monotone

Toute suite monotone a un limite (finie ou infinie).

Une suite croissante (resp. décroissante) admet une limite finie si et si cette suite est majorée (resp. minorée).

- Passage à la limite dans une inégalité

Si  $u$  et  $v$  sont deux suites réelles telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  existent et à partir d'un certain rang,  $u_n \leq v_n$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

## CONNAITRE ET SAVOIR ENONCER TOUS LES DEFINITIONS, PROPRIETES ET THEOREMES DU COURS.

### Savoir énoncer et démontrer les résultats suivants :

1. Théorème d'unicité d'un DL. Application au  $DL(0)$  d'une fonction impaire.
2. Caractérisation d'une fonction dérivable en  $a$  par son  $DL_1(a)$ .
3. Si  $u$  tend vers les réels  $L_1$  et  $L_2$  alors  $L_1 = L_2$ .
4. Toute suite convergente est bornée.
5. Soit  $(u_n)$  suite réelle et  $a, b$  et  $L$  des réels. si  $a < L < b$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$  alors  $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, u_n \in [a, b]$ .
6. la caractérisation séquentielle d'une borne supérieure
7. le produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle est une suite de limite nulle.
8. Si  $u$  et  $v$  convergent vers respectivement  $L_1$  et  $L_2$  alors  $u + v$  converge vers  $L_1 + L_2$ .
9. Si  $u$  tend vers  $0^+$  alors  $\frac{1}{u}$  converge vers  $+\infty$ .
10. Une suite réelle croissante a une limite.

