TD 10 Suites

Généralités sur les suites

Ex 0 Soit $L\ et\ L'$ réels ou infinis.

1. **Compléter par un lien logique le plus précis possible :**

a.	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ …… $\lim\limits_{n\to+\infty} \lvert u_n\rvert = \lvert L\rvert$.
b.	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ …… $\lim\limits_{n\to+\infty} \lvert u_n\rvert = 0$.
c.	Ici L réel. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ …… $\lim\limits_{n\to+\infty} \lvert u_n - L\rvert = 0$.
d.	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ …… $\lim\limits_{n\to+\infty} {u_n}^2 = L^2$.

e.	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ …… $\lim\limits_{n\to+\infty} {u_n}^3 = L^3$.
f.	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{3n^2+1} = L$ …… $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.
g.	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = L\ et \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = L$ …… $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$

2. **VRAI ou FAUX :**

a.	Une suite positive de limite nulle est décroissante à partir d'un certain rang.	b.	Une suite réelle croissante a toujours une limite.
c.	Deux suites bornées u et v telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$ convergent vers la même limite.	d.	Si $(\lvert u_n\rvert)$ converge alors u converge.
e.	Si u et v sont deux suites convergentes de limites respectives L et L' telles que : $L < L'$ alors à partir d'un certain rang, $u_n < v_n$.	f.	Si u et v sont deux suites de limites respectives L et L' alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = L + L'$.
g.	Si u et v sont deux suites telles que à partir d'un certain rang $u_n < v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.	h.	Si u et v sont deux suites admettant des limites et telles que à partir d'un certain rang $u_n < v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
i.	Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $u_n \sim v_n$ alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.	j.	Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $u_n \sim v_n$ alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.
k.	Si $u_n \sim v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.	l.	Si $u_n \sim v_n$ alors $1 + u_n \sim 1 + v_n$.
m.	Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $u_n \sim v_n$ alors $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.	n.	Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $u_n \sim v_n$ alors $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.
o.	Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $u_n \sim v_n$ alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$	p.	Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $u_n \sim v_n$ alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$
h.	Si $(\sum_{k=0}^{n} u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente alors (u_n) ne tend pas vers 0.	i.	Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots . + u_{2n} = 0$
j.	Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty\ et \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.	q.	Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} {u_n}^n = 1$.
r.	Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{L}$ alors $u_n \sim_{+\infty} u_{n+1}$.	s.	Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{L}$ et $L \in \mathbb{R}^*$ alors $u_n \sim_{+\infty} u_{n+1}$.

3. **Pour réfléchir :**

a.	Trouver une suite convergente non monotone.	b.	Trouver une suite bornée non convergente.
c.	Trouver deux suites équivalentes dont la différence tend vers $+\infty$.	d.	Existe-t-il une suite convergente et non bornée ?
e.	Trouver une suite u décroissante minorée par 0 et de limite 2.	f.	Trouver une suite u telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 3\ \ et\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -4$.
g.	Trouver une suite u divergente telle que : $(u_{2n})\ et\ (u_{2n+1})$ convergent.	h.	Trouver une suite u convergente telle que : $(u_n)\ et\ (u_{n+1})$ ne sont pas équivalentes.
i.	Existe-t-il une suite u telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1\ \ et\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = -1$?	j.	Trouver une suite u telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0\ \ et\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = +\infty$.
k.	Trouver une suite u telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0\ \ et\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k \in \mathbb{R}$.	l.	Trouver deux suites u et v telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ et mais v n'a pas de limite.
m.	Compléter alors cette affirmation pour la rendre correcte : ($\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$) $\Rightarrow$ ($\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$)	n.	Trouver une suite donnant la $FI\ 1^{+\infty}$ quand $n \to +\infty$ et dont la limite (après calcul) est 3.

Définition de la limite d'une suite :

Ex 1 Soit u une suite réelle telle que : $\forall (k,n) \in {\mathbb{N}^*}^2$, $0 \leq u_n \leq \frac{k}{n} + \frac{1}{k}$. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Ex 2 Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx = 0$.

Ex 3 Autour de Césaro

A) **Césaro revisité :** Soit u une suite réelle , L un réel et v la suite définie par $v_n = \frac{1}{2^n}(\sum_{k=0}^{n-1} 2^k u_k)$.

Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ **.** En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$.

B) **Une jolie application de Césaro** :Soit u une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = L \in \mathbb{R}^*$. Démontrer que $u_n \sim_{+\infty} Ln$**.**

Propriétés : caractère borné, opérations sur les limites, monotonie, encadrement, convergence :

Ex 4 Soit u une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ et v la suite réelle définie par : $\begin{cases} u_0 = v_0 \\ \forall n \geq 1, v_n = \frac{v_{n-1} + u_n}{1 + u_n v_{n-1}} \end{cases}$.

1. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n$ existe et $0 < v_n < 1$.
2. Justifier que v est convergente .
3. Déterminer la limite de v.

Ex 5 Soit u et v deux suites réelles telles que ${u_n}^2 + u_n v_n + {v_n}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Déterminer un réel a tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^2 \leq a(u_n^2 + u_n v_n + v_n^2)$. En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Ex 6 Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que si les suites $({u_n}^2)\ et\ ({u_n}^3)$ convergent alors la suite (u_n) converge.

Ex 7 Soit u une suite réelle ou cpxe. Montrer que : $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et que la réciproque est fausse.

Que peut-on en déduire sur les suites $\left(\sum_{k=0}^{n} \sin(k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$? et sur : $\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}\right)_{n\geq 2}$?

Ex 8 Des suites définies par des sommes

1)$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que u converge.

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$. Montrer l'existence puis la valeur de la limite de u.

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+n^2}$. Montrer que $u_n = O_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.

4) On pose $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$. Déterminer la limite de u.

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2+\cdots+k}$. En déduire la limite de (S_n).

6) $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+2k-1}\right)$. Montrer que (S_n) converge.

Ex 9 Télescopage

A. Cas particulier : Soit $p \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Pour tout entier naturel k, on pose $u_k = \frac{1}{\binom{k+p}{k}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\binom{k+p}{k}}$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, (k+p+1)u_{k+1} = (k+1)u_k$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{1}{1-p}\left((n+1)u_n - 1\right)$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq \frac{p!}{(n+1)(n+2)}$. En déduire la limite de la suite (S_n) quand $n \to +\infty$.

B. Cas général . Soit (u_n) une suite telle qu'il existe a et b réels tels que $b - 1 - a \neq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$.

Montrons que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{a+1-b}\,[(n+b)u_{n+1} - (b-1)u_0]$.

Ex 10 Des suites produits

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ et $v_n = \ln(u_n)$.
   a. Démontrer l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
   b. En déduire la limite de v puis celle de u.
   c. Calculer u_{n+1}. Peut-on facilement conclure à la monotonie de u.
2) Soit a un réel positif. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \prod_{k=1}^{n}(1+a^k)$ et $v_n = \ln(u_n)$.
   a. Etudier la monotonie et le signe de chaque suite u et v.
   b. Montrer que si $a \in]0,1[$ alors v converge . Qu'en est-il de u ?
   c. Monter que si $a \in]1,+\infty[$ alors il existe un réel L tel que : $v_n = \frac{n^2}{2} ln(a) + \frac{n}{2}\ln(a) + L + o_{+\infty}(1)$. Qu'en est-il de u ?
   d. Que se passe-t-il quand $a = 1$? quand $a = 0$?
3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$. Montrer que u est convergente.
4) Soit x un réel. $\forall n \in \mathbb{N}, on$ pose $p_n(x) = \prod_{k=0}^{n} ch\left(\frac{x}{2^k}\right)$. Simplifier $p_n(x)sh\left(\frac{x}{2^n}\right)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n(x)$.

Ex 11 Suite d'intégrales

$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}dt$. Montrer que la suite u est convergente .

Soit $\mathrm{l} = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \mathrm{l} - u_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de la suite u.

Densité.

Ex 12 On note $A = \{\sqrt{a} - \sqrt{b} / (a;b) \in \mathbb{N}^2\}$.Soit u et v deux réels fixés tels que $0 < u < v$.

1. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $0 < \sqrt{n_0+1} - \sqrt{n_0} < v - u$ .On pose $z = \sqrt{n_0+1} - \sqrt{n_0}$ et $k = \left\lfloor\frac{u}{z}\right\rfloor + 1$.
2. Montrer que : $u < kz < v$.
3. En déduire qu'il existe deux entiers naturels a et b tels que : $u < \sqrt{a} - \sqrt{b} < v$.
4. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$

Ex 13 Soit $x \in [0,1]$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists q_n \in \mathbb{N} /\ q_n \in [\![0, 2^n]\!]$ et $0 \leq x - \frac{q_n}{2^n} < \frac{1}{2^n}$.

En déduire que $A = \left\{\frac{q}{2^n} / (n,q) \in \mathbb{N}^2 et\ 0 \leq q \leq 2^n\right\}$ est dense dans $[0,1]$.

Bornes sup . / inf.

Ex 14 Déterminer les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants :

$A = \left\{\frac{2p}{2pq+3} / (p,q) \in \mathbb{N}^{*2}\right\}$, $B = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} / (n,m) \in \mathbb{N}^{*2}\right\}$, $C = \left\{\frac{xy}{x^2+y^2} / (x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2\right\}$ et $D = \left\{\frac{x+1}{x+2}, x \in \mathbb{R}\ \ et\ x \leq -3\right\}$

et $E = \{x(1-x) / x \in [0,1]\}$. Déduire de l'étude de E que $min\{a(1-b), b(1-c), c(1-a)\} \leq \frac{1}{4}$.

Ex 15 Soit $A\ et\ B$ deux parties bornées de $\mathbb{R}$ non vides. Soit $A+B=\{x+y\ /\ x\in A\ et\ y\in B\}$et $C=\{|a-a'|/a\in A\ et\ a'\in A\}$.

1. Montrer que : $A\subset B \Longrightarrow \inf(B)\leq \inf(A)\leq \sup(A)\leq \sup(B)$
2. Montrer que $A+B$ est bornée et $\sup(A+B)=supA+supB$ et $\inf(A+B)=\inf(A)+\inf(B)$.
3. Montrer que C admet des bornes sup et inf finies que l'on exprimera en fonction de $sup(A)$ et $inf(A)$.

Ex 16 Soient $f:[0,1]\to[0,1]$ croissante et $E=\{a\in[0,1]/f(a)\geq a\}$.

1. Justifier que E admet une borne supérieure notée s. Nous allons prouver que s est un point fixe de f.
2. Montrer par l'absurde que $f(s)\leq s$.
3. Montrer par l'absurde que $f(s)\geq s$. Puis conclure.

Ex 17 Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres réels. On note $\forall n\in\mathbb{N}, x_n=\sup\{u_k/k\geq n\}\ et\ y_n=\inf\{u_k/k\geq n\}$. On définit ainsi deux nouvelles suites x et y . On note $A=\{u_k/k\in\mathbb{N}\}\ et\ \forall n\in\mathbb{N}, A_n=\{u_k/k\geq n\}$.

1. Justifier que les suites x et y sont bien définies.
2. Montrer que x est décroissante et y est croissante.
3. En déduire que x et y sont convergentes et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n\geq \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.
4. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=L\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n=L$.
5. Prouver en utilisant la définition de la convergence que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=L\Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=L$.

Limite, un équivalent ou un développement asymptotique d'une suite.

Ex 18 A. Déterminer les limites quand $n\to+\infty$ suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(n!)}{n^2}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\sqrt{n}}\ln(1-n^{2025}+e^n)\sin(n)$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right)+sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right)^n$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(ch(n)\right)^{\frac{1}{n}}$
6. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\ln\left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}\right)$
7. $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^{\lfloor\sqrt{4n+1}\rfloor}$
8. $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{2}sin(n))^{\frac{1}{n}}$.
9. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(tan\left(\frac{n\pi}{4n+1}\right)\right)^n$

B. Justifier que ces suites u n'ont pas de limite

1. $u_n=(-2)^n\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)$
2. $u_n=(-1)^{\lfloor\sqrt{n^2+1}\rfloor}+\frac{1}{n}$
3. $u_n=\begin{cases}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n si\ n\equiv 0[3]\\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^n si\ n\equiv 1[3]\\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} si\ n\equiv 2[3]\end{cases}$

Ex 19 Trouver un équivalent simple puis la limite quand $n\to+\infty$ de :

1. $u_n=\frac{n!-2e^{\frac{n^2}{2}}-9n^n}{\frac{1}{5\sin\left(\frac{1}{n}\right)}-100\ln^2(n)}$
2. $u_n=\sin(n^2+1)-(-1)^n n$
3. $u_n=\ln\left(\frac{2-\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)}{2\cos\left(\frac{1}{n}\right)}\right)$
4. $v_n=\sqrt{\ln(n+1)}-\sqrt{\ln(n)}$.
5. $u_n=(\ln(n)-n)^n\ln\left(sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$
6. $v_n=\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)+a\frac{Arctan(n)}{n}$ où $a\in\mathbb{R}$
7. $v_n=\sqrt{ch(n)}-\sqrt{sh(n)}$
8. $w_n=(ch(n))^a-(sh(n))^a$ où $a\in$

Ex 20 Des développements asymptotiques de suites

1. Soit $p\in\mathbb{N}$. Déterminer un développement asymptotique à la précision $\frac{1}{n^p}$ de $Arc\tan(n)$.

2.Déterminer un développement asymptotique à la précision $\frac{1}{n^3}$ de $u_n=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}k!$.

3.Montrer que $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\ln(n)}=1+\frac{\ln(n)}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^2+\frac{\ln(n)}{n^2}+\frac{(\ln(n))^3}{6n^3}+\frac{(\ln(n))^2}{n^3}+\frac{\ln(n)}{n^3}+o_{+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n^3}\right)$.

Ex 21 Montrer que : pour tout entier naturel n non nul $\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}\leq\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\leq\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}$. En déduire un équivalent simple de $u_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$.

Ex 22 Soit u une suite positive, décroissante et telle que : $u_n+u_{n+1}\sim\frac{1}{n}$. Montrer que $u_n\sim\frac{1}{2n}$.

Ex 23 $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction du u_n.

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq n$.
4. Montrer que $u_n = o(n)$.En déduire que $u_n \sim \sqrt{n}$.
5. Déterminer un réel l tel que : $u_n = \sqrt{n} + \mathrm{l} + o_{+\infty}(1)$.

Ex 24 Soit $a\ et\ b$ deux réels.
1. Déterminer un équivalent simple de $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$ quand $n \to +\infty$.
2. On suppose que $1 + a + b = 0$. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et sa limite quand $n \to +\infty$.

Ex 25 INTEGRALE DE WALLIS le retour. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt$.

a. Montrer que la suite (W_n) est convergente. On ne demande pas de calculer la limite pour le moment. (limite déterminer dans l'ex 2)
b. Etablir une relation de récurrence entre $W_n et\ W_{n-2}$.
c. En déduire une expression de W_{2p} et de W_{2p+1} avec de factorielles puis de coefficients binomiaux.
d. Montrer que (nW_nW_{n-1}) est constante et préciser sa valeur. En déduire la limite de W.
e. Démontrer par encadrement que : $W_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. En déduire que $\binom{2p}{p} \sim_{p\to+\infty} \frac{4^p}{\sqrt{\pi p}}$.

Suites extraites:

Ex 26 Montrer que toute suite réelle non majorée a une suite extraite de limite $+\infty$.

Ex 27 Soit u une suite telle que : $\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2, 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{n+p}{np}$. Montrer que u est convergente et déterminer sa limite.

Ex 28 Démontrer que les suites $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}\ et\ (\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ divergent sans limites.

Ex 29 Soit u une suite majorée telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+3}$.

a) Montrer que les suites $(u_{3n}), (u_{3n+1})\ et\ (u_{3n+2})$ convergent.
b) On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$. Montrer que la suite u converge.

Suites adjacentes

Ex 30 Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ tel que $a \leq b$. On définit quatre suites récurrentes de la manière suivante :

$u_0 = w_0 = a\ , v_0 = t_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}\ , v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}, t_{n+1} = \frac{w_n+t_n}{2}$ et $w_{n+1} = 2\left(\frac{w_n t_n}{t_n+w_n}\right)$.

1) Justifier que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*2},\ \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

A. Suites u et v

2) Montrer que $u\ et\ v$ sont adjacentes. On note $M(a,b)$ **leur limite commune appelée la moyenne arithmético-géométrique de a et b.**
3) Montrer que $M(a,b) = M(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2})$. En déduire que $M(a,b) = M(b,a)$.
4) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, M(ta,tb) = tM(a,b)$.

B. Suites w et t

5) Montrer que $t\ et\ w$ sont monotones.
6) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, |t_{n+1} - w_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|t_n - w_n|$.
7) En déduire que t et w sont adjacentes. On note $L(a,b)$ leur limite commune
8) En calculant $t_n w_n$, déterminer $L(a,b)$.
9) Comparer $L(a,b)$ et $M(a,b)$.

Ex 31 Soit a_0 et b_0 deux réels tels que : $0 < a_0 < b_0$ et $\forall n, a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \sqrt{a_n b_n}\right) et\ b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \sqrt{a_n b_n}\right)$.
Montrer que les deux suites $a\ et\ b$ sont bien définies et qu'elles convergent vers une même limite.

Ex 32 Soit $(\boldsymbol{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et bornée. On note $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{x_n} = \mathbf{sup}\,\{\boldsymbol{u_k}/\boldsymbol{k} \geq \boldsymbol{n}\}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{y_n} = \mathbf{inf}\,\{\boldsymbol{u_k}/\boldsymbol{k} \geq \boldsymbol{n}\}$. On définit ainsi deux nouvelles suites $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$. On note $\mathbf{A} = \{\boldsymbol{u_k}/\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}\}\ \boldsymbol{et}\ \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{A_n} = \{\boldsymbol{u_k}/\boldsymbol{k} \geq \boldsymbol{n}\}$.

6. Justifier que les suites x et y sont bien définies.
7. Montrer que x est décroissante et y est croissante.
8. En déduire que x et y sont convergentes et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \geq \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.
9. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = L \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.
10. Prouver en utilisant la définition de la convergence que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = L$.

Suites complexes

EX 33

ATTENTION : si Z est un nombre complexe alors $\ln(Z)$ est une horreur !!!!

1. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{sin(n)}{1+in}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{i-1}{2}\right)^n$.

2. Justifier que $((1-i)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'ont pas de limite. Représenter ces suites.

3. Soit $\alpha = \frac{1-i}{2\sqrt{2}}$. Représenter les points M_n d'affixe α^n tq $n \in \mathbb{N}$.

EX 34 Soit $z \in \mathbb{C}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right)$. Calculer $(1-z)P_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$ lorsque $|z| < 1$.

EX 35 $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = e^z$. (indication : chercher la forme trigonométrique puis algébrique de T_n)

EX 31 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $u_0 = 1 \; et \; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}i$ et u_n affixe de M_n .

a) Montrer que tous les points M_n sont alignés.
b) Exprimer u_n en fonction de n. Déterminer la limite des suites $Re(u_n) \; et \; Im(u_n)$.

EX 32 Soit (z_n) la suite de nombres complexes définie par : $z_0 = i$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n+2(1-i)}{z_n-3i}$ $(**)$.

On note M_n le point image de z_n.

a) Calculer $z_1 \; et \; z_2$.
b) Trouver deux suites constantes égales à $p \; et \; q$ (telles que $|p| > |q|$.)qui vérifient la même relation de récurrence $(**)$ que la suite (z_n) .
c) Montrer que la suite $\left(\frac{z_n-p}{z_n-q}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
d) En déduire z_n en fonction de n et Déterminer la limite des suites $Re(z_n) \; et \; Im(z_n)$.