DM : Intégrales, Dérivées, DL

Exercice 1

Pour tout x réel, on définit :

$$\varphi(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$$

1. Montrer que φ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et exprimer $\varphi(-x)$ en fonction de $\varphi(x)$.
2. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer φ' en fonction de φ.
3. Monter que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et montrer :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi^{(n+1)}(x) = -2x\varphi^{(n)}(x) - 2n\varphi^{(n-1)}(x)$$

4. Justifier que φ admet un $DL_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o_{x\to 0}(x^n)$ ce DL.
5. Trouver une relation reliant a_{k+2} et a_k pour tout $k \in \mathbb{N}$. Calculer le $DL_7(0)$ de φ.
6. Démontrer, en utilisant deux IPP successives que pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\int_1^x e^{t^2} dt = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt$$

On commencera par écrire : $e^{t^2} = \dfrac{1}{2t}(2te^{t^2})$

7. Montrer que la fonction $h : t \mapsto \dfrac{e^{t^2}}{t^2}$ est croissante sur $[1; +\infty[$.
8. En déduire :

$$\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt \leqslant \frac{e^{x^2}}{x^2} \int_1^x \frac{1}{t^2} dt$$

9. En déduire un équivalent de $\displaystyle\int_1^x e^{t^2} dt$ quand $x \to +\infty$ et montrer que $\varphi(x) \sim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x}$.

Exercice 2

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$. Donner un $DL_4(0)$ de la fonction g.
2. Montrer que g peut être prolongée par continuité en 0 et étudier la dérivabilité de g en 0.

   On considère maintenant la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x} \ln(g(x))$.

3. Donner le domaine de définition de f.
4. Donner un $DL_4(0)$ de la fonction f.
5. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et étudier la dérivabilité de f en 0.
6. Etudier les variations de f.
7. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.