DM : Intégrales, Dérivées, DL

Exercice 1

Pour tout x réel, on définit :

$$\varphi(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$$

1. Montrer que φ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et exprimer $\varphi(-x)$ en fonction de $\varphi(x)$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $[0, x]$ donc l'intégrale st bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Si $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} \varphi(-x) &= e^{-(-x)^2} \int_0^{-x} e^{t^2} dt \text{ on effectue alors le changement de variable } u = -t \\ &= -e^{-x^2} \int_0^x e^{u^2} du = -\varphi(x) \end{aligned}$$

2. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer φ' en fonction de φ.

   La fonction φ est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (l'intégrale est la primitive de $t \mapsto e^{t^2}$ qui s'annule en 0) donc φ est dérivable.

   Si $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= -2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + e^{-x^2} e^{x^2} \\ &= -2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + 1 \\ &= -2x\varphi(x) + 1 \end{aligned}$$

3. Monter que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et montrer :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi^{(n+1)}(x) = -2x\varphi^{(n)}(x) - 2n\varphi^{(n-1)}(x)$$

   Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété suivante : "H_n : φ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et $\varphi^{(n+1)}(x) = -2x\varphi^{(n)}(x) - 2n\varphi^{(n-1)}(x)$"

   Initialisation : D'après la question précédente, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\varphi'(x) = -2x\varphi(x) + 1$. On en déduit que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ (car composée de fonction $\mathcal{C}^1$) et

$$\varphi''(x) = -2\varphi(x) - 2x\varphi'(x)$$

   La propriété H_1 est donc vraie.

   Propagation : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose la propriété "H_n" vraie. On en déduit que $\varphi^{(n+1)}$ est dérivable et :

$$\begin{aligned}\varphi^{(n+2)}(x) &= -2\varphi^{(n)}(x) - 2x\varphi^{(n+1)} - 2n\varphi^{(n)} \\ &= -2x\varphi^{(n+1)} - 2(n+1)\varphi^{(n)}\end{aligned}$$

La fonction $\varphi^{(n+2)}$ est donc continue (car composée de fonction continues) et la relation est bien vérifiée au rang $n+1$: on en déduit que H_{n+1} est vraie.

4. Justifier que φ admet un $DL_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o_{x\to 0}(x^n)$ ce DL.

   La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc d'après la formule de Taylor-Young, elle admet un DL en 0 à tout ordre.

5. Trouver une relation reliant a_{k+2} et a_k pour tout $k \in \mathbb{N}$. Calculer le $DL_7(0)$ de φ.

   On utilise la relation obtenue à la question 3 avec $x = 0$:

$$\varphi^{(n+1)}(0) = -2n\varphi^{(n-1)}(0)$$
$$\varphi^{(n+2)}(0) = -2(n+1)\varphi^{(n)}(0)$$

et on utilise $a_n = \dfrac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}$ et on obtient :

$$a_{n+2} = -\frac{2(n+1)\times n!}{(n+2)!}a_n$$
$$a_{n+2} = \frac{-2}{(n+2)}a_n$$

On obtient : $a_0 = \varphi(0) = 0$, donc $a_n = 0$ pour tout n pair. Pour les valeurs impaires $a_1 = \varphi'(0) = 1$, $a_3 = -\dfrac{2}{3}$, $a_5 = \dfrac{4}{15}$ et $a_7 = -\dfrac{8}{105}$. Donc :

$$\varphi(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 - \frac{8}{105}x^7 + o(x^7)$$

6. Démontrer, en utilisant deux IPP successives que pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$\int_1^x e^{t^2}dt = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}dt$$

On commencera par écrire : $e^{t^2} = \dfrac{1}{2t}(2te^{t^2})$ On fait une IPP dans l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned}\int_1^x e^{t^2}dt &= \int_1^x \frac{1}{2t}(2te^{t^2})dt \\ &= [\frac{1}{2t}(e^{t^2})]_1^x - \int_1^x -\frac{1}{2t^2}e^{t^2}dt \\ &= \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + \int_1^x \frac{1}{2t^2}e^{t^2}dt \\ &= \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + \int_1^x \frac{1}{4t^3}2te^{t^2}dt \\ &= \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + [\frac{1}{4t^3}(e^{t^2})]_1^x - \int_1^x -\frac{3}{4t^4}e^{t^2}dt \\ &= \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{e}{4} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}dt \\ &= \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}dt\end{aligned}$$

7. Montrer que la fonction $h : t \mapsto \dfrac{e^{t^2}}{t^2}$ est croissante sur $[1; +\infty[$.

   La fonction h est dérivable sur $[1; +\infty[$ et :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{2te^{t^2}t^2 - e^{t^2}2t}{t^4} \\ &= \frac{2e^{t^2}}{t^3}(t^2-1) \end{aligned}$$

   On en déduit que $h'(t) > 0$ pour tout $t \in [1; +\infty[$, donc h est croissante sur $[1; +\infty[$.

8. En déduire :

$$\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt \leqslant \frac{e^{x^2}}{x^2} \int_1^x \frac{1}{t^2} dt$$

   Si $x > 1$, la fonction h est croissante sur $[1; x]$, donc pour tout $t \in [1; x]$:

$$\frac{e^{t^2}}{t^4} = h(t)\frac{1}{t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}h(x) = \frac{1}{t^2}\frac{e^{x^2}}{x^2}$$

   On en déduit :

$$\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt \leqslant \int_1^x \frac{1}{t^2}\frac{e^{x^2}}{x^2} dt = \frac{e^{x^2}}{x^2} \int_1^x \frac{1}{t^2} dt$$

9. En déduire un équivalent de $\displaystyle\int_1^x e^{t^2} dt$ quand $x \to +\infty$ et montrer que $\varphi(x) \sim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2x}$.

   On utilise le résultat de la question 6 :

$$\frac{2x}{e^{x^2}} \int_1^x e^{t^2} dt \quad = \quad 1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{3xe}{2e^{x^2}} + \frac{3x}{2e^{x^2}} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt$$

   et on utilise :

$$\frac{3x}{2e^{x^2}} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt \leqslant \frac{3}{2x} \int_1^x \frac{1}{t^2} dt \leqslant \frac{3}{2x}$$

   pour en déduire :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^{x^2}} \int_1^x e^{t^2} dt = 1$$

   donc

$$\int_1^x e^{t^2} dt \sim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2}}{2x}$$

   Pour l'équivalent de φ on utilise pour $x > 1$:

$$\varphi(x) \quad = \quad e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt = e^{-x^2} \left(\int_0^1 e^{t^2} dt + \int_1^x e^{t^2} dt \right)$$

   Comme $\int_1^x e^{t^2} dt \sim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x^2}}{2x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, $\int_0^1 e^{t^2} dt + \int_1^x e^{t^2} dt \sim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x^2}}{2x}$. On en déduit que $\varphi(x) \sim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2x}$.

Exercice 2

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$. Donner un $DL_4(0)$ de la fonction g.

   Pour obtenir le $DL_4(0)$ de g il faut tout d'abord utiliser le $DL_5(0)$ de $e^x - 1$:

$$e^x - 1 \quad = \quad x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

   On obtient donc :

$$g(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$$

2. Montrer que g peut être prolongée par continuité en 0 et étudier la dérivabilité de g en 0.

   On en déduit que $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$, donc g peut-être prolongée par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$. De même on obtient

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{120} + o(x^3)$$

   donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = \frac{1}{2}$.

   On considère maintenant la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln(g(x))$.

3. Donner le domaine de définition de f.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$, donc f est définie sur $\mathbb{R}^*$

4. Donner un $DL_4(0)$ de la fonction f.

   On écrit $\ln(g(x)) = \ln(1+u(x))$ où $u(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^5}{720} + o(x^5)$, en particulier $\lim_{x\to 0} u(x) = 0$. On utilise le $DL_5(0)$ de $\ln(1+u)$

$$\ln(1+u) \quad = \quad u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} + o(x^5)$$

   On obtient donc :

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^5}{720} + o(x^5)\\
u(x)^2 &= \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{36} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{72} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\\
u(x)^2 &= \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + \frac{5x^4}{72} + \frac{x^5}{45} + o(x^5)\\
u(x)^3 &= \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{12} + \frac{5x^5}{144} + \frac{x^5}{45} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{36} + \frac{x^5}{96} + o(x^5)\\
u(x)^3 &= \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{8} + \frac{137x^5}{1440} + o(x^5)\\
u(x)^4 &= \frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{16} + \frac{x^5}{48} + o(x^5)\\
u(x)^4 &= \frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{12} + o(x^5)\\
u(x)^5 &= \frac{x^5}{32} + o(x^5)
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\ln(1+u(x)) &= \frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+\frac{x^5}{720}\\ &\quad -\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{12}-\frac{5x^4}{144}-\frac{x^5}{90}\\ &\quad +\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{24}+\frac{137x^5}{4320}\\ &\quad -\frac{x^4}{64}-\frac{x^5}{48}\\ &\quad +\frac{x^5}{160}+o(x^5)\\ &= \frac{1}{2}x+\frac{1}{24}x^2-\frac{1}{2880}x^4+\frac{1}{135}x^5+o(x^5)\end{aligned}$$

On obtient finalement,

$$f(x) = \frac{1}{2}+\frac{1}{24}x-\frac{1}{2880}x^3+\frac{1}{135}x^4+o(x^4)$$

5. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et étudier la dérivabilité de f en 0.

   On en déduit que $\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{2}$, donc f peut-être prolongée par continuité en 0 en posant $f(0)=\frac{1}{2}$. De même on obtient

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{24}+o(x)$$

   donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=\frac{1}{24}$.

6. Etudier les variations de f.

   La fonction f est dérivable et pour $x\neq 0$:

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\ln(g(x))+\frac{1}{x}\frac{g'(x)}{g(x)}$$

   et

$$g'(x)=\frac{e^x x-(e^x-1)}{x^2}$$

   donc

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{e^x x-(e^x-1)}{x^2}\frac{x}{e^x-1}=\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}$$

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}\left(-\ln(\frac{e^x-1}{x})+\frac{xe^x}{e^x-1}-1\right)=\frac{1}{x^2}h(x)$$

$$h'(x)=-\frac{e^x}{e^x-1}+\frac{1}{x}+\frac{(1+x)e^x(e^x-1)-xe^xe^x}{(e^x-1)^2}$$

$$h'(x)=-\frac{xe^x(e^x-1)}{x(e^x-1)^2}+\frac{(e^x-1)^2}{x(e^x-1)^2}+\frac{xe^{2x}+x^2e^{2x}-xe^x-x^2e^x-x^2e^{2x}}{x(e^x-1)^2}$$

$$h'(x)=\frac{-xe^{2x}+xe^x+e^{2x}-2e^x+1+xe^{2x}+x^2e^{2x}-xe^x-x^2e^x-x^2e^{2x}}{x(e^x-1)^2}$$

$$h'(x)=\frac{e^{2x}-2e^x+1-x^2e^x}{x(e^x-1)^2}$$

$$h'(x) = e^x \frac{2\operatorname{ch}(x) - 2 - x^2}{x(e^x - 1)^2}$$

Il faut donc étudier la fonction $u(x) = 2\operatorname{ch}(x) - 2 - x^2$. On obtient $u'(x) = 2sh(x) - 2x$ et $u''(x) = 2\operatorname{ch}(x) - 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit u' est strictement croissante et comme $u'(0) = 0$, on a $u'(x) > 0$ si $x > 0$ et $u'(x) < 0$ si $x < 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
u		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On en déduit que u est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$, donc pour $x \neq 0$, $h'(x)$ est du signe de x :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$\|$	$+$	
h		$\searrow$	$\|$	$\nearrow$	

Comme $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$, on en déduit que $f'(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$ et comme $f'(0) > 0$, on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

7. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Pour $x > 0$, on écrit :

$$f(x) = \frac{\ln(\frac{e^x(1-e^{-x})}{x})}{x}$$

$$f(x) = \frac{\ln(e^x)}{x} + \frac{\ln(1 - e^{-x})}{x} - \frac{\ln(x)}{x}$$

$$f(x) = 1 + \frac{\ln(1 - e^{-x})}{x} - \frac{\ln(x)}{x}$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1-e^{-x})}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

Pour $x < 0$, on écrit

$$f(x) = \frac{\ln(\frac{1-e^x}{-x})}{x} = \frac{\ln(1 - e^x)}{x} + \frac{\ln(-x)}{x}$$

On en déduit :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$