

### Généralités sur les suites

**Ex 0** Soit  $L$  et  $L'$  réels ou infinis.

#### 1. Compléter par un lien logique le plus précis possible :

- a.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |L|$ .
- b.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$ .
- c. Ici  $L$  réel.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - L| = 0$ .
- d.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2 = L^2$ .
- e.

- f.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^3 = L^3$  si  $u$  est réelle  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^3 = L^3$  si  $u$  est cpxe
- g.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{3n^2+1} = L \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ .
- h.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = L$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = L \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ .

#### 2. VRAI ou FAUX :

- a. Une suite positive de limite nulle est décroissante à partir d'un certain rang. FAUX Cex :  $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$
- b. Une suite réelle croissante a toujours une limite. VRAI
- c. Deux suites bornées  $u$  et  $v$  telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$  convergent vers la même limite. FAUX Cex :  $u_n = (-1)^n$  et  $v_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$
- d. Si  $(|u_n|)$  converge alors  $u$  converge. FAUX Cex :  $u_n = (-1)^n$
- e. Si  $u$  et  $v$  sont deux suites convergentes de limites respectives  $L$  et  $L'$  telles que :  $L < L'$  alors à partir d'un certain rang,  $u_n < v_n$ . VRAI
- f. Si  $u$  et  $v$  sont deux suites de limites respectives  $L$  et  $L'$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = L + L'$ . FAUX : si  $L + L'$  est une FI
- g. Si  $u$  et  $v$  sont deux suites telles que à partir d'un certain rang  $u_n < v_n$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ . FAUX :  $u$  et  $v$  n'ont pas forcément de limite
- h. Si  $u$  et  $v$  sont deux suites admettant des limites et telles que à partir d'un certain rang  $u_n < v_n$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ . FAUX : les limites peuvent être égales  
 Cex :  $u_n = -\frac{1}{n}$  et  $v_n = \frac{1}{n}$
- i. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  et  $u_n \sim v_n$  alors  $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$ . VRAI car si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  et  $u_n \sim v_n$  alors  $u_n = v_n + o(v_n) = v_n(1 + o(1))$   
 donc  $\ln(u_n) = \underbrace{\ln(v_n)}_{n \rightarrow +\infty} + \underbrace{\ln(1 + o(1))}_{n \rightarrow +\infty} \sim_{n \rightarrow +\infty} \ln(v_n)$
- j. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  et  $u_n \sim v_n$  alors  $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$ . FAUX Cex :  $u_n = 1 + \frac{1}{n}$  et  $v_n = 1$ ,  $\ln(u_n) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \neq 0 \sim_{n \rightarrow +\infty} \ln(v_n)$
- k.  $u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$ . FAUX pour les deux implications: Cex  $\Rightarrow u_n = n + \sqrt{n}$  et  $v_n = n$   
 et Cex  $\Leftarrow u_n = \frac{1}{n}$  et  $v_n = \frac{1}{n^2}$ .
- l. Si  $u_n \sim v_n$  alors  $1 + u_n \sim 1 + v_n$ . FAUX on ne somme pas les équivalents Cex :  $u_n = -1$  et  $v_n = -1 + \frac{1}{n}$
- m. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  et  $u_n \sim v_n$  alors  $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ . FAUX on ne compose pas à gauche les équivalents Cex :  $u_n = n + \sqrt{n}$  et  $v_n = n$ , alors  $\frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = e^{\sqrt{n}}$
- n. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  et  $u_n \sim v_n$  alors  $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ . VRAI car si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  et  $u_n \sim v_n$  alors  $u_n = v_n + o(v_n) = v_n + o(v_n) = \exp(o(v_n)) \sim_{n \rightarrow +\infty} \exp(v_n)$
- i. Si  $(\sum_{k=0}^n u_k)_{n \in \mathbb{N}}$  est divergente alors  $(u_n)$  ne tend pas vers 0. FAUX Cex :  $u_k = \frac{1}{k}$
- j. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  alors  $(\sum_{k=0}^n u_k)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente FAUX Cex :  $u_k = \frac{1}{k}$
- o. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = +\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  ou  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ . FAUX Cex :  $u_n = \begin{cases} n^2 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$  et  $v_n = \begin{cases} -3 & \text{si } n \text{ pair} \\ n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$
- p. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = 1$ . FAUX Cex :  $u_n = 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = e$ .
- q. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$  alors  $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}$ . FAUX Cex :  $u_n = \begin{cases} n^2 & \text{si } n \text{ pair} \\ n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$
- r. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$  et  $L \in \mathbb{R}^*$  alors  $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}$ . VRAI car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$  et  $L \in \mathbb{R}^*$   $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = L$  et  $L \in \mathbb{R}^*$  et  $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} L \sim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}$ .

#### 3. Pour réfléchir :

- s. Trouver une suite convergente non monotone.  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$
- t. Trouver une suite bornée non convergente.  $u_n = (-1)^n$
- u. Trouver deux suites équivalentes dont la différence tend vers  $+\infty$ .  $u_n = n + \sqrt{n}$  et  $v_n = n$
- v. Existe-t-il une suite convergente et non bornée ? NON
- w. Trouver une suite  $u$  décroissante minorée par 0 et de limite 2.  $u_n = 2 + \frac{1}{n}$
- x. Trouver une suite  $u$  divergente telle que :  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent.  $u_n = \begin{cases} 3 & \text{si } n \text{ pair} \\ -4 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$
- y. Trouver une suite  $u$  convergente telle que :  $(u_n)$  et  $(u_{n+1})$  ne sont pas équivalentes.  $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$
- z. Existe-t-il une suite  $u$  telle que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = -1$ ? NON car  $(u_{n+1})$  est extraite de  $(u_n)$ .
- aa. Trouver une suite  $u$  telle que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_k = +\infty$ .  $u_n = \frac{1}{n}$
- bb. Trouver une suite  $u$  telle que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_k \in \mathbb{R}$ .  $u_n = \frac{1}{n^2}$
- cc. Trouver deux suites  $u$  et  $v$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$  et mais  $v$  n'a pas de limite.  $u_n = \frac{1}{n}$  et  $v_n = 2 + (-1)^n$   
 Compléter alors cette affirmation pour la rendre correcte : ( $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$  et les limites  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  existent)  $\Rightarrow (\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n)$
- dd. Trouver une suite donnant la FI  $1^{+\infty}$  quand  $n \rightarrow +\infty$  et dont la limite (après calcul) est 3.  $u_n = 1 + \frac{a}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = e^a$  ... donc il suffit de prendre  $a = \ln(3)$ .

#### Définition de la limite d'une suite :

Soit  $u$  une suite réelle telle que :  $\forall (k, n) \in \mathbb{N}^{*2}, 0 \leq u_n \leq \frac{k}{n} + \frac{1}{k}$ . Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

Soit  $\epsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ .

Comme  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} = 0$ , il existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{1}{k_0} < \frac{\epsilon}{2}$ . Alors  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{k_0}{n} + \frac{1}{k_0} \leq \frac{k_0}{n} + \frac{\epsilon}{2}$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k_0}{n} = 0$  ( $k_0$  étant fixé), il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \geq n_0, \frac{k_0}{n} < \frac{\epsilon}{2}$ . Alors,  $\forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ . J'en conclus, grâce à la **définition 4** de cours, que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

Démontrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx = 0$ .

Soit  $\varepsilon \in ]0, \pi[$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx.$$

D'une part,  $\forall x \in [\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $(\sin(x))^n \leq 1$ , donc  $0 \leq \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n dx \leq \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\varepsilon}{2}$ .

D'autre part,  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}]$ ,  $0 \leq \sin(x) \leq \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2})$ . Posons  $a = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2})$ . Alors  $0 \leq \sin^n(x) \leq a^n$ . J'en déduis que :

$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n(x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} a^n dx = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) a^n \leq \frac{\pi}{2} a^n$ . Comme  $a = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2})$ ,  $a \in ]0, 1[$  et par conséquent,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} a^n = 0$ . Alors, il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \geq n_0$ ,  $\frac{\pi}{2} a^n \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Par suite,  $\forall n \geq n_0$ ,  $0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$  et finalement,

$$\forall n \geq n_0, 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Par conséquent, si  $\varepsilon \geq \pi$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \geq n_0$ ,  $0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx \leq \frac{\pi}{2} \leq \varepsilon$ .

Ainsi  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \geq n_0$ ,  $0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx \leq \varepsilon$ . Cela signifie que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx = 0$ .

**Césaro revisité :** Soit  $u$  une suite réelle,  $L$  un réel et  $v$  la suite définie par  $v_n = \frac{1}{2^n} (\sum_{k=0}^{n-1} 2^k u_k)$ .

Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ . En déduire que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L$ .

a. • Je suppose que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ . Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ .

$$|v_n| = \left| \frac{1}{2^n} (\sum_{k=0}^{n-1} 2^k u_k) \right| = \frac{1}{2^n} |(\sum_{k=0}^{n-1} 2^k u_k)| \stackrel{1\text{ère I.T.}}{\geq} \frac{1}{2^n} (\sum_{k=0}^{n-1} 2^k |u_k|) = \frac{1}{2^n} (\sum_{k=0}^{n-1} 2^k |u_k|). \quad (**)$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \geq n_0$ ,  $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

Donc  $\forall n \geq n_0 + 1$ ,  $\sum_{k=n_0}^{n-1} 2^k |u_k| \leq \sum_{k=n_0}^{n-1} 2^k \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=n_0}^{n-1} 2^k \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{2^{n-n_0-1}}{2-1} 2^{n_0} = \frac{\varepsilon}{2} (2^{n-n_0} - 1) 2^{n_0} = \frac{\varepsilon}{2} (2^n - 2^{n_0}) \leq 2^n \frac{\varepsilon}{2}$ .

Alors,  $\frac{1}{2^n} (\sum_{k=0}^{n-1} 2^k |u_k|) = \frac{1}{2^n} (\sum_{k=0}^{n_0-1} 2^k |u_k| + \sum_{k=n_0}^{n-1} 2^k |u_k|) = \frac{1}{2^n} (\sum_{k=0}^{n_0-1} 2^k |u_k|) + \frac{1}{2^n} (\sum_{k=n_0}^{n-1} 2^k |u_k|) \leq \frac{1}{2^n} (\sum_{k=0}^{n_0-1} 2^k |u_k|) + \frac{\varepsilon}{2}$ .

$\alpha = \sum_{k=0}^{n_0-1} 2^k |u_k|$  est indépendant de  $n$ , est donc une constante. Par conséquent,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \alpha = 0$ . Donc,  $\exists n_1 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \geq n_1$ ,  $\left| \frac{1}{n} \alpha \right| = \frac{1}{n} \alpha \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

Posons  $N = \max(n_0, n_1)$ . Alors  $\forall n \geq N$ ,  $\frac{1}{2^n} (\sum_{k=0}^{n-1} 2^k |u_k|) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ . Donc d'après l'inégalité (\*\*), je peux affirmer que  $\forall n \geq N$ ,  $|v_n| \leq \varepsilon$ . J'en conclus que la suite  $(v_n)$  converge vers 0.

•• Je suppose ici que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \in \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ). Posons  $a_n = u_n - L$  et  $b_n = \frac{1}{2^n} (\sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_k)$ . D'après ce qui précède

comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0.$$

De plus,  $b_n = \frac{1}{2^n} (\sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_k) = \frac{1}{2^n} (\sum_{k=0}^{n-1} 2^k (u_k - L)) = \frac{1}{2^n} (\sum_{k=0}^{n-1} 2^k u_k) - \frac{1}{2^n} (\sum_{k=0}^{n-1} 2^k) L = v_n - \frac{2^{n-1}}{2^n} \left[ \frac{1}{2^{n-1}} (\sum_{k=0}^{n-1} 2^k) L \right] = v_n - \frac{2^{n-1}}{2^n} L$ .

Donc,  $v_n = b_n + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) L$ . J'en conclus que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L$ .

A) Soit  $u$  une suite réelle telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n = L \in \mathbb{R}^*$ . Démontrer que  $u_n \sim_{+\infty} Ln$ .

Posons  $v_n = u_{n+1} - u_n$  et  $V_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k$ . Alors,  $V_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \frac{1}{n} (u_n - u_0)$ . Or, d'après le théorème de Césaro, comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L \in \mathbb{R}^*$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = L$  i.e.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} (u_n - u_0) = L$ . Alors,  $\frac{1}{n} (u_n - u_0) = L + o_{+\infty}(1)$  et ensuite,  $u_n - u_0 = nL + no_{+\infty}(1)$  et finalement,  $u_n = \underbrace{\frac{u_0}{o_{+\infty}(nL)} + nL}_{o_{+\infty}(nL)} + \underbrace{n \times o_{+\infty}(1)}_{o_{+\infty}(nL)} \sim_{+\infty} Ln$ .

#### Propriétés : caractère borné, opérations sur les limites, encadrement :

On note  $B = \{\sqrt{a} - \sqrt{b} / (a; b) \in \mathbb{N}^2\}$ . Soit  $u$  et  $v$  deux réels fixés tels que  $0 < u < v$ .

a) Justifier qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :  $0 < \sqrt{n_0 + 1} - \sqrt{n_0} < v - u$ . On pose  $z = \sqrt{n_0 + 1} - \sqrt{n_0}$  et  $k = \left\lfloor \frac{u}{z} \right\rfloor + 1$ .

b) Montrer que :  $u < kz < v$ .

c) En déduire qu'il existe deux entiers naturels  $a$  et  $b$  tels que :  $u < \sqrt{a} - \sqrt{b} < v$ .

d) Montrer que  $B$  est dense dans  $\mathbb{R}$  i.e. qu'entre deux réels distincts, il y a toujours un élément de  $B$ .

a)  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ . Donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$ .

Posons  $\varepsilon = v - u \in \mathbb{R}^{+*}$ . Alors il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :  $0 < \sqrt{n_0 + 1} - \sqrt{n_0} < \varepsilon = v - u$ .

b) On pose  $z = \sqrt{n_0 + 1} - \sqrt{n_0}$  et  $k = \left\lfloor \frac{u}{z} \right\rfloor + 1$ . Donc,  $0 < z < v - u$  et  $k - 1 \leq \frac{u}{z} < k$ .

Alors, comme  $k > 0$ ,  $zk - z \leq u < kz$  puis  $kz \leq u + z < u + v - u = v$ . Ainsi,  $u < kz < v$ .

c)  $kz = k\sqrt{n_0 + 1} - k\sqrt{n_0} \underset{car k \geq 0}{=} \sqrt{k^2(n_0 + 1)} - \sqrt{k^2(n_0)}$ . Donc,  $a = k^2(n_0 + 1)$  et  $b = k^2 n_0$  sont deux entiers naturels qui conviennent.

d) Soit  $x$  et  $y$  deux réels tels que  $x < y$ .

Si  $0 < x < y$  alors d'après b), en prenant  $u = x$  et  $v = y$ , il existe deux entiers naturels  $a$  et  $b$  tels que :  $x < \underbrace{\sqrt{a} - \sqrt{b}}_{\in B} < y$ . Donc  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$  est un élément de  $B$  coincé entre  $x$  et  $y$ .

B coincé entre  $x$  et  $y$ .

Si  $x < 0 < y$  alors  $0 < -y < -x$  et d'après b), en prenant  $u = -y$  et  $v = -x$  et il existe deux entiers naturels  $a$  et  $b$  tels que :  $-y < \underbrace{\sqrt{a} - \sqrt{b}}_{\in B} < -x$ . Donc

$y > \underbrace{\sqrt{b} - \sqrt{a}}_{\in B} > x$  et  $\sqrt{b} - a$  est un élément de  $B$  coincé entre  $x$  et  $y$ .

Ainsi, entre deux réels, il y a toujours un élément de  $B$ . Donc  $B$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $u$  et  $v$  deux suites réelles telles que  $u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

1. Déterminer un réel  $a$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n^2 \leq a(u_n^2 + u_n v_n + v_n^2)$
2. Montrer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

1. Notons  $A_n = u_n^2 + u_n v_n + v_n^2$ .  $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 = (u_n + \frac{1}{2}v_n)^2 - \frac{1}{4}v_n^2 + v_n^2 = (u_n + \frac{1}{2}v_n)^2 + \frac{3}{4}v_n^2$ . Donc,  $\frac{4}{3}A_n = \underbrace{\frac{4}{3}(u_n + \frac{1}{2}v_n)^2}_{\geq 0} + v_n^2$ . Par conséquent,  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n^2 \leq \frac{4}{3}A_n$ . De même,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^2 \leq \frac{4}{3}A_n$ .
2.  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n^2 \leq \frac{4}{3}A_n$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = 0$ , le théorème de limite par encadrement permet de conclure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ . De même  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

Soit  $u$  une suite réelle ou cpxe. Montrer que :  $(\sum_{k=0}^n u_k)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  et que la réciproque est fausse. Que peut-on en déduire sur les suites  $(\sum_{k=0}^n \sin(k))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\sum_{k=0}^n \sqrt{k})_{n \in \mathbb{N}}$  ? et sur  $(\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)})_{n \geq 2}$  ?

Posons  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1}$ .

Donc,  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente vers  $L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - S_{n-1} = 0$ . Par contre,  $(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \Rightarrow (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent) comme le prouve la suite  $u$  telle que  $u_n = \frac{1}{n}$  qui tend vers 0 alors que  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  tend vers  $+\infty$  (Cf cours exemple33 ou TD 11 ex 7). Comme les suites  $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$  sont divergentes, les suites  $(\sum_{k=0}^n \sin(k))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\sum_{k=0}^n \sqrt{k})_{n \in \mathbb{N}}$  sont aussi divergentes.

Par contre, la suite  $(\frac{1}{n \ln(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0, donc je ne peux rien conclure immédiatement sur  $S = (\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)})_{n \geq 2}$ . Il faut faire une étude supplémentaire. Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$  et  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$

$$\forall x \in [k, k+1], \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \leq \frac{1}{x \ln(x)} \leq \frac{1}{k \ln(k)} \text{ donc } \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln(x)} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k \ln(k)} dx \text{ i.e.}$$

$$\frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \leq [\ln(\ln(u))]_k^{k+1} \leq \frac{1}{k \ln(k)}. \text{ Ainsi, } \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leq \frac{1}{k \ln(k)}$$

Par conséquent,  $\sum_{k=2}^n \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)}$ . Ainsi,  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)}$ . Le théorème de limite par encadrement permet alors de conclure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} = +\infty$

### Des suites définies par des sommes

- 1)  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ . Montrer que  $u$  converge.
- 2)  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Montrer que  $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$ . Montrer l'existence puis la valeur de la limite de  $u$ .
- 3)  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2+n^2}$ . Montrer que  $u_n = O_{+\infty}(\frac{1}{n})$ .
- 4) On pose  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k)}$ . Déterminer la limite de  $u$ .
- 5) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+2+\dots+k}$ . En déduire la limite de  $(S_n)$ .
- 6)  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ . Montrer que  $u$  est convergente et déterminer sa limite.

1) Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ .  $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ . Donc  $u$  est croissante.

De plus,  $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, 0 < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ . Donc,  $0 \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n} \leq 1$ . Donc,  $0 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2$

J'en déduis que la suite  $u$  est majorée. Et ainsi  $u$  est convergente.

2) Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .  $u_{2n} - u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \underset{\substack{\geq \\ \text{car } \forall k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket, \\ \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}}}{=} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ .

$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0$ . Donc  $u$  est croissante. Et par conséquent,  $u$  admet une limite notée  $L$  telle que réel ou  $L = +\infty$ .

Si on imagine un instant que  $L$  est un réel alors

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = L$  (car  $(u_{2n})$  est extraite de  $u$ ).
- par suite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} - u_n \underset{\substack{\rightarrow \\ \text{pas de Fi} \\ \text{car } L \text{ réel}}}{=} L - L = 0$ .
- Enfin, en passant à la limite dans l'inégalité:  $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$ , j'aboutis à  $0 \geq \frac{1}{2}$  ce qui est absurde.

J'en déduis que la suite  $u$  ne tend pas vers une limite finie et ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L = +\infty$ .

3) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{1}{n^2+n^2} \leq \frac{1}{k^2+n^2} \leq \frac{1}{1+n^2}$  donc  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+n^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2+n^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+n^2}$  i.e.  $\frac{n}{2n^2} \leq u_n \leq \frac{n}{1+n^2}$ .

J'en déduis que  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \leq nu_n \leq \frac{n^2}{1+n^2} \leq 1$ . La suite  $\left(\frac{u_n}{\frac{1}{n}}\right)$  est donc bornée, je peux en conclure que  $u_n = O_{+\infty}(\frac{1}{n})$  et par suite la suite  $u$  converge vers 0.

4) On pose  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k)}$ . Déterminer la limite de  $u$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tq  $n \geq 4$ ,  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k)} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-3} + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n(n-1)} + \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \dots + \frac{6}{n(n-1)(n-2)} + \frac{2}{n(n-1)} + \frac{1}{n} + 1$

$u_n = 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{(k)}$ .

Or,  $\forall k \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket, \binom{n}{k} \geq \binom{n}{2} > 0$  donc  $0 < \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq \frac{1}{\binom{n}{2}}$  et par conséquent,  $0 \leq \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{(k)} \leq \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{2}} = (n-2-2+1) \frac{1}{\binom{n}{2}} = \frac{2(n-3)}{n(n-1)} \leq \frac{2}{n}$ .

Cet encadrement permet d'affirmer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{(k)} = 0$ . Et par suite,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ .

5) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+2+\dots+k}$ . En déduire la limite de  $(S_n)$ .

$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k+1}} = 2 \left[ 1 - \frac{1}{n+1} \right]$ . Et par suite,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2$ .

6)  $u_n = \sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^n [\ln(k-1) + \ln(k+1) - 2\ln(k)]$

$= \sum_{k=2}^n \ln(k-1) - \ln(k) + \sum_{k=2}^n \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(1) - \ln(n) + \ln(n+1) - \ln(2) = -\ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln(2)$ .

**A. Cas particulier :** Soit  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Pour tout entier naturel  $k$ , on pose  $u_k = \frac{1}{\binom{k+p}{k}}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\binom{k+p}{k}}$ .

1. Montrer que :  $\forall k \in \mathbb{N}, (k+p+1)u_{k+1} = (k+1)u_k$ .

2. En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{1}{1-p}((n+1)u_n - 1)$ .

3. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq \frac{p!}{(n+1)(n+2)}$ . En déduire la limite de la suite  $(S_n)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**B. Cas général .** Soit  $(u_n)$  une suite telle qu'il existe  $a$  et  $b$  réels tels que  $b - 1 - a \neq 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$ .

Montrons que : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{1}{a+1-b} [(n+b)u_{n+1} - (b-1)u_0]$ .

**A. Cas particulier**

1. Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

$$(k+p+1)u_{k+1} - (k+1)u_k = (k+p+1)\frac{1}{\binom{k+1+p}{k+1}} - (k+1)\frac{1}{\binom{k+p}{k}} = (k+p+1)\frac{1}{\binom{k+1+p}{k+1}} - (k+1)\frac{1}{\binom{k+p}{k}}$$

$$= (k+p+1)\frac{1}{\frac{(k+1+p)!}{p!(k+1)!}} - (k+1)\frac{1}{\frac{(k+p)!}{p!k!}} = (k+p+1)\frac{p!(k+1)!}{(k+1+p)!} - (k+1)\frac{p!k!}{(k+p)!} = \frac{p!(k+1)!}{(k+p)!} - \frac{p!(k+1)!}{(k+p)!} = 0.$$

Donc,  $(k+p+1)u_{k+1} = (k+1)u_k$ .

2.  $(k+p+1)u_{k+1} - (k+p)u_k = (k+1)u_k - (k+p)u_k = (1-p)u_k$ . Donc,

$$u_k = \frac{1}{1-p}[(k+1+p)u_{k+1} - (k+p)u_k] = \frac{(k+1+p)u_{k+1}}{1-p} - \frac{(k+p)u_k}{1-p} \stackrel{\text{en posant } v_k = \frac{(k+p)u_k}{1-p}}{=} v_{k+1} - v_k$$

3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, u_k = v_{k+1} - v_k$ .

$$\text{Donc } S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \underbrace{\sum_{k=1}^n v_{k+1} - v_k}_{\substack{\text{somme} \\ \text{télescopique}}} = v_{n+1} - v_1 = \frac{(n+1+p)u_{n+1}}{1-p} - \frac{(1+p)u_1}{1-p} \stackrel{\text{en utilisant 1.}}{=} \frac{(n+1)u_n}{1-p} - \frac{u_0}{1-p} = \frac{(n+1)u_n}{1-p} - \frac{1}{1-p} = \frac{1}{1-p}(u_n - 1)$$

**OU BIEN si on n'a pas réussi à traité la question 2.**

On a :  $(k+p+1)u_{k+1} = (k+1)u_k$  donc  $(k+2)u_{k+1} - (k+1)u_k = (1-p)u_{k+1}$ .

Par conséquent,  $\sum_{k=0}^{n-1} [(k+2)u_{k+1} - (k+1)u_k] = \sum_{k=0}^{n-1} (p+1)u_{k+1} = (1-p) \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}$ .

J'en déduis que :  $(n+1)u_n - u_0 = (1-p) \underbrace{\sum_{k=1}^n u_k}_{S_n}$ .

Ainsi,  $S_n = \frac{1}{1-p}((n+1)u_n - u_0) = \frac{1}{1-p}((n+1)u_n - 1)$  car  $u_0 = \frac{1}{\binom{p}{0}} = \frac{1}{1} = 1$ .

4. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $u_n > 0$  et  $\frac{u_n(n+1)(n+2)}{p!} = \frac{1}{\binom{n+p}{n}} \frac{(n+1)(n+2)}{p!} = \frac{n!p!}{(n+p)!} \frac{(n+1)(n+2)}{p!} = \frac{(n+2)!}{(n+p)!} \leq 1$  car  $p \geq 2$  donc  $0 < (n+2)! \leq (n+p)!$ . Par conséquent, en multipliant l'inégalité par  $u_n$ , j'obtiens :  $0 < u_n \leq \frac{p!}{(n+1)(n+2)}$ . Par suite,  $0 < (n+1)u_n \leq \frac{(n+1)p!}{(n+1)(n+2)} = \frac{p!}{(n+2)}$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p!}{n+2} = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0$ , le théorème des gendarmes assure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)u_n = 0$ . Alors en passant à la limite dans l'égalité obtenue à la question 2., je peux conclure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{p-1}$ .

**B. Cas général**

Notons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n \sum_{k=0}^n u_k$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $\forall k \in \mathbb{N}, \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{k+a}{k+b}$  donc,  $(k+b)u_{k+1} - (k+a)u_k = 0$  et par conséquent  $\sum_{k=1}^n [(k+b)u_{k+1} - (k+a)u_k] = 0$ .

D'autre part,  $\sum_{k=0}^n [(k+b)u_{k+1} - (k+a)u_k] = \sum_{k=0}^n [(k+b)u_{k+1} - \underbrace{(k+b-1)u_k}_{v_k} + (b-1-a)u_k]$

$$= [\sum_{k=0}^n (v_{k+1} - v_k)] + [(b-1-a)(\sum_{k=0}^n u_k)]$$

$$= v_{n+1} - v_0 + (b-1-a)S_n$$

$$= (n+b)u_{n+1} + (b-1)u_0 + (b-1-a)S_n.$$

Par conséquent,  $(n+b)u_{n+1} - (b-1)u_0 + (b-1-a)S_n = 0$ .

Ainsi, comme  $b - 1 - a \neq 0$ ,  $S_n = \frac{1}{a+1-b} [(n+b)u_{n+1} - (b-1)u_0]$ .

**Des suites produits**

1)  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$  et  $v_n = \ln(u_n)$ .

a. Démontrer l'inégalité  $\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ .

b. En déduire la limite de  $v$  puis celle de  $u$ .

c. Calculer  $u_{n+1}$ . Peut-on facilement conclure à la monotonie de  $u$  ?

a. Soit  $g : (x \mapsto \ln(1+x) - x)$  et  $h : (x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2})$ .  $g$  et  $h$  sont dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et  $\forall x \geq 0, g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} \leq 0$  et  $h'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1-(1-x)(1+x)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$ . Par conséquent  $g$  est décroissante et  $h$  est croissante sur l'intervalle  $\mathbb{R}^+$ . Et par suite,  $\forall x \geq 0, g(x) \leq g(0) = 0$  et  $h(x) \geq h(0) = 0$ .

0. J'en conclus que  $\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ .

b.  $\forall n \geq 1, v_n = \ln(u_n) = \ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)\right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ . Or,  $\forall k \in \mathbb{N}, \frac{k}{n^2} - \frac{(\frac{k}{n^2})^2}{2} \leq \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$ .

Donc,  $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n^2} - \frac{(\frac{k}{n^2})^2}{2}\right) \leq \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$ . Donc,  $\frac{1}{n^2} (\sum_{k=1}^n k) - \frac{1}{2n^4} (\sum_{k=1}^n k^2) \leq v_n \leq \frac{1}{n^2} (\sum_{k=1}^n k)$  et finalement,

$\forall n \geq 1, \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)}{2n^4} \leq v_n \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}$ . Or,  $\frac{n(n+1)}{2n^4} \sim_{+\infty} \frac{1}{2n^2}$  et  $\frac{n(n+1)}{2n^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{2}$ . Comme  $\frac{1}{2n^2} = o_{+\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc  $\frac{n(n+1)}{2n^4} = o_{+\infty} \left(\frac{n(n+1)}{2n^2}\right)$ . Alors les suites qui encadrent  $v_n$  sont équivalentes à  $\frac{1}{2}$  et tendent donc vers  $\frac{1}{2}$ . Ainsi, la suite  $v$  converge vers  $\frac{1}{2}$  et la suite  $u$  converge vers  $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ .

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{k}{(n+1)^2}\right) > 1$ .

Alors,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{k}{(n+1)^2}\right)}{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)} = 2 \frac{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{(n+1)^2}\right)}{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)} = 2 \frac{\prod_{k=1}^n \left(\frac{(n+1)^2+k}{n^2+k}\right)}{\prod_{k=1}^n \left(\frac{n^2+k}{n^2}\right)} = 2 \frac{\prod_{k=1}^n \left(\frac{(n+1)^2+k}{n^2+k}\right)}{\prod_{k=1}^n \left(\frac{n^2+k}{n^2}\right)} \left[\prod_{k=1}^n \left(\frac{n}{n+1}\right)\right]^2 \dots \text{difficile de conclure !}$

2) Soit  $a$  un réel positif.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \prod_{k=1}^n (1 + a^k)$  et  $v_n = \ln(u_n)$ .

a. Étudier la monotonie et le signe de chaque suite  $u$  et  $v$ .

b. Montrer que si  $a \in ]0, 1[$  alors  $v$  converge. Qu'en est-il de  $u$  ?

c. Montrer que si  $a \in ]1, +\infty[$  alors il existe un réel  $L$  tel que :  $v_n = \frac{n^2}{2} \ln(a) + \frac{n}{2} \ln(a) + L + o_{+\infty}(1)$ . Qu'en est-il de  $u$  ?

d. Que se passe-t-il quand  $a = 1$ ? quand  $a = 0$ ?

a.  $\forall n \geq 1, u_n > 0$  et  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1} (1+a^k)}{\prod_{k=1}^n (1+a^k)} = 1 + a^{n+1} > 1$ ; par conséquent,  $\forall n \geq 1, u_{n+1} > u_n$  et par suite  $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) > \ln(u_n) = v_n$ . Ainsi,  $u$  et  $v$  sont strictement croissantes.

b. On suppose que  $a \in ]0, 1[$ . Alors,  $\forall n > 0, v_n = \ln(\prod_{k=1}^n (1+a^k)) = \sum_{k=1}^n \ln(1+a^k) \leq \sum_{k=1}^n a^k = \frac{1-a^n}{1-a} a \leq \frac{a}{1-a}$ . Donc  $v$  est majorée et ainsi  $v$  converge.

$\forall n > 0, u_n = e^{v_n} \leq e^{\frac{a}{1-a}}$ . Donc  $u$  est aussi majorée puis convergente.

c. On suppose que  $a \in ]1, +\infty[$ .

$$v_n = \sum_{k=1}^n \ln(1+a^k) = \sum_{k=1}^n \ln(a^k(1+a^{-k})) = \sum_{k=1}^n [\ln(a^k) + \ln(1+a^{-k})] = \ln(a) \left[ \sum_{k=1}^n k \right] + \underbrace{\sum_{k=1}^n \ln(1+a^{-k})}_{\text{convergente car } a^{-1} \in ]0, 1[}$$

Posons  $w_n = \sum_{k=1}^n \ln(1+a^{-k})$ . Comme  $a^{-1} \in ]0, 1[$ ,  $w$  est convergente d'après b. Notons  $L$  la limite de  $w$ .

Alors,  $w_n = L + o_{+\infty}(1)$  et  $v_n = \ln(a) \frac{n(n+1)}{2} + L + o_{+\infty}(1) = \frac{n^2}{2} \ln(a) + \frac{n}{2} \ln(a) + L + o_{+\infty}(1)$ .

d. Si  $a = 1$  alors  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \prod_{k=1}^n (1+1) = 2^n$  et  $v_n = n \ln(2)$ . Donc  $u$  et  $v$  tendent vers  $+\infty$ .

Si  $a = 0$  alors  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \prod_{k=1}^n (1) = 1$  et  $v_n = 0$ . Donc  $u$  et  $v$  sont constantes et donc convergentes.

Ex 9 3)  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$ . Montrer que  $u$  est convergente.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 1$ . Posons  $v_n = \ln(u_n)$ .

Alors  $v_n = \ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)\right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2$ . Donc  $v$  est majorée. De plus,  $v_{n+1} - v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right) > 0$ . Donc  $v$  est strictement croissante. J'en déduis que  $v$  est convergente. Notons  $L$  sa limite finie. Alors la suite  $u$  qui vérifie  $\forall n, u_n = e^{v_n}$  est convergente de limite  $e^L$ .

Ex 9 4) Soit  $x$  un réel.  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on pose  $p_n(x) = \prod_{k=0}^n \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$ . Simplifier  $p_n(x) \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(x)$ .

$$p_n(x) \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right) = \left[\prod_{k=0}^n \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right] \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right) = \left[\prod_{k=1}^n \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right] \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^n}\right) = \left[\prod_{k=0}^{n-1} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right] \left(\frac{1}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\prod_{k=0}^{n-2} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right] \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2} \left[\prod_{k=0}^{n-2} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right] \left(\frac{1}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^{n-2}}\right) = \frac{1}{2^2} \left[\prod_{k=0}^{n-2} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right] \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^{n-2}}\right) = \dots$$

$$p_n(x) \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^0}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^0}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \operatorname{sh}(2x).$$

Donc si  $x \neq 0$  alors  $\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right) \neq 0$  et  $p_n(x) = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{2^{n+1} \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)} = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{2x} \frac{x}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}$ . Comme  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\operatorname{sh}(t)} = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2^n} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)} = 1$  et ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(x) = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{2x}$ .

## Deux suites d'intégrales

A)  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$ . Montrer que la suite  $u$  est convergente.

Soit  $\ell = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt$ . Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \frac{1}{n+1}$ . En déduire la limite de la suite  $u$ .

$\forall t \in [0, 1], t^n \geq t^{n+1}$  donc  $0 \leq \frac{1}{1+t+t^n} \leq \frac{1}{1+t+t^{n+1}} \leq 1$  et par suite  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ . Ainsi la suite  $u$  est croissante et majorée donc convergente.

$$\ell - u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} dt = \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)} dt.$$

Comme  $\forall t \in [0, 1], (1+t)(1+t+t^n) \geq 1$  donc  $0 \leq \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)} \leq t^n$ . Par conséquent,  $0 \leq \ell - u_n \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$ . Alors, comme les deux suites qui encadrent  $(\ell - u_n)$  tendent vers 0,  $(\ell - u_n)$  converge aussi vers 0 et ainsi,  $(u_n)$  converge vers  $\ell = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln(2)$ .

B) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt$ . appelée INTEGRALE DE WALLIS (il en existe plusieurs formes).

a. Montrer que la suite  $(W_n)$  est convergente. On ne demande pas de calculer la limite pour le moment.

b. Etablir une relation de récurrence entre  $W_n$  et  $W_{n-2}$ .

c. En déduire une expression de  $W_{2p}$  et de  $W_{2p+1}$  avec de factorielles puis de coefficients binomiaux.

d. Montrer que  $(nW_n W_{n-1})$  est constante et préciser sa valeur.

e. Déterminer la limite de  $W$ .

f. Démontrer par encadrement que :  $W_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2^n}}$ . En déduire que  $\binom{2p}{p} \sim_{p \rightarrow +\infty} \frac{4^p}{\sqrt{\pi p}}$ .

g.  $\forall n \in \mathbb{N}, (t \mapsto (\cos(t))^n)$  est continue sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  donc  $W_n$  existe.

Soit  $n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \cos(t) \in [0, 1]$  donc,  $0 \leq (\cos(t))^{n+1} \leq (\cos(t))^n \leq 1$ .

Par conséquent,  $0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{n+1} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt$  i.e.  $0 \leq W_{n+1} \leq W_n \leq \frac{\pi}{2}$ .

J'en déduis que la suite  $W$  est décroissante et bornée donc convergente.

h. Soit  $\varepsilon \in ]0, \pi[$ . Je cherche  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \geq n_0, |W_n| \leq \varepsilon$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}, |W_n| = W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt$ .

D'une part,  $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], 0 \leq (\cos(t))^n \leq 1$  donc,  $0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}$ .

D'autre part,  $\forall t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], 0 \leq \cos(t) \leq \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) < 1$  donc,  $0 \leq (\cos(t))^n \leq \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^n$ . Or,  $0 \leq \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) < 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^n = 0^+$ . Par conséquent, il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \geq n_0, \left|\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^n\right| = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^n \leq \frac{\varepsilon}{\pi}$ .

Alors,  $\forall n \geq n_0, \forall t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], 0 \leq (\cos(t))^n \leq \frac{\varepsilon}{\pi}$  et par croissance de l'intégrale,  $0 \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\pi} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\pi} dt = \frac{\varepsilon}{2}$ .

J'en déduis que  $\forall n \geq n_0, |W_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ . Je peux ainsi conclure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$ .

i. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{n+2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n (\cos(t))^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) (1 - \sin^2(t)) dt$$

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{-\sin(t) \cos^n(t)}{u'(t)} \right] \sin(t) dt = W_n + \left[ \frac{\cos^{n+1}(t)}{n+1} \sin(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+1}(t)}{n+1} \cos(t) dt = W_n - \frac{W_{n+2}}{n+1}.$$

Donc,  $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) W_{n+2} = W_n$  et ainsi,  $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$ .

j. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

1er cas : n pair i.e. n = 2p

$$W_{2p} = \frac{2p-1}{2p} W_{2p-2} = \left(\frac{2p-1}{2p}\right) \left(\frac{2p-3}{2p-2}\right) W_{2p-4} = \left(\frac{2p-1}{2p}\right) \left(\frac{2p-3}{2p-2}\right) \left(\frac{2p-5}{2p-4}\right) W_{2p-6} = \dots = \left(\frac{2p-1}{2p}\right) \left(\frac{2p-3}{2p-2}\right) \dots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} W_0$$

$$W_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots3\pi}{(2p)(2p-2)\dots4\cdot2} \text{ car } W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}$$

$$W_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots3\pi}{(2p)(2p-2)\dots4\cdot2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\dots4\times3\times2\pi}{(2p)^2(2p-2)^2\dots4^2\times2^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{4^p [p(p-1)\dots2\times1]^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \frac{\pi}{2}. \text{ Ainsi, } W_{2p} = \frac{1}{4^p} \binom{2p}{p} \frac{\pi}{2}.$$

2ème cas : n impair i.e. n = 2p + 1

$$W_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} W_{2p-1} = \left(\frac{2p}{2p+1}\right) \left(\frac{2p-2}{2p-1}\right) W_{2p-3} = \left(\frac{2p}{2p+1}\right) \left(\frac{2p-2}{2p-1}\right) \left(\frac{2p-4}{2p-3}\right) W_{2p-5} = \dots = \left(\frac{2p}{2p+1}\right) \left(\frac{2p-2}{2p-1}\right) \dots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} W_1$$

$$W_{2p+1} = \left(\frac{2p}{2p+1}\right) \left(\frac{2p-2}{2p-1}\right) \dots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \text{ car } W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1$$

$$W_{2p+1} = \left(\frac{2p}{2p+1}\right) \left(\frac{2p-2}{2p-1}\right) \dots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{(2p)^2(2p-2)^2\dots4^2\times2^2}{(2p+1)(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\dots4\times3\times2} = \frac{4^p [p(p-1)\dots2\times1]^2}{(2p+1)!} = \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!}. \text{ Ainsi, } W_{2p} = \frac{4^p}{(2p+1) \binom{2p}{p}}.$$

k. Posons  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $t_n = nW_n W_{n-1}$  et montrons que la suite  $t$  est constante.

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*. t_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n = (n+1)\frac{n}{n+1}W_{n-1}W_n = nW_{n-1}W_n = t_n.$$

$$\text{La suite } t \text{ est donc constante égale à } t_1 = W_1 W_0 = \frac{\pi}{2}. \text{ Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}^*, nW_{n-1}W_n = \frac{\pi}{2}.$$

l. D'après a., on sait que  $W$  est convergente. Notons  $L$  sa limite.

Alors en passant à la limite dans l'égalité  $W_{n-1}W_n = \frac{\pi}{2n}$ , on obtient  $L^2 = 0$  soit  $L = 0$ .

m.  $W$  est décroissante donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*, W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$  et  $nW_n W_{n+1} \leq nW_n^2 \leq nW_n W_{n-1} = \frac{\pi}{2}$

Or,  $nW_n W_{n-1} = \left[\frac{n}{n+1}\right] [(n+1)W_n W_{n-1}] = \left[\frac{n}{n+1}\right] \frac{\pi}{2} \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2}$ . Donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nW_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ . Alors, l'encadrement ci-dessus, permet de conclure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nW_n^2 = \frac{\pi}{2}$ .

Par conséquent,  $nW_n^2 \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2}$ . Alors,  $W_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$  et par conséquent,  $W_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ .

$$n. \text{ Alors, } \frac{1}{4^p} \binom{2p}{p} \frac{\pi}{2} = W_{2n} \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{4^p}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}}. \text{ Donc, } \binom{2p}{p} \sim_{+\infty} \frac{4^p}{\sqrt{\pi p}}.$$

### Limite, un équivalent ou un développement asymptotique de suite

Déterminer les limites quand  $n \rightarrow +\infty$  suivantes :

$$\begin{aligned} 1. & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n!)}{n^2} \\ 2. & \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{n}} \ln(1 - n + e^n) \\ 3. & \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) \right)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}} \\ 5. & \lim_{n \rightarrow +\infty} (ch(n))^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \ln \left( \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n-1}} \right)$$

1.  $0 \leq \frac{\ln(n!)}{n^2} \leq \frac{\ln(n^n)}{n^2} = \frac{n \ln(n)}{n^2} = \frac{\ln(n)}{n}$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} \stackrel{cc}{=} 0$ , nous pouvons conclure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n!)}{n^2} = 0$ .

2.  $e^{-\sqrt{n}} \ln(1 - n + e^n) = e^{-\sqrt{n}} \ln(e^n(e^{-n} - ne^{-n} + 1)) = e^{-\sqrt{n}} n + e^{-\sqrt{n}} \ln\left(e^{-n} - \frac{n}{e^n} + 1\right) = e^{-\sqrt{n} + \ln(n)} + e^{-\sqrt{n}} \ln\left(e^{-n} - \frac{n}{e^n} + 1\right)$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} \stackrel{cc}{=} 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(e^{-n} - \frac{n}{e^n} + 1\right) = 0$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{n}} \ln\left(e^{-n} - \frac{n}{e^n} + 1\right) = 0$ . De plus,  $\ln(n) = o_{+\infty}(\sqrt{n})$  donc  $-\sqrt{n} + \ln(n) \sim_{+\infty} -\sqrt{n}$  et par suite

$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\sqrt{n} + \ln(n) = -\infty$ . Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{n} + \ln(n)} = 0$ . J'en déduis que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{n}} \ln(1 - n + e^n) = 0$ .

$$3. \left( \cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) \right)^n = e^{n \ln\left[\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right]}. \text{ Posons } h_n = n \ln\left[\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right].$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ et } \ln(t) \sim_1 (t-1), \ln\left[\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right] \sim_{+\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) - 1.$$

De plus,  $\cos$  est dérivable en  $\frac{\pi}{3}$  et  $\cos'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$ ; donc,  $\cos(t) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sim_{\frac{\pi}{3}} -\frac{\sqrt{3}}{2}(t - \frac{\pi}{3})$ . Alors,  $\cos(t) - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(t - \frac{\pi}{3}) + o_{\frac{\pi}{3}}(t - \frac{\pi}{3})$ .

De même,  $\sin$  est dérivable en  $\frac{\pi}{6}$  et  $\sin'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$ ; donc,  $\sin(t) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sim_{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}}{2}(t - \frac{\pi}{6})$ . Alors,  $\sin(t) - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(t - \frac{\pi}{6}) + o_{\frac{\pi}{6}}(t - \frac{\pi}{6})$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\pi}{3n+1} = \frac{\pi}{3}$ ,  $\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{n\pi}{3n+1} - \frac{\pi}{3}\right) + o_{+\infty}\left(\frac{n\pi}{3n+1} - \frac{\pi}{3}\right)$  donc  $\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{n\pi}{3(3n+1)}\right) + o_{+\infty}\left(\frac{-\pi}{3(3n+1)}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6(3n+1)} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ .

Et Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\pi}{6n+1} = \frac{\pi}{6}$ ,  $\sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{n\pi}{6n+1} - \frac{\pi}{6}\right) + o_{+\infty}\left(\frac{n\pi}{6n+1} - \frac{\pi}{6}\right)$  donc,  $\sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{-\pi}{6(6n+1)}\right) + o_{+\infty}\left(\frac{-\pi}{6(6n+1)}\right) = \frac{1}{2} + \frac{-\pi\sqrt{3}}{12(6n+1)} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ .

Alors,  $\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) - 1 = \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6(3n+1)} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} + \frac{-\pi\sqrt{3}}{12(6n+1)} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}\left(\frac{2}{3n+1} - \frac{1}{6n+1}\right) + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}\left(\frac{9n+1}{(3n+1)(6n+1)}\right) + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ .

Or,  $\frac{9n+1}{(3n+1)(6n+1)} \sim_{+\infty} \frac{9n}{18n^2} = \frac{1}{2n}$ . Donc,  $\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) - 1 \sim_{+\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{12} \times \frac{1}{2n}$ . Ainsi,  $h_n \sim_{+\infty} n \times \frac{\pi\sqrt{3}}{12} \times \frac{1}{2n} = \frac{\pi\sqrt{3}}{12} \times \frac{1}{2}$ . Donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = \frac{\pi\sqrt{3}}{24}$ .

Autrement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) \right)^n = e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{24}}$ .

$$4. \frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}} = e^{\ln(n^{\sqrt{n+1}}) - \ln((n+1)^{\sqrt{n}})}. \text{ Posons, } h_n = \ln(n^{\sqrt{n+1}}) - \ln((n+1)^{\sqrt{n}}).$$

$$h_n = \ln(n^{\sqrt{n+1}}) - \ln((n+1)^{\sqrt{n}}) = \sqrt{n+1} \ln(n) - \sqrt{n} \ln(n+1) = \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \ln(n) - \sqrt{n} \ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{n} \ln(n) - \sqrt{n} \ln(n) - \sqrt{n}[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)].$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right). \text{ Alors,}$$

$$h_n = \left[1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \sqrt{n} \ln(n) - \sqrt{n} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = \frac{\sqrt{n} \ln(n)}{2n} - \frac{\sqrt{n} \ln(n)}{8n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{\sqrt{n} \ln(n)}{n^2}\right) - \frac{\sqrt{n}}{n} + \frac{\sqrt{n}}{2n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2}\right)$$

$$= \frac{\ln(n)}{2\sqrt{n}} - \frac{\ln(n)}{8n\sqrt{n}} + o_{+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n\sqrt{n}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \stackrel{\text{car}}{=} \frac{\ln(n)}{2\sqrt{n}} + o_{+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{2\sqrt{n}}\right) \sim_{+\infty} \frac{\ln(n)}{2\sqrt{n}}. \text{ Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \stackrel{CC}{\equiv} 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = 0.$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}} = e^0 = 1.$$

$$5. (ch(n))^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln(ch(n))}. \text{ Posons } h_n = \frac{1}{n} \ln(ch(n)). \text{ Alors, } h_n = \frac{1}{n} \ln(ch(n)) = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{e^{n+e^{-n}}}{2}\right) = \frac{1}{n} \ln\left(e^n \left(\frac{1+e^{-2n}}{2}\right)\right) = \frac{1}{n} \ln(e^n) + \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1+e^{-2n}}{2}\right) = 1 + \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1+e^{-2n}}{2}\right).$$

$$\text{Donc, } \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = 1. \text{ Ainsi, } \lim_{n \rightarrow +\infty} (ch(n))^{\frac{1}{n}} = e.$$

$$6. \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}-1} \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1} = 1. \text{ Donc, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}-1} = 1 \text{ et } \ln(t) \sim_1 t - 1. \text{ Alors, } \ln\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}-1}\right) \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}-1} - 1 = \frac{2}{\sqrt{n}-1} \sim_{+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}. \text{ Donc, } \sqrt{n} \ln\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}-1}\right) \sim_{+\infty} \sqrt{n} \frac{2}{\sqrt{n}} = 2. \text{ Ainsi,}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \ln\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}-1}\right) = 2.$$

Trouver un équivalent simple puis la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  de :

$$1. u_n = \frac{n! - 2 \operatorname{Arctan}(n) e^{\frac{n^2}{2}} - 9n^n}{\frac{1}{5 \sin\left(\frac{1}{n}\right)} - 100 \ln^2(n)}$$

$$2. u_n = \sin(n^2 + 1) - (-1)^n n$$

$$3. u_n = \ln\left(\frac{2 - \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)}{2 \cos\left(\frac{1}{n}\right)}\right)$$

$$4. v_n = \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln(n)}$$

$$5. u_n = (\ln(n) - n)^n \ln\left(\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$6. v_n = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) + a \frac{\operatorname{Arctan}(n)}{n} \text{ où } a \in \mathbb{R}$$

$$7. w_n = (ch(n))^a - (sh(n))^a \text{ où } a \in \mathbb{R}$$

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctan}(n) = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}^* \text{ donc, } \operatorname{Arctan}(n) \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2} \text{ et } 2 \operatorname{Arctan}(n) e^{\frac{n^2}{2}} \sim_{+\infty} \pi e^{\frac{n^2}{2}}$$

$$\frac{\frac{n^2}{2}}{n^n} = \frac{e^{\frac{n^2}{2}}}{e^{\ln(n^n)}} = \frac{e^{\frac{n^2}{2} - \ln(n^n)}}{e^{\frac{n^2}{2}}} = e^{\frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{2 \ln(n)}{n}\right)}. \text{ Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} \stackrel{CC}{\equiv} 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{n^2}{2}}}{n^n} = +\infty \text{ et par suite } n^n \ll_{+\infty} e^{\frac{n^2}{2}}. \text{ De plus, } n! \ll_{+\infty} n^n.$$

$$\text{Donc, } n! \ll_{+\infty} n^n \ll_{+\infty} e^{\frac{n^2}{2}} \text{ et par suite, } n! - 2 \operatorname{Arctan}(n) e^{\frac{n^2}{2}} - 9n^n \sim_{+\infty} -\pi e^{\frac{n^2}{2}}.$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ et } \sin(t) \sim_0 t, \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{n} \text{ donc, } \frac{1}{5 \sin\left(\frac{1}{n}\right)} \sim_{+\infty} \frac{n}{5}.$$

$$\text{De plus, } \ln^2(n) \ll_{+\infty} n. \text{ Donc, } 100 \ln^2(n) \ll_{+\infty} \frac{1}{5 \sin\left(\frac{1}{n}\right)} \text{ et par suite, } \frac{1}{5 \sin\left(\frac{1}{n}\right)} - 100 \ln^2(n) \sim_{+\infty} \frac{1}{5 \sin\left(\frac{1}{n}\right)} \sim_{+\infty} \frac{n}{5}.$$

$$\text{J'en déduis que } u_n \sim_{+\infty} -\frac{\pi e^{\frac{n^2}{2}}}{5} = -5\pi \frac{e^{\frac{n^2}{2}}}{n}.$$

$$2. \frac{\sin(n^2 + 1)}{(-1)^n n} = \underbrace{\frac{\sin(n^2 + 1)}{(-1)^n}}_{\text{suite bornée}} \times \underbrace{\frac{1}{n}}_{n \rightarrow +\infty} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0. \text{ Donc, } \sin(n^2 + 1) \ll_{+\infty} (-1)^n n. \text{ Ainsi, } u_n \sim_{+\infty} -(-1)^n n = (-1)^{n+1} n.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 - \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)}{2 \cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{2} = 1. \text{ Et, } \ln(t) \sim_1 t - 1. \text{ Donc, } \ln\left(\frac{2 - \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)}{2 \cos\left(\frac{1}{n}\right)}\right) \sim_{+\infty} \frac{2 - \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)}{2 \cos\left(\frac{1}{n}\right)} - 1 = \frac{2 - \tan\left(\frac{1}{n^2}\right) - 2 \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{2 \cos\left(\frac{1}{n}\right)} \sim_{+\infty} 1 - \frac{1}{2} \tan\left(\frac{1}{n^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$4. \text{ De plus, } 1 - \frac{1}{2} \tan\left(\frac{1}{n^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right) - \left(1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{24n^4} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = -\frac{1}{24n^4} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right). \text{ Ainsi, } u_n \sim_{+\infty} -\frac{1}{24n^4}.$$

$$5. u_n = (\ln(n) - n)^n \ln\left(\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^n (n - \ln(n))^n \ln\left(\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^n (n - \ln(n))^n \ln\left(\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^n e^{n \ln(n - \ln(n))} \ln\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{6n^6} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)$$

$$= (-1)^n e^{n \ln\left(n\left(1 - \frac{\ln(n)}{n}\right)\right)} \ln\left(\frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{1}{6n^4} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)$$

$$= (-1)^n e^{n \ln(n) + n \ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n}\right)} \left[ \ln\left(\frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{6n^4} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \right]$$

$$= (-1)^n e^{n \ln(n)} e^{n \ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n}\right)} [-2 \ln(n) + o_{+\infty}(1)]$$

$$= (-1)^n e^{n \ln(n)} e^{n \left[-\frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right)\right]} [-2 \ln(n) + o_{+\infty}(1)]$$

$$= (-1)^n e^{n \ln(n)} e^{\left[-\ln(n) - \frac{\ln(n)^2}{2n} + o_{+\infty}\left(\frac{\ln(n)^2}{n}\right)\right]} [-2 \ln(n) + o_{+\infty}(1)]$$

$$u_n \sim_{+\infty} (-1)^n e^{n \ln(n)} e^{[-\ln(n)]} e^{-\frac{\ln(n)^2}{2n} o_{+\infty}\left(\frac{\ln(n)^2}{n}\right)} [-2 \ln(n)]$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)^2}{n} \stackrel{CC}{\equiv} 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{\ln(n)^2}{2n} o_{+\infty}\left(\frac{\ln(n)^2}{n}\right)} = 1. \text{ Donc,}$$

$$u_n \sim_{+\infty} (-1)^n e^{n \ln(n)} e^{[-\ln(n)]} [-2 \ln(n)] = 2(-1)^{n+1} n^{n-1} \ln(n). \text{ Ainsi, } u_n \sim_{+\infty} 2(-n)^{n-1} \ln(n)$$

### Des développements asymptotiques de suites

1. Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Déterminer un développement asymptotique à la précision  $\frac{1}{n^p}$  de  $\arctan(n)$ .

2. Déterminer un développement asymptotique à la précision  $\frac{1}{n^3}$  de  $u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k!$ .

3. Montrer que  $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^2 + \frac{\ln(n)}{n^2} + \frac{(\ln(n))^3}{6n^3} + \frac{(\ln(n))^2}{n^3} + \frac{\ln(n)}{n^3} + o_{+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n^3}\right)$ .

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\ln(n)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\ln(n)} = e^{\ln(n) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = e^{\ln(n) \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]} = e^{\left[\frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{2n^2} + \frac{\ln(n)}{3n^3} + o_{+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n^3}\right)\right]}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{2n^2} + \frac{\ln(n)}{3n^3} + o_{+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n^3}\right) \stackrel{CC}{=} 0$  et  $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + t^3 \varepsilon(t)$  tq  $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$ ,  $e^{u_n} = 1 + u_n + \frac{u_n^2}{2} + \frac{u_n^3}{6} + u_n^3 \varepsilon(u_n)$  et par composition,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(u_n) = 0.$$

$$e^{u_n} = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^2 + \frac{\ln(n)}{n^2} + \frac{(\ln(n))^3}{6n^3} + \frac{(\ln(n))^2}{n^3} + \frac{\ln(n)}{n^3} + o_{+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n^3}\right).$$

### Équivalent par encadrement

1) Montrer que : pour tout entier naturel  $n$  non nul  $\left(\frac{2n+1}{3}\right) \sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq \left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{2}\right) \sqrt{n}$ . En déduire un équivalent simple de  $u_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$ .

2) Soit  $u$  une suite positive, décroissante et telle que :  $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$ . On pose  $a_n = n(u_n + u_{n+1})$ .

Montrer que :  $a_n \leq 2nu_n \leq \frac{n}{n-1} a_{n-1}$ . En déduire que  $u_n \sim \frac{1}{2n}$ .

$a_n = n(u_n + u_{n+1}) \leq n(u_n + u_n) \leq n(u_n + u_{n-1}) = \frac{n}{n-1}(n-1)(u_n + u_{n-1}) = \frac{n}{n-1}a_n$ . Or,  $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n-1}a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$ . Par encadrement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2nu_n = 1$ . Ainsi,  $u_n \sim \frac{1}{2n}$ .

$$3) \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1 + \sqrt{n-2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}$$

1. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

2. Exprimer  $u_{n+1}$  en fonction du  $u_n$ .

3. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq n$ .

4. Montrer que  $u_n = o(n)$ .

5. Montrer que  $u_n \sim \sqrt{n}$ .

6. Déterminer un réel  $\ell$  tel que :  $u_n = \sqrt{n} + \ell + o_{+\infty}(1)$ .

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \sqrt{n}$ . Donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

2.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 = n + u_n$  et  $u_{n+1} = \sqrt{n + u_n}$

3.  $u_0 = 0 \leq 0$ . Et  $u_n \leq n \Rightarrow u_{n+1}^2 = n + u_n \leq 2n \Rightarrow u_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}^2} \leq \sqrt{2n} \Rightarrow u_{n+1} \leq n + 1$ . CCL :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq n$ .

$$\begin{aligned} & \text{car } n+1 \geq \sqrt{2n} \\ & \text{puisque} \\ & n^2 + 2n + 1 - 2n > 0 \end{aligned}$$

4. et 5.  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq n-1 + u_{n-1} \leq 2n-2$  donc  $0 \leq \frac{u_n}{n} = \frac{\sqrt{n-1+u_{n-1}}}{n} \leq \frac{\sqrt{2n-1}}{n}$ . Or,  $\frac{\sqrt{2n-1}}{n} \sim \sqrt{\frac{2}{n}}$  donc  $\frac{\sqrt{2n-1}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  Donc  $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  ce qui signifie que  $u_n = o(n)$ . Alors,  $n + u_n \sim n$  et  $\sqrt{n + u_n} \sim \sqrt{n}$ . Donc  $u_{n+1} \sim \sqrt{n}$  et par conséquent  $u_n \sim \sqrt{n-1} \sim \sqrt{n}$ . Donc,  $u_n = o(n)$ .

6. ,  $u_n - \sqrt{n} = \sqrt{n + u_{n-1}} - \sqrt{n} = \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n+u_{n-1}}+\sqrt{n}} \underset{\substack{u_{n-1}=o(n-1)=o(n) \text{ donc} \\ \sqrt{n+u_{n-1}}=\sqrt{n}+o(\sqrt{n}) \\ \text{et} \\ \sqrt{n+u_{n-1}}+\sqrt{n}=2\sqrt{n}+o(\sqrt{n}) \sim 2\sqrt{n}}}{\sim} \frac{\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2}$ . Donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \sqrt{n} = \frac{1}{2}$ . Ainsi,  $u_n - \sqrt{n} = \frac{1}{2} + o_{+\infty}(1)$  et finalement,  $u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o_{+\infty}(1)$ .

$$\sqrt{n} + \frac{1}{2} + o_{+\infty}(1).$$

### Suites extraits:

Montrer que toute suite réelle non majorée a une suite extraite de limite  $+\infty$ .

On allons construire par récurrence une suite  $v$  extraite de  $u$  telle que :  $v$  strictement croissante et  $\forall n, v_n \geq n$ .

**Initialisation :** 0 ne majore pas  $u$  donc il existe  $p_0$  tel que  $u_{p_0} \geq 0$ . On pose  $v_0 = u_{p_0}$ .

**Propagation :** Soit  $n$  un entier naturel. Je suppose construits les premiers termes  $v_0, \dots, v_n$ .

Alors,  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, v_k \geq k$  et  $v_k = u_{p_k}$  avec  $p_k \in \mathbb{N}$  et  $p_n > p_{n-1} > \dots > p_0$  et  $v_n > v_{n-1} > \dots > v_0$ .

Posons  $M = \max(n+1, u_0, u_1, u_2, u_3, \dots, u_{p_n-2}, u_{p_n-1}, u_{p_n})$ .

$M$  ne majore pas  $u$  (puisque  $u$  n'est pas majorée) donc il existe un entier  $p_{n+1}$  tel que  $u_{p_{n+1}} > M$ . On pose  $v_{n+1} = u_{p_{n+1}}$ . Comme  $u_{p_{n+1}} \neq M, u_{p_{n+1}} \notin \{u_0, u_1, \dots, u_{p_n}\}$  et  $p_{n+1} \notin \{0, 1, 2, \dots, p_n\}$  et par suite,  $p_{n+1} > p_n$ . Comme  $u_{p_{n+1}} > \max(n+1, u_0, u_1, \dots, u_{p_n})$ ,  $u_{p_{n+1}} > u_{p_n}$  et  $u_{p_{n+1}} > n+1$ . OK !

**CCL :**  $\forall n, v_n = u_{p_n}$  et  $p_n > p_{n-1}$  et  $v_{n+1} > v_n \geq n$ . Alors  $\varphi: (\mathbb{N} \setminus \{p_n\}) \rightarrow \mathbb{N}$  est strictement croissante donc  $v$  est bien une suite extraite de  $u$ . De plus,  $\forall n, v_{n+1} > v_n$  donc  $v$  est strictement croissante .  $\forall n, v_n \geq n$ . Donc par le théorème de limite par encadrement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

Soit  $u$  une suite telle que :  $\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{n+p}{np}$ . Montrer que  $u$  est convergente et déterminer sa limite.

$\forall n > 0, 0 \leq u_{n+n} \leq \frac{n+n}{n^2} = \frac{2}{n}$ . Donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+n} = 0$ . Et  $\forall n > 0, 0 \leq u_{n+n+1} \leq \frac{n+n+1}{n(n+1)} = \frac{2n+1}{n^2+n} \sim \frac{2}{n}$ . Comme  $\frac{2n+1}{n^2+n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  et par suite, Donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+n+1} = 0$ .

Comme les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent vers 0, le cours assure que  $u$  est convergente de limite nulle.

Démontrer que les suites  $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$  divergent sans limites.

$(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$  sont bornées donc si elles ont une limite, ces limites sont finies.

Imaginons un instant que  $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Notons  $L$  sa limite. Alors  $L \in [-1, 1]$  puisque  $\forall n, -1 \leq \cos(n) \leq 1$ .

De plus,  $\forall n, \cos(n+1) = \cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1)$  donc,  $\sin(n) = \frac{1}{\sin(1)}[\cos(n)\cos(1) - \cos(n+1)]$ . Comme  $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $L$ ,

$(\cos(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$  converge aussi vers  $L$  et par conséquent,  $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $L' = \frac{1}{\sin(1)}[L\cos(1) - L] = L\frac{1-\cos(1)}{\sin(1)}$ .

Enfin,  $\forall n, \cos^2(n) + \sin^2(n) = 1$ . Donc,  $L^2 + L'^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^2(n) + \sin^2(n) = 1$ . Donc il existe un réel  $\theta$  tel que  $L = \cos(\theta)$  et  $L' = \sin(\theta)$ . Alors par passage

à la limite dans les égalités:  $\forall n, \begin{cases} \cos(n+1) = \cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1) \\ \sin(n+1) = \sin(n)\cos(1) + \cos(n)\sin(1) \end{cases}$ , j'obtiens :

$\begin{cases} \cos(\theta) = \cos(\theta)\cos(1) - \sin(\theta)\sin(1) = \cos(\theta+1) \\ \sin(\theta) = \sin(\theta)\cos(1) + \cos(\theta)\sin(1) = \sin(\theta+1) \end{cases}$ . Par conséquent, il existe un entier  $k$  tel que  $\theta = \theta + 1 + 2k\pi$  i.e.  $2k\pi = -1$ .  
IMPOSSIBLE

Ainsi, le réel  $L$  n'existe pas et puisque ( $L'$  existe  $\Rightarrow L$  existe), le réel  $L'$  n'existe pas non plus. Ainsi, les suites  $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$  divergent sans limites.

### Borne sup . inf.

Déterminer les bornes supérieure et inférieure de  $A = \left\{ \frac{2p}{2pq+3} / (p, q) \in \mathbb{N}^* \right\}$

- $A$  est une partie de  $\mathbb{R}$  non vide (car en prenant  $p = q = 1$ , on prouve que  $\frac{2}{2+3} = \frac{2}{5} \in A$ ).

De plus, soit  $(p, q) \in \mathbb{N}^*$ .  $1 \leq q$  donc  $0 < 2p \leq 2pq$  (car  $p > 0$ ) et par suite,  $0 < 2p \leq 2pq < 2pq + 3$  donc  $0 < \frac{2p}{2pq+3} < 1$ .

J'en déduis que  $A$  est minorée par 0 et majorée par 1. J'en conclus que  $A$  admet des bornes supérieure et inférieure finies.

- 0 minore  $A$ . Posons  $\forall q \in \mathbb{N}^*, u_q = \frac{2}{2q+3}$ . Alors,  $\forall q \in \mathbb{N}^*, u_q = \frac{2}{2q+3} \in A$  (il suffit de prendre  $p = 1$ ). De plus, la suite  $(u_q)$  tend vers 0.

J'en conclus par la caractérisation séquentielle de la borne inf. que  $\inf(A) = 0$ .

- 1 majore  $A$ . Posons  $\forall p \in \mathbb{N}^*, v_p = \frac{2p}{2p+3}$ . Alors,  $\forall p \in \mathbb{N}^*, v_p = \frac{2p}{2p+3} \in A$  (prendre  $q = 1$ ). De plus,  $v_p \sim 1$  donc la suite  $(v_p)$  tend vers 1.

J'en conclus par la caractérisation séquentielle de la borne sup. que  $\sup(A) = 1$ .

Soient  $A$  et  $B$  deux parties bornées de  $\mathbb{R}$  non vides.

1. Montrer que  $A \subset B \Rightarrow \inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$ .

2. On note  $A + B = \{x + y / x \in A \text{ et } y \in B\}$ . Montrer que  $A + B$  est bornée et  $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$  et  $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ .

3. Soit  $C = \left\{ \frac{|a-a'|}{a} / a \in A \text{ et } a' \in A \right\}$ .

Montrer que  $C$  admet des bornes sup et inf finies et les exprimer en fonction des bornes sup et inf de  $A$ .

1.  $A$  et  $B$  sont non vides et bornées. Donc,  $\inf B, \inf A, \sup A$  et  $\sup B$  existent et sont finies. De plus,  $\forall a \in A, a \in B$  et par conséquent,  $\inf B \leq a \leq \sup B$ . Donc,  $\inf B$  minore  $A$  et  $\sup B$  majore  $A$ . Comme  $\inf A$  est le plus grand majorant de  $A$ , nécessairement,  $\inf B \leq \inf A$  et comme  $\sup A$  est le plus petit minorant de  $A$ , nécessairement,  $\sup A \leq \sup B$ .

2.  $A + B = \{x + y / x \in A \text{ et } y \in B\}$ .

$\forall x \in A$  et  $\forall y \in B, x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$  donc  $x + y \in \mathbb{R}$ . Ainsi,  $A + B \subset \mathbb{R}$ .

$A$  et  $B$  étant non vides,  $A$  contient au moins un élément  $a$  et  $B$  contient au moins un élément  $b$  et par conséquent  $A + B$  contient l'élément  $a + b$  et est donc non vide.

De plus,  $\forall x \in A, \forall y \in B, \inf A \leq x \leq \sup A$  et  $\inf B \leq y \leq \sup B$  donc  $\inf A + \inf B \leq x + y \leq \sup A + \sup B$ . Donc,  $\inf A + \inf B$  minore  $A + B$  et  $\sup A + \sup B$  majore  $A + B$ .

De plus, d'après la caractérisation séquentielle de la borne inf, il existe une suite  $(a_n)$  d'éléments de  $A$  qui converge vers  $\inf A$  et une suite  $(b_n)$  d'éléments de  $B$  qui converge vers  $\inf B$ . Alors la suite  $(a_n + b_n)$  est une suite d'éléments de  $A + B$  qui converge vers  $\inf A + \inf B$ . Comme, de plus,  $\inf A + \inf B$  minore  $A + B$ , la même caractérisation de la borne inf, permet de conclure que  $\inf A + \inf B$  est la borne inférieure de  $A + B$  i.e.  $\inf A + \inf B = \inf(A + B)$ . De même, on prouve que  $\sup A + \sup B = \sup(A + B)$ .

3.  $C = \left\{ |a - a'| / a \in A \text{ et } a' \in A \right\}$ .

Soient  $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$  croissante et  $E = \{a \in [0,1] / f(a) \geq a\}$ .

1. Justifier que  $E$  admet une borne supérieure notée  $s$ .

2. Montrer par l'absurde que  $f(s) \leq s$ .

3. Montrer par l'absurde que  $f(s) \geq s$ .

4. Qui est  $s$  pour la fonction  $f$  ?

1.  $E \subset [0,1]$ . De plus,  $f(0) \geq 0$  donc  $0 \in E$  et par conséquent,  $E$  est non vide. Donc  $E$  admet une borne sup finie notée  $s$ .

2. Imaginons un instant que  $f(s) > s$ . Considérons  $c \in ]s, f(s)[$ . Alors  $c > s$  donc par croissance de  $f, f(c) \geq f(s)$ . De plus, comme  $c > s = \sup(E), c \notin E$  donc  $f(c) < c$ . Alors  $c > f(s)$  ce qui contredit .... J'en déduis que  $f(s) \leq s$ .

3. Imaginons un instant que  $f(s) < s$ . Alors  $f(s)$  n'est pas un majorant de  $E$  (car  $s$  est le plus petit majorant de  $E$ ) donc il existe  $b \in E$  et  $f(s) < b \leq s$ .

Donc d'une part,  $b \in E, f(b) \geq b$  et par suite,  $f(s) > f(b)$ . Et, d'autre part, puisque  $b \geq s$  et  $f$  croissante,  $f(b) \geq f(s)$  ce qui contredit .... J'en conclus que  $f(s) = s$ .

4.  $s$  est donc un point fixe de  $f$ . Nous venons de prouver que toute fonction de  $[0,1]$  dans  $[0,1]$  croissante admet un point fixe.

Soit  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée de nombres réels. On note  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{x}_n = \sup \{u_k / k \geq n\}$  et  $\mathbf{y}_n = \inf \{u_k / k \geq n\}$ . On définit ainsi deux nouvelles suites  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ . On note  $\mathbf{A} = \{\mathbf{u}_k / k \in \mathbb{N}\}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{A}_n = \{\mathbf{u}_k / k \geq n\}$ .

1. Justifier que les suites  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont bien définies.

2. Montrer que  $\mathbf{x}$  est décroissante et  $\mathbf{y}$  est croissante.

3. En déduire que  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont convergentes et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{y}_n$ .

4. Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{y}_n = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{u}_n = L$ .

5. Prouver en utilisant la définition de la convergence que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{u}_n = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{y}_n = L$ .

1.  $u$  est bornée donc il existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que  $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$ . Donc,  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n, m \leq u_k \leq M$ . Autrement dit,  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{A}_n = \{\mathbf{u}_k / k \geq n\}$  est bornée donc  $\mathbf{x}_n = \sup(\mathbf{A}_n)$  et  $\mathbf{y}_n = \inf(\mathbf{A}_n)$  existent et sont finies.

2.  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{A}_{n+1} \subset \mathbf{A}_n$ . Donc,  $\forall n \in \mathbb{N}, \sup(\mathbf{A}_n) \geq \sup(\mathbf{A}_{n+1}) \geq \inf(\mathbf{A}_{n+1}) \geq \inf(\mathbf{A}_n)$  i.e.  $\mathbf{x}_n \geq \mathbf{x}_{n+1} \geq \mathbf{y}_{n+1} \geq \mathbf{y}_n$ . Donc,  $\mathbf{x}$  est décroissante et  $\mathbf{y}$  est croissante.

3.  $\forall n \in \mathbb{N}, m$  minore  $\mathbf{A}_n$  et  $M$  majore  $\mathbf{A}_n$  donc  $M \geq \mathbf{x}_n \geq \mathbf{y}_n \geq m$ . Donc  $\mathbf{x}$  est minore par  $m$  et décroissante donc convergente. Et  $\mathbf{y}$  est majorée par  $M$  et croissante donc convergente. Alors en passage à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{y}_n$ .

4.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbf{A}_n$  donc  $\mathbf{x}_n \geq u_n \geq \mathbf{y}_n$ . Donc si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{y}_n$  alors  $(u_n)$  converge aussi vers cette limite commune.

5. Supposons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \in \mathbb{R}$ . Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ .  $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geq n_0, |u_n - L| \leq \varepsilon$  i.e.  $u_n \in [L - \varepsilon, L + \varepsilon]$ . Donc,  $\forall n \geq n_0, L - \varepsilon$  minore  $A_n$  et  $L + \varepsilon$  majore  $A_n$ . Par conséquent,  $L + \varepsilon \geq x_n \geq y_n \geq L - \varepsilon$ . Autrement dit,  $\forall n \geq n_0, |x_n - L| \leq \varepsilon$  et  $|y_n - L| \leq \varepsilon$ . Il en résulte que  $x$  et  $y$  convergent et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = L$ .

### Suites adjacentes

Soit  $(a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$  tel que  $a \leq b$ . On définit quatre suites récurrentes de la manière suivante :

$$u_0 = w_0 = a, v_0 = t_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, t_{n+1} = \frac{w_n + t_n}{2} \text{ et } \frac{1}{w_{n+1}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t_n} + \frac{1}{w_n} \right).$$

- 1) Justifier que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+*2}, \frac{2}{x+y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ .

#### **A. Suites $u$ et $v$**

2) Montrer que  $u$  et  $v$  sont adjacentes. On note  $M(a, b)$  leur limite commune appelée la moyenne arithmético-géométrique de  $a$  et  $b$ .

3) Montrer que  $M(a, b) = M(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2})$ . En déduire que  $M(a, b) = M(b, a)$ .

4) Montrer que  $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, M(ta, tb) = tM(a, b)$ .

$$1. \text{ Soit } (x, y) \in \mathbb{R}^{+*2}, \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 2\sqrt{xy}}}{2} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{2} \geq 0. \text{ Donc, } \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Alors  $\sqrt{\frac{1}{x+y}} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{xy}}$  i.e.  $0 < \frac{1}{\sqrt{xy}} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{xy}}$  et par suite  $\frac{2}{x+y} \leq \sqrt{xy}$ . Ainsi,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+*2}, \frac{2}{x+y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ .

$$2. u_0 = a, v_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} \geq 0. \text{ Donc } \forall n \geq 1, v_n \geq u_n.$$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) \stackrel[\substack{\text{car} \\ v_n \geq u_n}]{\geq} 0 \text{ et } v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \stackrel[\substack{\text{car} \\ v_n \geq u_n}]{\leq} 0. \text{ Donc } u \text{ est croissante et } v \text{ est décroissante. De plus, } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_1 \geq v_n \geq u_n \geq u_0. \text{ Par conséquent } u \text{ et } v \text{ ont chacun une limite finie : notons } L \text{ celle de } u \text{ et } L' \text{ celle de } v.$$

Alors  $L' = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{L+L'}{2}$ . Donc  $L = L'$ . Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$  et finalement  $u$  et  $v$  sont adjacentes. On note  $M(a, b)$  la limite commune.

3. Posons  $\alpha_n = u_{n+1}$  et  $\beta_n = v_{n+1}$ . Alors,  $M(a, b) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$  et  $M(a, b) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n$ . Par conséquent,  $M(a, b) = M(u_0, v_0) = M(\alpha_0, \beta_0) = M(u_1, v_1) = M(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2})$ .

Les suites  $\alpha$  et  $\beta$  restent inchangées si on échange les valeurs de  $u_0$  et  $v_0$ . Donc,  $M(a, b) = M(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}) = M(\sqrt{ba}, \frac{b+a}{2}) = M(b, a)$ .

4. Soit  $t$  un réel strictement positif. Posons  $A_n = tu_n$  et  $B_n = tv_n$ .

$$\text{Alors, } \forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} = tu_{n+1} = t\sqrt{u_n v_n} = \sqrt{tu_n tv_n} = \sqrt{A_n B_n} \text{ et } B_{n+1} = tv_{n+1} = t\frac{u_n + v_n}{2} = \frac{tu_n + tv_n}{2} = \frac{A_n + B_n}{2}.$$

Ainsi,  $A$  et  $B$  sont adjacentes de limite commune  $M(A_0, B_0) = M(ta, tb)$ .

De plus,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} tu_n = t \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = tM(a, b)$ . Alors par unicité de la limite,  $M(ta, tb) = tM(a, b)$ .

### **B. Suites $w$ et $t$**

5) Montrer que  $t$  et  $w$  sont monotones.

6) Prouver que  $\forall n \in \mathbb{N}, |t_{n+1} - w_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |t_n - w_n|$ .

7) En déduire que  $t$  et  $w$  sont adjacentes. On note  $L(a, b)$  leur limite commune

8) En calculant  $t_n w_n$ , déterminer  $L(a, b)$ .

9) Comparer  $L(a, b)$  et  $M(a, b)$ .

10) Comparer alors  $u_n$  et  $t_n$  pour  $n$  assez grand. Pour quelles valeurs de  $a$  et  $b$ , a-t-on  $L(a, b) = M(a, b)$ ?

5.  $w_0 = a, v_0 = b$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = \frac{w_n + t_n}{2}$  et  $\frac{1}{w_{n+1}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t_n} + \frac{1}{w_n} \right)$ . On montre facilement par récurrence que  $\forall n, w_n > 0$  et  $t_n > 0$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $\frac{t_{n+1}}{w_{n+1}} = \left( \frac{w_n + t_n}{2} \right) \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t_n} + \frac{1}{w_n} \right) = \frac{1}{4} \left( 2 + \frac{w_n}{t_n} + \frac{t_n}{w_n} \right)$ . Or,  $\forall t > 0, t + \frac{1}{t} - 2 = \frac{t^2 - 2t + 1}{t} = \frac{(t-1)^2}{t} \geq 0$ . Donc  $\forall t > 0, t + \frac{1}{t} \geq 2$  et par conséquent,  $\frac{w_n}{t_n} + \frac{t_n}{w_n} \geq 2$  et finalement,  $\frac{t_{n+1}}{w_{n+1}} \geq 1$ . Donc,  $t_{n+1} \geq w_{n+1}$ . J'en déduis que et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n \geq w_n$ . Alors,

$$t_{n+1} - t_n = \frac{w_n - t_n}{2} \leq 0 \text{ et } \frac{1}{w_{n+1}} - \frac{1}{w_n} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t_n} - \frac{1}{w_n} \right) \leq 0 \text{ donc } w_n \leq w_{n+1}. \text{ Ainsi, } t \text{ est décroissante et } w \text{ est croissante.}$$

$$6) \text{ Soit } n \in \mathbb{N}. |t_{n+1} - w_{n+1}| = \left| \frac{w_n + t_n}{2} - \left( \frac{2w_n t_n}{t_n + w_n} \right) \right| = \left| \frac{1}{2(t_n + w_n)} (w_n^2 + t_n^2 - 2w_n t_n) \right| = \left| \frac{1}{2(t_n + w_n)} (w_n - t_n)^2 \right| = \frac{1}{2(t_n + w_n)} |w_n - t_n| |w_n - t_n|.$$

$$Or, |w_n - t_n| \leq |w_n + t_n| = w_n + t_n. \text{ Donc, } \frac{|w_n - t_n|}{w_n + t_n} \leq 1 \text{ et finalement, } |t_{n+1} - w_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |w_n - t_n|.$$

Alors on montre par récurrence que  $\forall n, |t_n - w_n| \leq \frac{1}{2^n} |w_0 - t_0|$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} |w_0 - t_0| = 0$  (puisque  $\frac{1}{2} < 1$ ),  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |t_n - w_n| = 0$  et par conséquent  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n - w_n = 0$ . Les suites  $t$  et  $w$  sont adjacentes et sont donc convergentes de même limite commune finie  $L(a, b)$ .

$$\forall n, t_{n+1} w_{n+1} = \left( \frac{w_n + t_n}{2} \right) \left( \frac{2w_n t_n}{t_n + w_n} \right) = w_n t_n. \text{ Donc, la suite } tw \text{ est constante égale à } w_0 t_0 = ab. \text{ Donc } L(a, b)^2 = ab \text{ et } L(a, b) = \sqrt{ab}.$$

7) Montrons par récurrence sur  $n$  que  $\forall n \geq 1, v_n \geq t_n$  et  $y_n \geq w_n$ . Alors par passage à la limite dans l'un de ces inégalités, j'obtiens :  $M(a, b) \geq L(a, b)$ . Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - t_n = M(a, b) - L(a, b) \geq 0$ .

Si  $M(a, b) > L(a, b)$  alors à partir d'un certain rang,  $u_n - t_n > 0$ .

Si  $M(a, b) = L(a, b)$  alors on ne peut rien dire sur le signe de  $u_n - t_n$ .

Enfin, si  $a = b$  alors  $M(a, a) = L(a, a) = a$  et toutes les suites sont constantes égales à  $a$ .

Soit  $a_0$  et  $b_0$  deux réels tels que :  $0 < a_0 < b_0$  et  $\forall n, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \sqrt{a_n b_n})$  et  $b_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + \sqrt{a_n b_n})$ .

Montrer que les deux suites  $a$  et  $b$  sont bien définies et qu'elles convergent vers une même limite.

On montre facilement par récurrence que  $\forall n, a_n$  et  $b_n$  existent et sont strictement positifs. Ainsi, les deux suites  $a$  et  $b$  sont bien définies.

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \sqrt{a_n b_n} - b_n - \sqrt{a_n b_n}) = \frac{1}{2}(a_n - b_n). \text{ La suite } a - b \text{ est donc géométrique de raison } \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ainsi, } \forall n, a_n - b_n = \frac{1}{2^n}(a_0 - b_0) \text{ donc } 0 \leq a_n \leq b_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - b_n = 0^-.$$

$\forall n, a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n + \sqrt{a_n b_n}) - a_n = \frac{1}{2}(\sqrt{a_n b_n} - a_n) = \frac{1}{2}\sqrt{a_n}(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}) \underset{\substack{\text{car} \\ b_n \geq a_n}}{\leq} 0$ . Donc  $a$  est croissante.

$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}(b_n + \sqrt{a_n b_n}) - b_n = \frac{1}{2}(\sqrt{a_n b_n} - b_n) = \frac{1}{2}\sqrt{b_n}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}) \underset{\substack{\text{car} \\ b_n \geq a_n}}{\leq} 0$ . Donc  $b$  est croissante.

Ainsi,  $a$  et  $b$  sont adjacentes et par conséquent,  $a$  et  $b$  convergent vers la même limite.

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle et bornée. On note  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \sup \{u_k / k \geq n\}$  et  $y_n = \inf \{u_k / k \geq n\}$ . On définit ainsi deux nouvelles suites  $x$  et  $y$ . On note  $A = \{u_k / k \in \mathbb{N}\}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \{u_k / k \geq n\}$ .

6. Justifier que les suites  $x$  et  $y$  sont bien définies.

7. Montrer que  $x$  est décroissante et  $y$  est croissante.

8. En déduire que  $x$  et  $y$  sont convergentes et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ .

9. Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ .

5. Prouver en utilisant la définition de la convergence que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = L$ .

2.  $\forall n, \{u_k / k \geq n+1\} \subset \{u_k / k \geq n\}$ . i.e.  $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$ . Par conséquent,  $\forall n, \inf(A_n) \leq \inf(A_{n+1})$  et  $\sup(A_{n+1}) \leq \sup(A_n)$ . Ainsi,  $x$  est décroissante et  $y$  est croissante.

3.  $\forall n, x_n \geq u_0 \geq y_n$ . Donc,  $x$  est minorée et  $y$  est majorée. Alors, comme  $x$  décroissante et  $y$  croissante,  $x$  et  $y$  sont convergentes. Alors, en passant à la limite dans l'inégalité,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \geq u_0 \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ .

4. On suppose ici que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = L$ .  $\forall n, u_n \in A_n$  donc,  $x_n \geq u_n \geq y_n$ . Alors le théorème de limite par encadrement assure que la suite  $u$  converge vers  $L$ .

5. On suppose ici que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ . Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ . Il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \geq n_0, L - \varepsilon \leq u_n \leq L + \varepsilon$ . Donc  $L - \varepsilon$  minore  $A_{n_0}$  et  $L + \varepsilon$  majore  $A_{n_0}$ . Et comme  $\forall n \geq n_0, A_n \subset A_{n_0}$ ,  $\forall n \geq n_0, L - \varepsilon$  minore  $A_n$  et  $L + \varepsilon$  majore  $A_n$ . Par conséquent  $\forall n \geq n_0, L - \varepsilon \leq y_n$  et  $x_n \leq L + \varepsilon$ . Et ainsi,  $\forall n \geq n_0, L - \varepsilon \leq y_n \leq x_n \leq L + \varepsilon$ . J'en déduis que  $\forall n \geq n_0, -\varepsilon \leq y_n - L \leq x_n - L \leq \varepsilon$  et par suite,

$\forall n \geq n_0, |y_n - L| \leq \varepsilon$  et  $|x_n - L| \leq \varepsilon$ . J'en conclus que  $x$  et  $y$  convergent aussi vers  $L$ .

### Suites récurrentes

Soit  $u$  une suite réelle telle que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [\frac{1}{2}, 1[$  et  $v$  la suite réelle définie par :  $\begin{cases} u_0 = v_0 \\ \forall n \geq 1, v_n = \frac{v_{n-1} + u_n}{1 + u_n v_{n-1}}. \end{cases}$

1. Justifier que :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n$  existe et  $0 < v_n < 1$ .

2. Justifier que  $v$  est convergente.

3. Déterminer la limite de  $v$ .

1. On montrera facilement par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n$  existe et  $0 < v_n < 1$ .

$v_0 > 0$  car  $v_0 \in [\frac{1}{2}, 1[$  et  $[v_{n-1} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 + u_n v_{n-1} > 0 \\ v_{n-1} + u_n > 0 \end{cases} \Rightarrow v_n = \frac{v_{n-1} + u_n}{1 + u_n v_{n-1}}$  existe et  $v_n > 0]$ . Donc  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0$ .

On montre aussi par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n$  existe et  $1 > v_n$ .

$v_0 < 1$  car  $v_0 \in [\frac{1}{2}, 1[$  et  $[v_{n-1} < 1 \Rightarrow v_n - 1 = \frac{v_{n-1} + u_n}{1 + u_n v_{n-1}} - 1 = \frac{v_{n-1} + u_n - 1 - u_n v_{n-1}}{1 + u_n v_{n-1}} = \frac{(v_{n-1}-1)(1-u_n)}{1 + u_n v_{n-1}} < 0]$ . Donc  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n < 1$ . Ainsi,  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < v_n < 1$ .

2.  $v_n - v_{n-1} = \frac{v_{n-1} + u_n}{1 + u_n v_{n-1}} - v_{n-1} = \frac{v_{n-1} + u_n - v_{n-1} - u_n v_{n-1}^2}{1 + u_n v_{n-1}} = \frac{u_n(1-v_{n-1}^2)}{1 + u_n v_{n-1}} > 0$ . Donc  $v$  est strictement croissante et par suite  $v$  est convergente. Notons  $L$  sa limite.

3.  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{v_{n-1} + u_n}{1 + u_n v_{n-1}}$  donc  $u_n = \frac{v_n - v_{n-1}}{v_n v_{n-1} - 1}$ .

Si  $L \neq 1$  alors  $(u_n)$  est convergente de limite  $\frac{L-L}{L^2-1} = 0$  ce qui est impossible puisque  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [\frac{1}{2}, 1[$ . J'en conclus que  $L = 1$ .

Soit  $a_0$  et  $b_0$  deux réels tels que :  $0 < a_0 < b_0$  et  $\forall n, a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n + b_n}$  et  $b_{n+1} = \frac{b_n^2}{a_n + b_n}$

1. Montrer que la suite  $a - b$  est constante.

2. Étudier la convergence des suites  $a$  et  $b$ .

Déterminer une forme explicite des suites récurrentes suivantes :

1.  $u_0 = 1$  et  $\forall n, u_{n+1} = ne^n u_n$

2.  $\forall n, \sqrt[5]{u_n} = e$ .

3.  $u_0 = 1$  et  $\forall n, u_{n+1} = 2u_n - n + 1$ .

4.  $u_0 = \frac{1}{2}$  et  $u_1 = 1$  et  $\forall n, u_{n+2} = \frac{2(u_{n+1})^2}{u_n}$ .

### Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{6}{2+u_n^2}$ . Montrer que  $u$  est bornée et divergente.

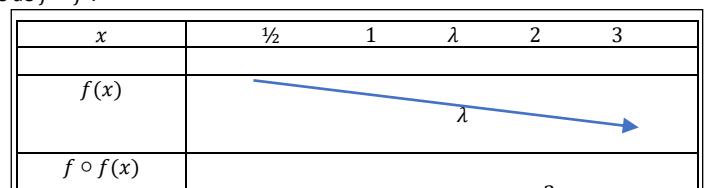
Soit  $f: (x \mapsto \frac{6}{2+x^2})$ .  $Df = \mathbb{R}$  et  $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{+*}$ .  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$  existe et  $u_n > 0$ .

Comme  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \neq +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 \neq 0$ , les limites possibles de  $u$  sont les points fixes de  $f$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . Or,  $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{6}{2+x^2} = x \Leftrightarrow x^3 + 2x - 6 = 0$ . Or,  $h: (x \mapsto x^3 + 2x - 6)$  est strictement croissante et continue et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty > 0$  et  $h(0) = -6 < 0$ . Donc,  $h$  s'annule une et une seule fois en un réel  $\lambda$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . Ainsi,  $f$  admet un seul point fixe  $\lambda$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . Donc, ce point fixe  $\lambda$  est la seule limite possible de  $u$ . Comme  $h(1) < 0 < h(2), \lambda \in [1, 2]$ .

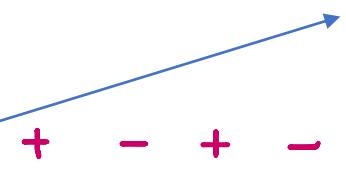
$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et  $\forall x > 0, f'(x) = 6 \frac{-2x}{(2+x^2)^2} < 0$ . Donc  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $\mathbb{R}^{+*}$ . De plus,  $f$  est continue et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \neq +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3, f(\mathbb{R}^{+*}) \subset [0, 3]$  et  $f([0, 3]) \subset [f(3), f(0)] = [\frac{6}{11}, 3] \subset [\frac{1}{2}, 3]$ . J'en déduis que  $\forall n \geq 2, u_n \in [\frac{1}{2}, 3]$ .

Comme  $f$  est strictement décroissante, les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont monotones et de monotonie contraire. Comme  $(u_n)$  est bornée, les suites extraites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont bornées et finalement convergentes. On note  $L$  et  $L'$  leurs limites respectives.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) =$

$\frac{6}{2+(\frac{6}{2+u_{2n}^2})^2}$ . Alors  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+2} \underset{\substack{\text{car } f \circ f \\ \text{continue}}}{=} f(f(L))$ . Donc,  $L$  est un point fixe de  $f \circ f$ .



$$\begin{aligned}
f \circ f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{6}{2 + (\frac{6}{2+x^2})^2} = x \\
\Leftrightarrow 3(2+x^2)^2 &= x(2+x^2)^2 + 18x \\
\Leftrightarrow 3(4+4x^2+x^4) &= 22x + 4x^3 + x^5 \\
\Leftrightarrow x^5 - x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 22x - 12 &= 0 \\
\Leftrightarrow (x^3 + 2x - 6)(x^2 - 3x + 2) &= 0 \\
\Leftrightarrow (x^3 + 2x - 6)(x^2 - 3x + 2) &= 0 \\
\Leftrightarrow x = \lambda \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = 2.
\end{aligned}$$



Donc  $\lambda, 1$  et  $2$  sont les limites possibles de  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$ .

$$\text{De plus, } f \circ f(x) - x = \frac{-(x^3+2x-6)(x^2-3x+2)}{2(2+x^2)^2+36} = \frac{-(x-\lambda)(x^2+bx+c)(x-1)(x-2)}{2(2+x^2)^2+36}$$

$f \circ f$  est strictement croissante puisque  $f$  est strictement décroissante.

Alors d'après ses variations et valeurs, je peux affirmer que :

$$f \circ f \left( \left[ \frac{1}{2}, 1 \right] \right) \subset \left[ \frac{1}{2}, 1 \right] \text{ et } f \circ f([1, \lambda]) \subset [1, \lambda] \text{ et } f \circ f([\lambda, 2]) \subset [\lambda, 2] \text{ et } f \circ f([2, 3]) \subset [2, 3].$$

Donc, si  $u_0 \in \left[ \frac{1}{2}, 1 \right]$  alors  $\forall n, u_{2n} \in \left[ \frac{1}{2}, 1 \right]$  et la suite  $(u_{2n})$  ne peut pas converger vers  $\lambda$  qui est la seule limite possible de  $u$ . Donc  $u$  diverge. Idem si  $u_0 \in [2, 3]$ .

si  $u_0 \in [1, \lambda]$  alors  $\forall n, u_{2n} \in [1, \lambda]$  et  $u_2 - u_0 = f \circ f(u_0) - u_0 < 0$ . Comme  $(u_{2n})$  est monotone,  $(u_{2n})$  est décroissante et par suite  $(u_{2n})$  converge vers  $1$ . Donc  $u$  diverge.

si  $u_0 \in [\lambda, 2]$  alors  $\forall n, u_{2n} \in [\lambda, 2]$  et  $u_2 - u_0 = f \circ f(u_0) - u_0 > 0$ . Comme  $(u_{2n})$  est monotone,  $(u_{2n})$  est croissante et par suite  $(u_{2n})$  converge vers  $2$ .

Donc  $u$  diverge.

Soit  $a > 0$  et  $u$  la suite définie par :  $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$ .

1) Etudier la monotonie de  $u$  et déterminer la limite de la suite  $u$ .

$$2) \text{ Soit } v_n = e^{-u_n}. \text{ Calculer } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}.$$

3) En déduire un équivalent simple de  $u_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , en appliquant judicieusement le théorème de Césaro.

1) On pose  $f : (x \mapsto x + e^{-x})$ .  $Df = \mathbb{R}$  et. Donc  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$  existe. Comme  $f(\mathbb{R}^{+*}) \subset \mathbb{R}^{+*}$  et  $u_0 > 0, \forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ .

Enfin,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = e^{-u_n} > 0$ . Donc  $u$  est strictement croissante. J'en déduis que  $u$  admet une limite  $L$  telle que  $L \in \mathbb{R}^{+*} \cup \{+\infty\}$ .

Supposons que  $L \in \mathbb{R}^{+*}$ . Alors  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + e^{-u_n} = L + e^{-L}$ . Donc,  $e^{-L} = 0$  ce qui est impossible ! Donc,  $L = +\infty$ .

$$2) \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = e^{u_{n+1}} - e^{u_n} = e^{u_n + e^{-u_n}} - e^{u_n} = e^{u_n}(e^{e^{-u_n}} - 1) \underset{\substack{\sim_{+\infty} \\ \text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-u_n} = 0 \\ \text{et } e^{t-1} \sim_0 t}}{=} e^{u_n}e^{-u_n} = 1. \text{ Donc, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = 1.$$

3) Posons  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{v_{k+1}} - \frac{1}{v_k} \right)$ . D'après Césaro,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$ . Donc,  $S_n = 1 + o_{+\infty}(1)$ .

$$\text{Or, } S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{v_{k+1}} - \frac{1}{v_k} \right) = S_n = \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0} \right] = \frac{1}{n} [e^{u_n} - e^{u_0}].$$

Par conséquent,  $\frac{1}{n} [e^{u_n} - e^{u_0}] = 1 + o_{+\infty}(1)$  donc  $e^{u_n} = n + o_{+\infty}(n) + ne^{u_0} = n[(1 + e^a) + o_{+\infty}(1)]$ . Alors  $u_n = \ln(n) + \ln(1 + e^a + o_{+\infty}(1))$  et ainsi,  $u_n \sim \ln(n)$ .

Soit  $a > 0$  et  $u$  la suite définie par :  $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})$ . Etudier la monotonie de  $u$  et l'existence et la valeur de la limite de la suite  $u$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a}{u_n} \right) = f(u_n) \text{ où } f : \left( x \mapsto \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right) \right).$$

$f(\mathbb{R}^{+*}) \subset \mathbb{R}^{+*}$  et  $a \in \mathbb{R}^{+*}$ . Donc  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$  existe et  $u_n > 0$ .

Soit la suite  $u$  définie par :  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n(1 + u_n)$ .

1. Etudier la monotonie de  $u$  et l'existence et la valeur de la limite de la suite  $u$  selon la valeur de  $u_0$ .

2. On suppose que  $u_0 > 0$ . On pose  $v_n = \frac{1}{2^n} \ln(u_n)$ .

a) Montrer que  $v$  est croissante

b) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1} u_n}$ .

c) En déduire qu'il existe un entier  $N$  tel que :  $\forall n \geq N, v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n}$ .

d) En déduire que  $v$  est convergente .

$u_{n+1} - u_n = u_n(1 + u_n) - u_n = u_n^2 \geq 0$ . Donc,  $(u_n)$  est croissante. Donc  $(u_n)$  admet une limite  $L$  finie ou égale à  $+\infty$ .

Alors si  $L \in \mathbb{R}$ , alors  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(1 + u_n) \underset{\substack{\equiv \\ \text{pas de F.I.}}}{=} L(1 + L)$ . Donc  $L^2 = 0$  i.e.  $L = 0$ .

Si  $L = +\infty$  alors  $+\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(1 + u_n) \underset{\substack{\equiv \\ \text{pas de F.I.}}}{=} +\infty$  donc il n'y a pas de contradiction. Les deux limites possibles sont  $0$  et  $+\infty$ .

Posons  $f(x) = x(1 + x)$ . Donc le tableau de variation de  $f$  est :

$x$	$-\infty$	$-1$	$-\frac{1}{2}$	$0$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$\frac{1}{4}$	0	$+\infty$
			$\nearrow$		

Donc,  $f(\mathbb{R}^{+*}) \subset \mathbb{R}^{+*}$  donc si  $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$  alors  $\forall n, u_n \in \mathbb{R}^{+*}$  et comme  $(u_n)$  est croissante,  $L = +\infty$ .

De plus,  $f([-1, 0]) \subset \mathbb{R}^{+*}$  donc si  $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$  alors  $u_1 \in \mathbb{R}^{+*}$  et par suite  $\forall n \geq 1, u_n \in \mathbb{R}^{+*}$  et comme  $(u_n)$  est croissante,  $L = +\infty$ .

Enfin,  $f([-1, 0]) \subset [-1, 0[$  donc si  $u_0 \in ]-1, 0[$  alors  $\forall n, u_n \in ]-1, 0[$ ; donc  $(u_n)$  est bornée et croissante, et par conséquent,  $L = 0$ .

2. On suppose que  $u_0 > 0$ . On pose  $v_n = \frac{1}{2^n} \ln(u_n)$ .

$$a) \text{ Soit } n \in \mathbb{N}. v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln(u_{n+1}) - \frac{1}{2^n} \ln(u_n) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln(u_n(1 + u_n)) - \frac{1}{2^n} \ln(u_n) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln(u_n) + \frac{1}{2^{n+1}} \ln(1 + u_n) - \frac{1}{2^n} \ln(u_n) = \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \frac{1}{2^n} \ln(u_n) + \frac{1}{2^{n+1}} \ln(1 + u_n) = -\frac{1}{2^{n+1}} \ln(u_n) + \frac{1}{2^{n+1}} \ln(1 + u_n) = \frac{1}{2^{n+1}} [\ln(1 + u_n) - \ln(u_n)] > 0.$$

Donc  $(v_n)$  est croissante.

b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} [\ln(1 + u_n) - \ln(u_n)] = \frac{1}{2^{n+1}} \left[ \ln \left( \frac{1+u_n}{u_n} \right) \right] = \frac{1}{2^{n+1}} \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{u_n} \right) \right]. \text{ Or, } \forall t \geq 0, \ln(1 + t) \leq t. \text{ Donc } \ln \left( 1 + \frac{1}{u_n} \right) \leq \frac{1}{u_n} \text{ et par suite, } v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1} u_n}$$

c) Comme  $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ .  $L = +\infty$ . Donc, existe un entier  $N$  tel que :  $\forall n \geq N, u_n \geq \frac{1}{2}$ . Alors,  $\forall n \geq N, \frac{1}{u_n} \leq 2$  et  $\frac{1}{2^{n+1}u_n} \leq \frac{1}{2^n}$  Donc,  $\forall n \geq N, v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n}$

d) Alors,  $\forall n \geq N+1, \sum_{k=N}^{n-1} v_{k+1} - v_k \leq \sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{2^k}$  donc  $v_n - v_N \leq \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^N \leq \frac{1}{2} = 2$ . Ainsi,  $\forall n \geq N+1, v_n \leq 2 + v_N$ . Donc la suite  $(v_n)$  est majorée à partir du rang  $N+1$  donc est majorée. Comme  $(v_n)$  est croissante,  $(v_n)$  est convergente.

### Suites implicites

a) pour tout entier naturel  $n$ , justifier que l'équation  $xe^x = n$  admet une seule solution strictement positive notée  $u_n$ .

b) Etudier la monotonie de  $u$ .

c) Déterminer la limite de  $u$

d) Montrer que :  $u_n \sim_{+\infty} \ln(n)$ .

a) Posons  $f(x) = xe^x$ .  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et continue . Donc, le TBCSM assure que  $f(\mathbb{R}^{+*}) = \mathbb{R}^{+*}$ .

Donc tout entier  $n \in \mathbb{N}^{*}$  admet un unique antécédent par  $f$  dans  $\mathbb{R}^{+*}$  noté  $u_n$ .

b) Soit  $n \in \mathbb{N}^{*}$ .  $f(u_n) = n < n+1 = f(u_{n+1})$ . Comme  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ,  $u_n < u_{n+1}$ . Ainsi,  $u$  est strictement croissante. Par conséquent,  $u$  a une limite  $L$  strictement positive ou infinie.

c) e TBCSM assure que  $f$  est bijective de  $\mathbb{R}^{+*}$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .  $\forall n, u_n > 0$  et  $f(u_n) = n$  donc  $u_n = f^{-1}(n)$ . De plus,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$  et par conséquent,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}(n) = +\infty$ . Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

d)  $\forall n, f(u_n) = u_n e^{u_n} = n$  donc  $\ln(u_n e^{u_n}) = \ln(n)$  i.e.  $\ln(u_n) + u_n = \ln(n)$ . Comme  $\ln(x) = o_{+\infty}(x)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ ,  $\ln(u_n) = o_{+\infty}(u_n)$  et par suite  $\ln(u_n) + u_n \sim_{+\infty} u_n$ . J'en conclus que :  $u_n \sim_{+\infty} \ln(n)$ .

a) pour tout entier naturel  $n$ , justifier que l'équation  $(e_n): x^5 + nx = 1$  admet une seule solution notée  $u_n$ .

b) Etudier la monotonie et la limite de  $(u_n)$ .

c) Montrer que :  $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + \frac{5}{n^{11}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^{11}}\right)$ .

a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Posons  $f_n: (x \mapsto x^5 + nx - 1)$ .  $f_n$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  car  $(x \mapsto x^5)$  l'est et  $(x \mapsto nx - 1)$  est croissante. Donc l'équation  $(e_n)$  admet au plus une solution. De plus,  $f_n$  est continue et  $f_n(0) = -1 < 0 \leq n = f_n(1)$ . Donc le TVI assure que  $(e_n)$  admet au plus une solution notée  $u_n$ . Ainsi,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^5 + nu_n = 1$  i.e.  $f_n(u_n) = 0$ . De plus  $f_n(0) < f_n(u_n) \leq f_n(1)$ , donc  $0 \leq u_n \leq 1$  puisque  $f_n$  est strictement croissante.

b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $f_n$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  donc  $f_n(u_n)$  et  $f_n(u_{n+1})$  sont ordonnés dans la même ordre que  $u_n$  et  $u_{n+1}$ .

$f_n(u_n) = 0$  et  $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^5 + nu_{n+1} - 1 = \underbrace{u_{n+1}^5 + (n+1)u_{n+1} - 1}_{=f_{n+1}(u_{n+1})=0} - u_{n+1} = -u_{n+1} \leq 0$  puisque  $0 \leq u_n$ . Donc,  $f_n(u_{n+1}) \leq f_n(u_n)$  et par suite,

$u_{n+1} \leq u_n$ . La suite  $(u_n)$  est donc décroissante et minorée par 0 donc convergente. Notons  $L$  sa limite. Par passage à la limite dans l'inégalité  $0 \leq u_n \leq 1$ , nous pouvons affirmer que  $0 \leq L \leq 1$ .  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^5 + nu_n = 1$  donc  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{n}(1 - u_n^5)$  et par conséquent,  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}(1 - u_n^5) = 0 \times (1 - L^5) = 0$ .

c)  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{n}(1 - u_n^5)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - u_n^5 = 0$  donc  $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$  i.e.  $u_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

$$u_n = \frac{1}{n} \left(1 - \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^5\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^5 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} (1 + o(1))^5 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} (1 + o(1)) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right).$$

$$\text{Alors, } u_n = \frac{1}{n} \left(1 - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)^5\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} \left(1 - \frac{1}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)^5 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} \left(1 - \frac{5}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + \frac{5}{n^{11}} + o\left(\frac{1}{n^{11}}\right).$$

### Suites complexes

1. Soit  $z \in \mathbb{C}$ .  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on pose  $P_n = \prod_{k=0}^n (1 + z^{2^k})$ . Calculer  $(1 - z)P_n$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$  lorsque  $|z| < 1$ .

2. Soit  $z \in \mathbb{C}$ .  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on pose  $T_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = e^z$ . (indication : chercher la forme trigonométrique puis algébrique de  $T_n$ )

1.  $(1 - z)P_n = (1 - z) \prod_{k=0}^n (1 + z^{2^k}) = (1 - z)(1 + z) \prod_{k=1}^n (1 + z^{2^k}) = (1 - z^2) \prod_{k=2}^n (1 + z^{2^k}) = (1 - z^2)(1 + z^2) \prod_{k=3}^n (1 + z^{2^k})$

$$= (1 - z^4) \prod_{k=3}^n (1 + z^{2^k}) = (1 - z^4)(1 + z^4) \prod_{k=4}^n (1 + z^{2^k}) = (1 - z^8) \prod_{k=4}^n (1 + z^{2^k}).$$

Par itération (ou récurrence)  $(1 - z)P_n = (1 - z^{2^n})(1 + z^{2^n}) = 1 - z^{2^{n+1}}$ .

Donc si  $|z| < 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z^n = 0$  et la suite extraite  $(z^{2^{n+1}})$  tend aussi vers 0. Donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - z)P_n = 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{1}{1-z}$ .

2. Posons  $z = x + iy$ . Alors,  $T_n = \left(1 + \frac{x+iy}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n} + i\frac{y}{n}\right)^n$   $\underset{\substack{\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x}{n} + i\frac{y}{n} = 1 \\ \text{donc, pour } n \text{ assez grande,}}}{} \left(\sqrt{\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2} e^{i\arctan\left(\frac{y}{x+n}\right)}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} e^{in\arctan\left(\frac{y}{x+n}\right)}$   
 $\arg\left(1 + \frac{x}{n} + i\frac{y}{n}\right)$  existe et  
 $\arg\left(1 + \frac{x}{n} + i\frac{y}{n}\right) = \arctan\left(\frac{y}{x+n}\right)$

$$\text{Donc, } T_n = \underbrace{\left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} \cos\left(n\arctan\left(\frac{y}{x+n}\right)\right)}_{\text{Re}(T_n)} + i \underbrace{\left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} \sin\left(n\arctan\left(\frac{y}{x+n}\right)\right)}_{\text{Im}(T_n)}.$$

$$r_n = \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} = e^{\frac{n}{2} \ln\left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right]}. \text{ Or, } \frac{n}{2} \ln\left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right] \sim \frac{n}{2} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2 - 1\right].$$

$$\text{Et, } \frac{n}{2} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2 - 1\right] = \frac{n}{2} \left[2x + \left(\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right] = x + \frac{x^2+y^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim_0 \begin{cases} \frac{y^2}{2n} & \text{si } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} \ln\left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right] = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}. \text{ Ainsi, } \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \begin{cases} e^x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} = e^x.$$

$$\cos\left(n\arctan\left(\frac{y}{x+n}\right)\right) \underset{\substack{\text{car } \frac{y}{x+n} \rightarrow 0 \\ \text{et } \arctan(u) \sim_0 u}}{=} \cos\left(n\left(\frac{y}{n} + o_{+\infty}\left(\frac{y}{n}\right)\right)\right) = \cos(y + o_{+\infty}(y)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \cos(y). \text{ De même,}$$

$$\sin\left(n \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x+n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sin(y). \text{ J'en déduis que } \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = e^x \cos(y) + i e^x \sin(y) = e^x (\cos(y) + i \sin(y)) = e^x e^{iy} = e^z.$$