

Programme de colle 16

Chap 10 Suites réelles et suites complexes.

I Définitions

- suite réelle, suite complexe, représentation.
- suite constante et suite stationnaire.
- suite réelle majorée, minorée, croissante, décroissante.
- suite bornée :

Une suite (u_n) est bornée lorsque : $\forall M \in \mathbb{R}^{++}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$

Une suite réelle (u_n) est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée à partir d'un certain rang.

- suite ayant une limite finie :

Une suite réelle (u_n) tend vers le réel L lorsque : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{++}, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - L| \leq \varepsilon)$

- suite réelle ayant une limite infinie :

Une suite réelle (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque : $\forall A \in \mathbb{R}^{++}, \exists n_A \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_A \Rightarrow u_n \geq A)$.

Une suite réelle (u_n) tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque : $\forall B \in \mathbb{R}^{++}, \exists n_B \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_B \Rightarrow u_n \leq -B)$.

- suite convergente, suite divergente :

Une suite réelle (u_n) est convergente lorsqu'elle a une limite finie.

Une suite réelle (u_n) est divergente lorsqu'elle n'est pas convergente i.e. lorsqu'elle n'a pas de limite ou a une limite infinie.

II Propriétés fondamentales des suites

- Caractère borné ou pas :

Toute suite convergente est bornée.

Si (u_n) est une suite réelle de limite finie L et a et b sont deux réels tels que : $a < L < b$ alors à partir d'un certain rang, $a < u_n < b$. En particulier, toute suite ayant une limite strictement positive est strictement positive à partir d'un certain rang.

Toute suite réelle ayant une limite infinie n'est pas bornée...

- Théorème unicité de la limite.

Une suite (u_n) ne peut avoir qu'une seule limite quand $n \rightarrow +\infty$. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ cette limite lorsqu'elle existe.

- Caractérisation d'une suite convergente : Soit une suite (u_n) réelle (resp. complexe) et L un réel (resp. complexe)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - L = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - L| = 0 \Leftrightarrow |u_n - L| \leq \varepsilon_n \text{ tel que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0.$

- Théorème des gendarmes ou de limite par encadrement :

Soit u, v et w des suites réelles.

Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L \in \mathbb{R}$ alors (v_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L$.

Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Si à partir d'un certain rang, $v_n \leq w_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

IV Borne sup. ou inf.

- Définition et théorème d'existence :

L'ensemble des majorants d'une partie A de \mathbb{R} non vide et majorée admet un plus petit élément appelé borne supérieure de A et noté $\sup(A)$; $\sup(A)$ est donc le plus petit majorant de A .

L'ensemble des minorants d'une partie A de \mathbb{R} non vide et minorée admet un plus grand élément appelé borne inférieure de A et noté $\inf(A)$; $\inf(A)$ est donc le plus grand minorant de A .

Lorsque A n'est pas majorée, $\sup(A) = +\infty$. Lorsque A n'est pas minorée, $\sup(A) = -\infty$.

- Relation entre plus petit (resp. grand) élément et borne inférieure (resp. supérieure). Soit A une partie de \mathbb{R} .

Si il existe un élément m de A qui minore A alors $m = \min(A) = \inf(A)$.

Si il existe un élément m' de A qui majore A alors $m' = \max(A) = \sup(A)$.

Si A admet une borne inf M' et $M' \notin A$ alors A n'admet pas de minimum.

Si A admet une borne sup M et $M \notin A$ alors A n'admet pas de maximum.

- Caractérisation par les epsilon d'une borne sup. ou inf. finie.

Soit A une partie de \mathbb{R} non vide et majorée et m un réel. Alors, $m = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, a \leq m \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{++}, \exists a_\varepsilon \in A / m - \varepsilon < a_\varepsilon \end{cases}$.

Soit A une partie de \mathbb{R} non vide et minorée et m un réel. Alors, $m = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, a \geq m \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{++}, \exists a_\varepsilon \in A / m + \varepsilon > a_\varepsilon \end{cases}$.

- Caractérisation séquentielle d'une borne sup. ou inf. (même infinie).

Soit A une partie non vide de \mathbb{R} et m un réel ou un infini.

V Autres propriétés fondamentales des suites

- Théorème d'opérations sur les limites
- Limite d'une suite monotone

Toute suite monotone a une limite (finie ou infinie).

Une suite croissante (resp. décroissante) admet une limite finie si et seulement si cette suite est majorée (resp. minorée).

- Passage à la limite dans une inégalité

Si u et v sont deux suites réelles telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ existent et à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ alors

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

- Théorème de Césaro :

Si u est une suite de limite L alors $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend aussi vers L .

VI Comparaison des suites

- Définition d'une suite négligeable, équivalent ou dominée
- Caractérisation par le quotient
- Si $\forall n, u_n > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$ alors $(L \in]0,1[\Rightarrow (u_n) \text{ CV vers } 0)$ et $(L \in]1, +\infty[\Rightarrow (u_n) \text{ DV vers } +\infty)$
- Croissances comparées $\forall (\alpha, \beta, a) \in \mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}^{++} \times]1, +\infty[$, $\ln(n)^\alpha \ll_{+\infty} n^\beta \ll_{+\infty} a^n \ll_{+\infty} n! \ll_{+\infty} n^n$.
- Opérations sur les suites négligeables et sur les suites équivalentes.
- Utilisation d'un équivalent (resp. développement limité) d'une fonction pour obtenir un équivalent ou un développement asymptotique d'une suite :

Si $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ alors $f(u_n) \sim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n)$.

Si $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_px^p + o_p(x^p)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ alors $f(u_n) = a_0 + a_1u_n + a_2u_n^2 + \dots + a_pu_n^p + u_n^p o_{+\infty}(1)$.

VII Suites extraites

- Définition :

la suite v est extraite de la suite u lorsqu'il existe une application φ de \mathbb{N} dans \mathbb{N} strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$.

- Théorème de limite d'une suite extraite d'une suite ayant une limite; application : preuve de la divergence d'une suite :

Si la suite u admet une limite L alors toute suite extraite de u tend vers cette même limite L . Donc, par contraposée, si deux suites extraites de u ont des limites différentes alors u n'a pas de limite. Application : $u = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite car $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = 1 \neq -1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1}$.

- Caractérisation de la limite d'une suite u par les deux suites extraites particulières : (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .

La suite u admet une limite L si et seulement si les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers la même limite L .

VIII Suites adjacentes

- Définition

les suites réelles u et v sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre décroissante et la différence des deux tend vers 0 i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$.

- Théorème de convergence et d'approximation de la limite.

Si les suites u et v sont adjacentes alors u et v convergent vers la même limite finie L et $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |u_n - L| \leq |v_n - u_n|$.

- Valeur décimale approchée d'un réel.

Soit x un réel. Les suites $(10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor + 10^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers x et $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq x - 10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^{-n}$; $10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor$ est appelé la valeur décimale approchée de x à 10^{-n} près.

- Théorème des segments emboîtés.

Si $\forall n, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = 0$ alors il existe un réel x tel que : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x\}$.

IX Suites complexes

- Définition et caractérisation de la convergence :

La suite complexe u converge vers le nombre complexe L lorsque : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{++}, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |u_n - L| \leq \varepsilon)$

La suite complexe u converge vers le nombre complexe L si et seulement si $(\operatorname{Re}(u_n))$ converge vers $\operatorname{Re}(L)$ et $(\operatorname{Im}(u_n))$ converge vers $\operatorname{Im}(L)$.

Chap. 11 Suites particulières.

I Suites explicites

- Définition
- Suite explicite de la forme à $u_n = f(n)$.

Si f est monotone sur \mathbb{R}^+ et $\forall n, u_n = f(n)$ alors u est monotone et de même monotonie que f .

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ et $\forall n, u_n = f(n)$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$

II Suites récurrentes

- Définition ; calcul des termes.

IV Suites périodiques

- ✓ Définition. Ecriture sous forme d'« infini-uplets ».

La suite u est périodique lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n$; p est alors la période de u et on écrit

$$u = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_{p-1}, u_0, u_1, u_2, \dots, u_{p-1}, u_0, u_1, u_2, \dots).$$

- ✓ Propriétés : valeurs, caractère borné et convergence.

Une suite p -périodique prend au plus p valeurs distinctes, est entièrement connue par la donnée de ses p premiers termes, est bornée ; Une suite p -périodique est convergente si et seulement si elle est constante.

V Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f fonction réelle définie sur D .

- Définition.

si $f(D) \subset D$ et $u_0 \in D$ alors $\forall n, u_n$ existe et $u_n \in D$.

- Limites possibles de u

si f est continue sur D et $\forall n, u_n \in D$ alors les limites possibles de u sont les points fixes de f sur D et les extrémités T de D qui n'appartiennent pas à D et qui vérifient : $T = \lim_{x \rightarrow T} f(x)$.

- Monotonie de u

si f est croissante sur D et $\forall n, u_n \in D$, alors (u_n) est monotone croissante si $u_1 - u_0 \geq 0$ et décroissante si $u_1 - u_0 \leq 0$.

si f est décroissante sur D et $\forall n, u_n \in D$, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de monotonie contraire.

- Utilisation de $g: (x \mapsto f(x) - x)$:

- pour connaître le nombre de points fixes de f
- pour connaître le signe de $u_1 - u_0$ (et donc le sens de monotonie de u lorsque f est croissante)

- Cas où f est contractante

f est lipschitzienne sur I lorsqu'il existe un réel K tel que $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$.

f est contractante sur I lorsqu'il existe un réel $K \in [0, 1[$ tel que $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$.

Si f est contractante sur D et $\forall n, u_n \in D$ et L est un point fixe de f sur D alors $\forall n, |u_n - L| \leq K^n |u_0 - L|$ et (u_n) converge vers L .

VI Suites implicites

- Définition :

Une suite implicite est une suite dont le terme de rang n , u_n , est la solution d'une équation $\varphi_n(x) = 0$ dans un intervalle I_n donné. u_n est alors

entièrement défini par : $\begin{cases} \varphi_n(u_n) = 0 \\ u_n \in I_n \end{cases}$.

- Méthode d'étude.

- Existence de chaque terme u_n : par le TVI + stricte monotonie ou le TBSCM appliqué à φ_n sur I_n . On peut alors introduire φ_n^{-1} et dire que $u_n = \varphi_n^{-1}(0)$.
- Caractère borné : lorsque $\forall n, I_n = I$ et I est bornée alors $\forall n, (u_n)$ est bornée.
- Monotonie :

- lorsque $\forall n, I_n = I$ et φ_n est strictement croissante sur I alors le signe de $u_{n+1} - u_n$ est celui de $\varphi_n(u_{n+1}) - \varphi_n(u_n) = \varphi_n(u_{n+1})$.
- Lorsque $\forall n, \sup(I_n) \leq \inf(I_{n+1})$, u est croissante.

- Limites possibles :

- Lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\inf(I_n)) = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Sinon, en supposant ou sachant que u a une limite, passer à la limite, quand $n \rightarrow +\infty$, dans l'égalité $\varphi_n(u_n) = 0$.

Chap 11: Limites et continuité d'une fonction réelle.

I Limites

1. **Définition des différentes limites** (finie ou infinie en un réel ou un infini) d'une fonction. Limite à droite et à gauche.

Définition générale avec les voisinages. Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et a un élément ou bord de Df non isolé. Soit $L \in \mathbb{R}$.

- Ici $a \in \mathbb{R}$, f tend vers L en a lorsque pour tout voisinage V de L , il existe un voisinage W de a dans Df tel que $\forall x \in V, f(x) \in W$.
- Ici $a \in \mathbb{R}$, f tend vers L en a^+ lorsque pour tout voisinage V de L , il existe un réel $r > 0$ tel que $\forall x \in]a, a+r] \cap Df, f(x) \in V$.
- Ici $a \in \mathbb{R}$, f tend vers L en a^- lorsque pour tout voisinage V de L , il existe un réel $r > 0$ tel que $\forall x \in [a-r, a[\cap Df, f(x) \in V$.

2. **Unicité de la limite.** Limite en un point du domaine de définition.

- Si f tend vers L_1 et L_2 en a alors $L_1 = L_2$.
- Si f est définie en a alors la seule limite possible de f en a est $f(a)$.

3. **Caractérisation d'une limite finie par majoration :**

Si $L \in \mathbb{R}$ et au voisinage de a , $|f(x) - L| \leq \varepsilon(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

4. **Caractérisation séquentielle de la limite.** f tend vers L en a si et seulement si pour toute suite u telle que $\begin{cases} \forall n, u_n \in Df \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a, \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = L. \end{cases}$

5. **Caractérisation de la limite par la limite à droite et à gauche.**

f tend vers L en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

6. **Application : prouver qu'une fonction n'a pas de limite quelque part.**

f ne tend pas vers L en a dès qu'il existe une suite u telle que $\begin{cases} \forall n, u_n \in Df \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \neq L \end{cases}$.

f ne tend pas vers L en a dès que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq L$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq L$.

f n'a pas de limite en a dès qu'il existe deux suites u et v telle que $\begin{cases} \forall n, u_n \in Df \text{ et } v_n \in Df \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) \end{cases}$.

f n'a pas de limite en a dès que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

7. **Caractère borné d'une fonction ayant une limite finie.** Signe d'une fonction ayant une limite strictement positive (resp. négative). Caractère non borné d'une fonction ayant une limite infinie.

- Si f tend vers un réel L en a et m et m' sont deux réels tels que $m < L < m'$ alors il existe un voisinage V de a dans Df tel que $\forall x \in V, m \leq f(x) \leq m'$.
- Si f tend vers une limite strictement positive en a alors il existe un voisinage V de a dans Df tel que $\forall x \in V, 0 < f(x)$.

QUESTIONS DE COURS : Tous les énoncés des définitions, propriétés et théorèmes doivent être connus. Les démonstrations des résultats suivants sont aussi à connaître :

Q1 : Soit u une suite bien définie vérifiant $\forall n, u_{n+1} = f(u_n)$.

- si $f(D) \subset D$ et $u_0 \in D$ alors $\forall n, u_n \in D$.
- si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ et f est continue en L alors $f(L) = L$.
- si f est croissante sur D et $\forall n, u_n \in D$, alors (u_n) est monotone, croissante si $u_0 \leq u_1$ et décroissante si $u_1 \leq u_0$.
- si f est décroissante sur D et $\forall n, u_n \in D$, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de monotonie contraire.

Q2 : Caractère bornée : Si f tend vers un réel L en a et m et m' sont deux réels tels que $m < L < m'$ alors il existe un voisinage V de a dans Df tel que $\forall x \in V, m \leq f(x) \leq m'$ et si $L > 0$ alors il existe un voisinage V de a dans Df tel que $\forall x \in V, 0 < f(x)$.

Q3 : Caractérisation séquentielle de la limite