Corrigé du TD Suites particulières

Suites récurrentes

Soit u une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ et v la suite réelle définie par : $\begin{cases} u_0 = v_0 \\ \forall n \geq 1, v_n = \frac{v_{n-1}+u_n}{1+u_n v_{n-1}} \end{cases}$.

1. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n$ existe et $0 < v_n < 1$.
2. Justifier que v est convergente .
3. Déterminer la limite de v.

1. On montrer facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n$ existe et $0 < v_n$.

$v_0 > 0$ car $v_0 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ et $[\, v_{n-1} > 0 \Longrightarrow \begin{cases} 1 + u_n v_{n-1} > 0 \\ v_{n-1} + u_n > 0 \end{cases} \Longrightarrow v_n = \frac{v_{n-1}+u_n}{1+u_n v_{n-1}}$ existe et $v_n > 0]$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0$.

On montre aussi par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n$ existe et $1 > v_n$.

$v_0 < 1$ car $v_0 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ et $[\, v_{n-1} < 1 \Longrightarrow v_n - 1 = \frac{v_{n-1}+u_n}{1+u_n v_{n-1}} - 1 = \frac{v_{n-1}+u_n-1-u_n v_{n-1}}{1+u_n v_{n-1}} = \frac{(v_{n-1}-1)(1-u_n)}{1+u_n v_{n-1}} < 0]$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n < 1$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n < 1$.

2. $v_n - v_{n-1} = \frac{v_{n-1}+u_n}{1+u_n v_{n-1}} - v_{n-1} = \frac{v_{n-1}+u_n-v_{n-1}-u_n v_{n-1}^2}{1+u_n v_{n-1}} = \frac{u_n(1-v_{n-1}^2)}{1+u_n v_{n-1}} > 0$. Donc v est strictement croissante et par suite v est convergente. Notons L sa limite.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{v_{n-1}+u_n}{1+u_n v_{n-1}}$ donc $u_n = \frac{v_{n-1}-v_n}{v_n v_{n-1}-1}$.

   $Si\ L \neq 1$ alors (u_n) est convergente de limite $\frac{L-L}{L^2-1} = 0$ ce qui est impossible puisque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$. J'en conclus que $L = 1$.

Soit a_0 et b_0 deux réels tels que : $0 < a_0 < b_0$ et $\forall n, a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n+b_n}$ et $b_{n+1} = \frac{b_n^2}{a_n+b_n}$

1. Montrer que la suite $a - b$ est constante.
2. Etudier la convergence des suites a et b.

Déterminer une forme explicite des suites récurrrentes suivantes :

1. $u_0 = 1$ et $\forall n, u_{n+1} = ne^n u_n$
2. $\forall n,\ \sqrt[5]{u_n}\sqrt[3]{u_{n+1}} = e.$
3. $u_0 = 1$ et $\forall n,\ u_{n+1} = 2u_n - n + 1.$
4. $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = 1$ et $\forall n, u_{n+2} = \frac{2(u_{n+1})^2}{u_n}$.

Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

Soit u la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{6}{2+u_n^2}$. Montrer que u est bornée et divergente.

Soit $f\colon \left(x \mapsto \frac{6}{2+x^2}\right)$. $Df = \mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{+*}$. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n > 0$.

Comme f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \neq +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3 \neq 0$, les limites possibles de u sont les points fixes de f sur $\mathbb{R}^{+*}$. Or, $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{6}{2+x^2} = x \Leftrightarrow x^3 + 2x - 6 = 0$. Or,$h\colon (x \mapsto x^3 + 2x - 6)$ est strictement croissante et continue et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty > 0$ et $h(0) = -6 < 0$. Donc, h s'annule une et une seule fois en un réel λ sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, f admet un seul point fixe λ sur $\mathbb{R}^+$. Donc, ce point fixe λ est la seule limite possible de u.

Comme $h(1) < 0 < h(2), \lambda \in]1,2[$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x > 0, f'(x) = 6\frac{-2x}{(2+x^2)^2} < 0$. Donc f est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, f est continue et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \neq +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3, f(\mathbb{R}^{+*}) \subset [0,3]$ et $f([0,3]) \subset [f(3), f(0)] = \left[\frac{6}{11}, 3\right] \subset \left[\frac{1}{2}, 3\right]$. J' en déduis que $\forall n \geq 2, u_n \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$.

Comme f est strictement décroissante, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de monotonie contraire. Comme (u_n) est bornée, les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont bornées et finalement convergentes. On note L et L' leurs limites respectives. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = \frac{6}{2+\left(\frac{6}{2+u_{2n}^2}\right)^2}$. Alors $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+2} \overset{car\ f\circ f\ continue}{\widehat{=}} f(f(L))$. Donc, L est un point fixe de $f \circ f$.

x	½	1	λ	2	3
$f(x)$			λ		
$f\circ f(x)$		1	λ	2	
$f\circ f(x) - x$		0	0	0	

$f \circ f(x) = x \Leftrightarrow \frac{6}{2+\left(\frac{6}{2+x^2}\right)^2} = x$

$\Leftrightarrow 3(2+x^2)^2 = x(2+x^2)^2 + 18x$

$\Leftrightarrow 3(4 + 4x^2 + x^4) = 22x + 4x^3 + x^5$

$\Leftrightarrow x^5 - x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 22x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow (x^3 + 2x - 6)(x^2 - 3x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x^3 + 2x - 6)(x^2 - 3x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = \lambda\ ou\ x = 1\ ou\ x = 2.$

Donc $\lambda, 1$ et 2 sont les limites possibles de (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

De plus, $f \circ f(x) - x = \frac{-(x^3+2x-6)(x^2-3x+2)}{2(2+x^2)^2+36} = \frac{-(x-\lambda)\overbrace{(x^2+bx+c)}^{\Delta<0}(x-1)(x-2)}{2(2+x^2)^2+36}$

$f \circ f$est strictement croissante puisque f est strictement décroissante.

Alors d'après ses variations et valeurs, je peux affirmer que :

$f \circ f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et $f \circ f([1,\lambda]) \subset [1,\lambda]$ et $f \circ f([\lambda, 2]) \subset [\lambda, 2]$ et $f \circ f([2,3]) \subset [2,3]$.

Donc, si $u_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ alors $\forall n, u_{2n} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et la suite (u_{2n}) ne peut pas converger vers λ qui est la seule limite possible de u. Donc u diverge. Idem si $u_0 \in [2,3]$.

si $u_0 \in [1,\lambda]$ alors $\forall n,\ u_{2n} \in [1,\lambda]$ et $u_2 - u_0 = f \circ f(u_0) - u_0 < 0$. Comme (u_{2n}) est monotone, (u_{2n}) est décroissante et par suite (u_{2n}) converge vers 1. Donc u diverge.

si $u_0 \in [\lambda, 2]$ alors $\forall n,\ u_{2n} \in [\lambda, 2]$ et $u_2 - u_0 = f \circ f(u_0) - u_0 > 0$. Comme (u_{2n}) est monotone, (u_{2n}) est croissante et par suite (u_{2n}) converge vers 2. Donc u diverge.

Soit $a > 0$ et u la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

1) Etudier la monotonie de u et déterminer la limite de la suite u.

2) Soit $v_n = e^{-u_n}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}$.
3) En déduire un équivament simple de u_n quand $n \to +\infty$, en appliquant judicieusement le théorème de Césaro.
1) On pose $f : (x \mapsto x + e^{-x})$. $Df = \mathbb{R}$ et. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe . Comme $f(\mathbb{R}^{+*}) \subset \mathbb{R}^{+*} et\ u_0 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
Enfin, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = e^{-u_n} > 0$. Donc u est strictement croissante. J'en déduis que u admet une limite L telle que $L \in \mathbb{R}^{+*} \cup \{+\infty\}$.
Supposons que $L \in \mathbb{R}^{+*}$. Alors $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + e^{-u_n} = L + e^{-L}$. Donc, $e^{-L} = 0$ ce qui est impossible ! Donc, $L = +\infty$.

2) $\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = e^{u_{n+1}} - e^{u_n} = e^{u_n + e^{-u_n}} - e^{u_n} = e^{u_n}\left(e^{e^{-u_n}} - 1\right) \underbrace{\sim_{+\infty}}_{car \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-u_n}=0 \ et\ e^t-1\sim_0 t} e^{u_n}e^{-u_n} = 1$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = 1$.

3)Posons $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{v_{k+1}} - \frac{1}{v_k}\right)$. D'après Césaro, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$. Donc, $S_n = 1 + o_{+\infty}(1)$.
Or, $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{v_{k+1}} - \frac{1}{v_k}\right) = S_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0}\right] = \frac{1}{n}[e^{u_n} - e^{u_0}]$.
Par conséquent, $\frac{1}{n}[e^{u_n} - e^{u_0}] = 1 + o_{+\infty}(1)$ donc $e^{u_n} = n + o_{+\infty}(n) + ne^{u_0} = n[(1 + e^a) + o_{+\infty}(1)]$. Alors $u_n = \ln(n) + \ln(1 + e^a + o_{+\infty}(1))$ et ainsi, $u_n \sim \ln(n)$.

Soit $a > 0$ et u la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$. Etudier la monotonie de u et l'existence et la valeur de la limite de la suite u.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) = f(u_n)$ où f: $\left(x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)\right)$.
$f(\mathbb{R}^{+*}) \subset \mathbb{R}^{+*}$ et $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$existe et $u_n > 0$.

Soit la suite u définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n(1 + u_n)$.
1. Etudier la monotonie de u et l'existence et la valeur de la limite de la suite u selon la valeur de u_0.
2. On suppose que $u_0 > 0$. On pose $v_n = \frac{1}{2^n}\ln(u_n)$.
a) Montrer que v est croissante
b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1}u_n}$.
c) En déduire qu'il existe un entier N tel que : $\forall n \geq N, v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n}$.
d) En déduire que v est convergente .

$u_{n+1} - u_n = u_n(1 + u_n) - u_n = u_n^2 \geq 0$. Donc, (u_n) est croissante. Donc (u_n) admet une limite L finie ou égale à $+\infty$.
Alors si $L \in \mathbb{R}$, alors $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(1 + u_n) \underbrace{=}_{pas\ de\ F.I.} L(1 + L)$. Donc $L^2 = 0$ $i.e. L = 0$.
Si $L = +\infty$ alors $+\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(1 + u_n) \underbrace{=}_{pas\ de\ F.I.} +\infty$ donc il n'y a pas de contradiction. Les deux limites possibles sont 0 et $+\infty$.
Posons $f(x) = x(1 + x)$. Donc le tabelau de variation de f est :

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$+\infty$

Donc, $f(\mathbb{R}^{+*}) \subset \mathbb{R}^{+*}$donc si $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ alors $\forall n, u_n \in \mathbb{R}^{+*}$et comme (u_n) est croissante, $L = +\infty$.
De plus, $f(]-\infty, -1[) \subset \mathbb{R}^{+*}$donc si $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ alors $u_1 \in \mathbb{R}^{+*}$ et par suite $\forall n \geq 1, u_n \in \mathbb{R}^{+*}$et comme (u_n) est croissante, $L = +\infty$.
Enfin, $f(]-1,0[) \subset]-1,0[$. donc si $u_0 \in]-1,0[$ alors $\forall n, u_n \in]-1,0[$; donc (u_n) est bornée et croissante, et par conséquent, $L = 0$.
2. On suppose que $u_0 > 0$. On pose $v_n = \frac{1}{2^n}\ln(u_n)$.
a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}}\ln(u_{n+1}) - \frac{1}{2^n}\ln(u_n) = \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(u_n(1 + u_n)\right) - \frac{1}{2^n}\ln(u_n) = \frac{1}{2^{n+1}}\ln(u_n) + \frac{1}{2^{n+1}}\ln(1 + u_n) - \frac{1}{2^n}\ln(u_n)$

$$= \left(\frac{1}{2} - 1\right)\frac{1}{2^n}\ln(u_n) + \frac{1}{2^{n+1}}\ln(1 + u_n) = -\frac{1}{2^{n+1}}\ln(u_n) + \frac{1}{2^{n+1}}\ln(1 + u_n) = \frac{1}{2^{n+1}}[\ln(1 + u_n) - \ln(u_n)] > 0.$$

Donc (v_n) est croissante.
b) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}}[\ln(1 + u_n) - \ln(u_n)] = \frac{1}{2^{n+1}}\left[\ln\left(\frac{1+u_n}{u_n}\right)\right] = \frac{1}{2^{n+1}}\left[\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\right]$. Or , $\forall t \geq 0, \ln(1 + t) \leq t$. Donc $\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \leq \frac{1}{u_n}$ et par suite ,
$v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1}u_n}$
c) Comme $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$. $L = +\infty$. Donc, existe un entier N tel que : $\forall n \geq N, u_n \geq \frac{1}{2}$. *Alors*, $\forall n \geq N, \frac{1}{u_n} \leq 2$ et $\frac{1}{2^{n+1}u_n} \leq \frac{1}{2^n}$ Donc, $\forall n \geq N, v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n}$.
d) Alors, $\forall n \geq N + 1, \sum_{k=N}^{n-1} v_{k+1} - v_k \leq \sum_{k=N}^{n-1}\frac{1}{2^k}$ $donc$ $v_n - v_N \leq \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-N+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^N \leq \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. Ainsi, $\forall n \geq N + 1$, $v_n \leq 2 + v_N$. Donc la suite (v_n) est majorée à partir du rang $N + 1$ donc est majorée. Comme (v_n) est croissante, (v_n)est convergente.

Suites implicites

a) pour tout entier naturel n , justifier que l'équation $xe^x = n$ admet une seule solution strictement positive notée u_n.
b) Etudier la monotonie de u.
c) Déterminer la limite de u
d) Montrer que : $u_n \sim_{+\infty} \ln(n)$.
a) Posons $f(x) = xe^x$. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et continue . Donc, le TBCSM assure que $f(\mathbb{R}^{+*}) = \mathbb{R}^{+*}$.
Donc tout entier $n \in \mathbb{N}^*$admet un unique antécédent par f dans $\mathbb{R}^{+*}$ noté u_n.
b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f(u_n) = n < n + 1 = f(u_{n+1})$. Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}, u_n < u_{n+1}$. Ainsi, u est strictement croissante. Par conséquent, u a une limite L strictement positive ou infinie.
c) e TBCSM assure que f est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. $\forall n, u_n > 0$ et $f(u_n) = n$ donc $u_n = f^{-1}(n)$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$ et par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}(n) = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
d) $\forall n, f(u_n) = u_n e^{u_n} = n$ donc $\ln(u_n e^{u_n}) = \ln(n)$ i.e. $\ln(u_n) + u_n = \ln(n)$. Comme $\ln(x) = o_{+\infty}(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\ln(u_n) = o_{+\infty}(u_n)$ et par suite $\ln(u_n) + u_n \sim_{+\infty} u_n$. J'en conclus que : $u_n \sim_{+\infty} \ln(n)$.
a) pour tout entier naturel n , justifier que l'équation (e_n): $x^5 + nx = 1$ admet une seule solution notée u_n.

b) Etudier la monotonie et la limite de (u_n).
c) Montrer que : $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + \frac{5}{n^{11}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^{11}}\right)$.

a)Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $f_n : (x \mapsto x^5 + nx - 1)$. f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $(x \mapsto x^5)$ l'est et $(x \mapsto nx - 1)$ est croissante. Donc l'équation (e_n) admet au plus une solution. De plus, f_n est continue et $f_n(0) = -1 < 0 \leq n = f_n(1)$. Donc le TVI assure que (e_n) admet au plus une solution. Ainsi (e_n) admet exactement une solution notée u_n. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, {u_n}^5 + nu_n = 1$ i.e. $f_n(u_n) = 0$. De plus $f_n(0) < f_n(u_n) \leq f_n(1)$, donc $0 \leq u_n \leq 1$ puisque f_n est strictement croissante.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $f_n(u_n)$ et $f_n(u_{n+1})$ sont ordonnés dans la même ordre que u_n et u_{n+1}.
$f_n(u_n) = 0$ et $f_n(u_{n+1}) = {u_{n+1}}^5 + nu_{n+1} - 1 = \underbrace{{u_{n+1}}^5 + (n+1)u_{n+1} - 1}_{=f_{n+1}(u_{n+1})=0} - u_{n+1} = -u_{n+1} \leq 0$ puisque $0 \leq u_n$. Donc, $f_n(u_{n+1}) \leq f_n(u_n)$ et par suite, $u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 0 donc convergente. Notons L sa limite. Par passage à la limite dans l'inégalité $0 \leq u_n \leq 1$, nous pouvons affirmer que $0 \leq L \leq 1$. $\forall n \in \mathbb{N}, {u_n}^5 + nu_n = 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{n}(1 - {u_n}^5)$ et par conséquent, $L = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(1 - {u_n}^5) = 0 \times (1 - L^5) = 0$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{n}(1 - {u_n}^5)$ et $\lim_{n\to+\infty} 1 - {u_n}^5 = 0$ donc $u_n \sim \frac{1}{n}$ i.e. $u_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

$$u_n = \frac{1}{n}\left(1 - \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^5\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^5 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6}(1 + o(1))^5 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6}(1 + o(1)) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right).$$

Alors, $u_n = \frac{1}{n}\left(1 - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)^5\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6}\left(1 - \frac{1}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)^5 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6}\left(1 - \frac{5}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + \frac{5}{n^{11}} + o\left(\frac{1}{n^{11}}\right)$.

<u>Suites complexes</u>

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1 + z^{2^k}\right)$. Calculer $(1-z)P_n$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} P_n$ lorsque $|z| < 1$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} T_n = e^z$. (indication : chercher la forme trigonométrique puis algébrique de T_n)

1. $(1-z)P_n = (1-z)\prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right) = (1-z)(1+z)\prod_{k=1}^{n}\left(1+z^{2^k}\right) = (1-z^2)\prod_{k=2}^{n}\left(1+z^{2^k}\right) = (1-z^2)(1+z^2)\prod_{k=3}^{n}\left(1+z^{2^k}\right)$

$$= (1-z^4)\prod_{k=3}^{n}\left(1+z^{2^k}\right) = (1-z^4)(1+z^4)\prod_{k=4}^{n}\left(1+z^{2^k}\right) = (1-z^8)\prod_{k=4}^{n}\left(1+z^{2^k}\right).$$

Par itération (ou récurrence) $(1-z)P_n = \left(1 - z^{2^n}\right)\left(1 + z^{2^n}\right) = 1 - z^{2^{n+1}}$.
Donc si $|z| < 1$,alors $\lim_{n\to+\infty} z^n = 0$ et la suite extraite $\left(z^{2^{n+1}}\right)$ tend aussi vers 0. Donc, $\lim_{n\to+\infty}(1-z)P_n = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{1-z}$.

2. Posons $z = x + iy$. Alors, $T_n = \left(1 + \frac{x+iy}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n} + i\frac{y}{n}\right)^n \underset{\substack{\lim_{n\to+\infty} \underbrace{1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}}=1=1 \\ donc, pour\ n\ assez\ grand, \\ \arg\left(1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}\right)\ existe\ et \\ \arg\left(1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}\right)=Arctan\left(\frac{y}{x+n}\right)}}{=} \left(\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2}\, e^{iArctan\left(\frac{y}{x+n}\right)}\right)^n = \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} e^{inArctan\left(\frac{y}{x+n}\right)}$

$$Donc, T_n = \underbrace{\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} \cos\left(nArctan\left(\frac{y}{x+n}\right)\right)}_{Re(T_n)} + i\underbrace{\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} \sin\left(nArctan\left(\frac{y}{x+n}\right)\right)}_{Im(T_n)}.$$

$$r_n = \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} = e^{\frac{n}{2}\ln\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right]}. Or, \frac{n}{2}\ln\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right] \sim \frac{n}{2}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2 - 1\right].$$

Et, $\frac{n}{2}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2 - 1\right] = \frac{n}{2}\left[\frac{2x}{n} + \left(\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right] = x + \frac{x^2+y^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim_0 \begin{cases} x\ si\ x \neq 0 \\ \frac{y^2}{2n}\ si\ x = 0\ et\ y \neq 0. \\ 0\ si\ x = y = 0 \end{cases}$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2}\ln\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right] = \begin{cases} x\ si\ x \neq 0 \\ 0\ si\ x = 0 \end{cases}$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} r_n = \begin{cases} e^x\ si\ x \neq 0 \\ 1\ si\ x = 0 \end{cases} = e^x$.

$\cos\left(nArctan\left(\frac{y}{x+n}\right)\right) \underset{\substack{car\ \underbrace{\frac{y}{x+n}\sim_{+\infty}\frac{y}{n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0 \\ et\ Arctan(u)\sim_0 u}}{=} \cos\left(n\left(\left(\frac{y}{n}\right) + o_{+\infty}\left(\frac{y}{n}\right)\right)\right) = \cos(y + o_{+\infty}(y)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \cos(y)$. De même,

$\sin\left(nArctan\left(\frac{y}{x+n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin(y)$. J'en déduis que $\lim_{n\to+\infty} T_n = e^x\cos(y) + ie^x\sin(y) = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = e^x e^{iy} = e^z$.