

DM : Suites

Exercice 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On définit la fonction f_n sur $[0; +\infty[$ par

$$f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1$$

1. Soit $n \geq 2$, quel est le signe de $f_n(0)$, de $f_n(1)$?
2. Étudier les variations de f_n sur $[0; +\infty[$. Donner la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que f_n s'annule sur $[0; +\infty[$ en deux réels u_n et v_n qui vérifient :

$$0 < u_n < 1 \leq \sqrt{\frac{n}{2}} < v_n$$

4. Donner la limite de (v_n) .
5. Calculer $e^{-u_n^2}$ en fonction de u_n^n .
6. En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.
7. En déduire la monotonie de $(u_n)_{n \geq 2}$.
8. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est convergente. On note L sa limite. Montrer que $0 \leq L \leq 1$.
9. Soit $n \geq 2$ et g_n définie par $g_n(x) = \ln(3) + n \ln(x) - x^2$. Montrer que pour $x > 0$, $g_n(x) = 0$ si et seulement si $f_n(x) = 0$.
10. On suppose $L \neq 1$. Trouver une contradiction en utilisant la question précédente.
11. On définit la suite (w_n) par $w_n = u_n - 1$. Déterminer la limite de $n \ln(1 + w_n)$ quand $n \rightarrow +\infty$ et en déduire un équivalent de $u_n - 1$.

Exercice 2

Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 \leq 2$ et $u_{n+1} = -2 + \frac{6}{3 - u_n}$.