

DM : Suites

Exercice 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On définit la fonction f_n sur $[0; +\infty[$ par

$$f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1$$

1. Soit $n \geq 2$, quel est le signe de $f_n(0)$, de $f_n(1)$?

Pour tout $n \geq 2$, on a :

$$f_n(0) = -1 < 0$$

$$f_n(1) = 3e^{-1} - 1 > 0$$

2. Étudier les variations de f_n sur $[0; +\infty[$. Donner la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

La fonction f_n est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$f'_n(x) = 3nx^{n-1}e^{-x^2} + 3x^n(-2x)e^{-x^2} = 3x^{n-1}e^{-x^2}(n - 2x^2)$$

On en déduit les variations de f_n :

x	0	1	$\sqrt{\frac{n}{2}}$	$+\infty$
$f'_n(x)$		+	0	-
f_n	-1	$\frac{3-e}{e} > 0$	$f_n(\sqrt{\frac{n}{2}})$	-1

Par croissances comparées, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x^2} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = -1$.

On en déduit en particulier que :

- f_n est strictement croissante sur $[0; \sqrt{\frac{n}{2}}]$
- comme $f_n(1) > 0$ et f_n est strictement croissante sur $[0; \sqrt{\frac{n}{2}}]$, $f_n(\sqrt{\frac{n}{2}}) > 0$
- comme $n \geq 2$, f_n est strictement croissante sur $[0; 1]$
- f_n est strictement décroissante sur $[\sqrt{\frac{n}{2}}; +\infty[$

3. Montrer que f_n s'annule sur $[0; +\infty[$ en deux réels u_n et v_n qui vérifient :

$$0 < u_n < 1 \leq \sqrt{\frac{n}{2}} < v_n$$

La fonction f_n est strictement croissante sur $[0; 1]$, $f_n(0) < 0$ et $f_n(1) > 0$ donc d'après le théorème de bijection des fonctions strictement monotones, il existe un unique $x \in]0; 1[$ tel que $f_n(x) = 0$. On note u_n ce nombre. De même f_n est strictement décroissante sur $[\sqrt{\frac{n}{2}}; +\infty[$ et $f_n(\sqrt{\frac{n}{2}}) > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = -1 < 0$, donc il existe un unique $x \in [\sqrt{\frac{n}{2}}; +\infty[$ tel que $f_n(x) = 0$. On note v_n ce nombre.

4. Donner la limite de (v_n) .

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n}{2}} = +\infty$ et $\sqrt{\frac{n}{2}} < v_n$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

5. Calculer $e^{-u_n^2}$ en fonction de u_n^n .

Comme $f_n(u_n) = 0$ on a

$$3u_n^n e^{-u_n^2} - 1 = 0$$

donc

$$e^{-u_n^2} = \frac{1}{3u_n^n}$$

6. En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.

On a donc

$$\begin{aligned} f_{n+1}(u_n) &= 3u_n^{n+1} e^{-u_n} - 1 \\ &= \frac{u_n^{n+1}}{u_n^n} - 1 \\ &= u_n - 1 < 0 \end{aligned}$$

car $u_n \in]0; 1[$.

7. En déduire la monotonie de $(u_n)_{n \geq 2}$.

On a $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ et $f_{n+1}(u_n) < 0$, on a donc $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$. La fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $[0; 1]$ on a donc $u_n < u_{n+1}$. On en déduit que la suite est croissante.

8. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est convergente. On note L sa limite. Montrer que $0 \leq L \leq 1$.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 donc elle converge. Comme on a $0 < u_n < 1$ pour tout $n \geq 2$, en passant à la limite on obtient $0 \leq L \leq 1$.

9. Soit $n \geq 2$ et g_n définie par $g_n(x) = \ln(3) + n \ln(x) - x^2$. Montrer que pour $x > 0$, $g_n(x) = 0$ si et seulement si $f_n(x) = 0$.

Soit $x > 0$. On a $f_n(x) = 0$ ssi $3x^n e^{-x^2} = 1$ ssi $\ln(3x^n e^{-x^2}) = 0$ ssi $\ln(3) + n \ln(x) - x^2 = 0$.

10. On suppose $L \neq 1$. Trouver une contradiction en utilisant la question précédente.

On a

$$\ln(3) + n \ln(u_n) - u_n^2 = 0$$

donc

$$n \ln(u_n) = u_n^2 - \ln(3)$$

Si $L < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(u_n) = -\infty$, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2 - \ln(3) = L^2 - \ln(3) \in \mathbb{R}$.

On en déduit que $L = 1$.

11. On définit la suite (w_n) par $w_n = u_n - 1$. Déterminer la limite de $n \ln(1 + w_n)$ quand $n \rightarrow +\infty$ et en déduire un équivalent de $u_n - 1$.

On a

$$\ln(3) + n \ln(u_n) - u_n^2 = 0$$

donc

$$\ln(3) + n \ln(1 + w_n) - (1 + w_n)^2 = 0$$

$$n \ln(1 + w_n) = (1 + w_n)^2 - \ln(3)$$

On obtient donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n \ln(1 + w_n)) = 1 - \ln(3)$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n) = 0$. Comme $\ln(1 + x) \sim_0 x$, on a $(n \ln(1 + w_n)) \sim n w_n$. Donc $n w_n \sim 1 - \ln(3)$. On en déduit que

$$u_n - 1 \sim \frac{1 - \ln(3)}{n}$$

Exercice 2

Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 \leq 1$ et $u_{n+1} = -2 + \frac{6}{3 - u_n}$.

(u_n) est bien définie. En effet si on définit la fonction f sur $] -\infty; 1]$ par $f(x) = -2 + \frac{6}{3 - x}$ pour tout $x \leq 1$ alors f est dérivable sur $] -\infty; 1]$ et $f'(x) = \frac{6}{(3 - x)^2} > 0$. Donc la fonction f est strictement croissante sur $] -\infty; 1]$. On a également $f(1) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$, donc $f(] -\infty; 1]) =] -2; 1] \subset] -\infty; 1]$. Donc l'intervalle $] -\infty; 1]$ est stable par f . On en déduit que si $u_0 \in] -\infty; 1]$, la suite (u_n) est bien définie.

En particulier si $u_0 \in] -\infty; 1]$ alors pour tout $n \geq 1$, on a $-2 \leq u_n \leq 1$.

Points fixes de f . On cherche les points x de $] -\infty; 1]$ tels que $f(x) = x$. C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} -2 + \frac{6}{3 - x} &= x \\ -2(3 - x) + 6 &= x(3 - x) \\ 2x &= 3x - x^2 \\ x - x^2 &= 0 \\ x(1 - x) &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que les points fixes de f dans $] -\infty; 1]$ sont 0 et 1. Si la suite (u_n) converge alors elle converge vers 0 ou 1.

Etude de la fonction $h : x \mapsto f(x) - x$. On étudie le signe de la fonction h pour connaître la monotonie de u_n . En effet, comme f est croissante, la suite (u_n) est monotone et elle est croissante si $u_1 > u_0$, et décroissante sinon. On a pour tout $x \in] -\infty; 1]$,

$$\begin{aligned} h(x) &> 0 \\ -2 + \frac{6}{3 - x} - x &> 0 \\ -2(3 - x) + 6 - x(3 - x) &> 0 \\ x(x - 1) &> 0 \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signe de h :

x	$-\infty$	0	1
x	$-$	0	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	0
$h(x)$	$+$	0	$-$

On en déduit que si $u_0 \in]-\infty; 0]$ alors (u_n) est croissante et si $u_0 \in [0; 1]$ alors (u_n) est décroissante.

Etude de la convergence de (u_n) en fonction de u_0 .

1er cas : $u_0 < 0$: dans ce cas (u_n) est croissante et majorée par 1 donc elle converge vers un point fixe de f comme $u_n < 0$ ce point fixe est négatif ou nul donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2ème cas : $u_0 = 0$: dans ce cas (u_n) est constante égale à 0.

3ème cas : $u_0 \in]0; 1[$: dans ce cas (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un point fixe de f comme $u_n \leq u_0 < 1$ ce point fixe est inférieur ou égal à $u_0 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

4ème cas : $u_0 = 1$: dans ce cas (u_n) est constante égale à 1.