Programme de colle 17

Chap 11: Limites et continuité d'une fonction réelle.

I Limites

1. **Définition des différentes limites** (finie ou infinie en un réel ou un infini) d'une fonction. Limite à droite et à gauche. Définition générale avec les voisinages. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et a un élément ou bord de Df non isolé. Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$.
   - Ici $a \in \overline{\mathbb{R}}$. f tend vers L en a lorsque pour tout voisinage V de L, il existe un voisinage W de a dans Df tel que $\forall x \in V, f(x) \in W$.
   - Ici $a \in \mathbb{R}$. f tend vers L en a^+ lorsque pour tout voisinage V de L, il existe un réel $r > 0$ tel que $\forall x \in]a, a+r] \cap Df, f(x) \in W$.
   - Ici $a \in \mathbb{R}$. f tend vers L en a^- lorsque pour tout voisinage V de L, il existe un réel $r > 0$ tel que $\forall x \in [a-r, a[\cap Df, f(x) \in W$.
2. **Unicité de la limite**. Limite en un point du domaine de définition.
   - Si f tend vers L_1 et L_2 en a alors $L_1 = L_2$
   - Si f est définie en a alors la seule limite possible de f en a est $f(a)$.
3. **Caractérisation d'une limite finie par majoration** :
   Si $L \in \mathbb{R}$ et au voisinage de a, $|f(x) - L| \leq \varepsilon(x)$ et $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ alors $\lim_{x \to a} f(x) = L$.
4. **Caractérisation séquentielle de la limite**. f tend vers L en a sietssi pour toute suite u telle que $\begin{cases} \forall n, u_n \in Df \\ \lim_{n \to +\infty} u_n = a \end{cases}$, $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = L$.
5. **Caractérisation de la limite par la limite à droite et à gauche.**
   f tend vers L en a sietssi $\lim_{x \to a^+} f(x) = L = \lim_{x \to a^-} f(x)$.
6. **Application : prouver qu'une fonction n'a pas de limite quelque part.**
   f ne tend pas vers L en a dès qu'il existe une suite u telle que $\begin{cases} \forall n, u_n \in Df \\ \lim_{n \to +\infty} u_n = a \\ \lim_{n \to +\infty} f(u_n) \neq L \end{cases}$.
   f ne tend pas vers L en a dès que $\lim_{x \to a^+} f(x) \neq L$ ou $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq L$.
   f n'a pas de limite en a dès qu'il existe deux suites u et v telle que $\begin{cases} \forall n, u_n \in Df \text{ et } v_n \in Df \\ \lim_{n \to +\infty} u_n = a = \lim_{n \to +\infty} v_n \\ \lim_{n \to +\infty} f(u_n) \neq \lim_{n \to +\infty} f(v_n) \end{cases}$.
   f n'a pas de limite en a dès que $\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$.
7. **Caractère borné d'une fonction ayant une limite finie**. Signe d'une fonction ayant une limite strictement positive (resp. négative). Caractère non borné d'une fonction ayant une limite infinie.
   - *Si* f tend vers un réel L en a et m et m'sont deux réels tels que $m < L < m'$ alors il existe un voisinage V de a dans Df tel que $\forall x \in V, m \leq f(x) \leq m'$.
   - *Si* f tend vers une limite strictement positive en a alors il existe un voisinage V de a dans Df tel que $\forall x \in V, 0 < f(x)$.
8. **Théorème d'opérations sur les limites :** limite d'une valeur absolue, d'une somme, produit, quotient, limite d'une fonction produit d'une fonction bornée et d'une fonction de limite nulle, limite d'une fonction composée
   - Si b est une fonction bornée au voisinage de a et $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ alors $\lim_{x \to a} b(x)\varepsilon(x) = 0$.
   - $Si \ \lim_{x \to a} f(x) = L \ alors \ \lim_{x \to a} |f(x)| = |L|$.
   - $Si \ \lim_{x \to a} f(x) = L \ et \ \lim_{x \to a} g(x) = L' \ et \ L + L' \ n'est \ pas \ une \ FI \ alors \ \lim_{x \to a} f(x) + g(x) = L + L'$.
   - $Si \ \lim_{x \to a} f(x) = L \ et \ \lim_{x \to a} g(x) = L' \ et \ LL' \ n'est \ pas \ une \ FI \ alors \ \lim_{x \to a} f(x) + g(x) = L + L'$.
   - $Si \ \lim_{x \to a} f(x) = L \ et \ \lim_{x \to a} g(x) = L' \ et \ \frac{L}{L'} \ n'est \ pas \ une \ FI \ et \ g$ ne s'annule pas au voisinage de a alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{L'}$
   - $Si \ \lim_{x \to a} f(x) = b \ et \ \lim_{x \to b} g(x) = L \ et \ g \circ f$ est définie au voisinage de a alors $\lim_{x \to a} g \circ f(x) = L$.
9. **Changement de variable pour se ramener à une limite en zéro.**
   - Si a est un réel alors $\left(\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{t \to 0} f(a+t) = L\right)$ et $\left(\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = L \iff \lim_{t \to 0^{\pm}} f(a+t) = L\right)$
   - $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L \iff \lim_{t \to 0^{\pm}} f\left(\frac{1}{t}\right) = L$
10. **Théorème de limite par encadrement.**
    - Si L est un réel et $\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} g(x)$ $et \ au \ voisnage \ de \ a, f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ alors $\lim_{x \to a} h(x) = L$
    - $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \ et \ au \ voisnage \ de \ a, f(x) \leq h(x)$ alors $\lim_{x \to a} h(x) = +\infty$
    - $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty \ et \ au \ voisnage \ de \ a, h(x) \leq g(x)$ alors $\lim_{x \to a} h(x) = -\infty$
11. **Passage à la limite dans une inégalité**.
    - $Si \ \lim_{x \to a} f(x) = L \ et \ \lim_{x \to a} g(x) = L' \ et \ g(x) \geq f(x)$ sur un voisinage de a alors $L' \geq L$.
12. **Limite d'une fonction monotone.**
    - Si f est une fonction monotone sur $]a, b[$ alors $\lim_{x \to a^+} f(x)$ et $\lim_{x \to a^-} f(x)$ existent et pour tout réel $c \in]a, b[$, $\lim_{x \to c^+} f(x)$ et $\lim_{x \to c^-} f(x)$ existent et sont finies.

- Si f est croissante sur $]a,b[$ alors $\forall c \in]a,b[$, $\lim_{x\to c^-} f(x) \le f(c) \le \lim_{x\to c^+} f(x)$ et $\lim_{x\to a^+} f(x) = \begin{cases} inf_{]a,b[}f \ si\ f\ est\ minorée \\ -\infty \end{cases}$ et $\lim_{x\to a^-} f(x) = \begin{cases} sup_{]a,b[}f \ si\ f\ est\ majorée \\ +\infty \end{cases}$
- Si f est décroissante sur $]a,b[$ alors $\forall c \in]a,b[$, $\lim_{x\to c^+} f(x) \le f(c) \le \lim_{x\to c^-} f(x)$ et $\lim_{x\to a^+} f(x) = \begin{cases} sup_{]a,b[}f \ si\ f\ est\ majorée \\ +\infty \end{cases}$ et $\lim_{x\to a^-} f(x) = \begin{cases} inf_{]a,b[}f \ si\ f\ est\ minorée \\ -\infty \end{cases}$

II Continuité

1. **Définition d'une fonction continue** en a, continue à gauche et à droite en a , continue sur un domaine.
   - f est continue en $un\ réel\ a$ lorsque $a \in Df\ et\ \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
   - f est continue à droite en a lorsque $a \in Df\ et\ \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.
   - f est continue sur I lorsque f est continue en tout point de I.

2. **Caractérisation de la continuité par la continuité à gauche et à droite** : f continue en a sietssi $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a^-} f(x)$.
3. **Caractérisation séquentielle** de la continuité : f est continue en a sietssi pour toute suite u telle que $\begin{cases} \forall n, u_n \in Df \\ \lim_{n\to+\infty} u_n = a \end{cases}$, $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$.
4. **Caractère borné :** toute fonction continue en a est bornée au voisinage de a.
5. **Théorème d'opérations sur les fonctions continues** : combinaison linéaire, valeur absolue, produit, quotient et composée.
6. **Continuité des fonctions usuelles.**
7. **Prolongement par continuité**.
   f est prolongeable par continuité en a lorsque f a une limite finie en a. Lorsque $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$, la fonction $\tilde{f}$: $\left(x \mapsto \begin{cases} f(x)\ si\ x \in Df \\ L\ si\ x = a \end{cases}\right)$ est continue en a et est appelé le prolongement par continuité en a.
8. **Fonction lipchitzienne, fonction contractante**
   f est lipschitzienne sur I lorsqu'il existe un réel M tel que : $\forall x \in I, |f(x) - f(y)| \le M|x - y|$. Si de plus $M \in [0,1[$ alors f est dite contractante.

III Continuité sur un intervalle

9. **Théorème des valeurs intermédiaires :** Deux versions
   si f est continue sur $[a,b]$ alors tout réel m compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet un antécédent par f dans $[a,b]$.
   si f est continue sur un $\underline{intervalle\ I}$ alors $f(I)$ est un intervalle et ses extrémités sont $inf_I f\ et\ sup_I f$
   Et ces conséquences :
   si f est continue sur $[a,b]$ et $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés (i.e. $f(a)f(b) < 0$) alors f s'annule sur $[a,b]$.
   si f est continue et strictement monotone sur $[a,b]$ et $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés (i.e. $f(a)f(b) < 0$) alors f s'annule un et une seule fois sur $[a,b]$.
   si f est continue sur $un\ intervalle\ I$ et ne s'annule pas sur I alors f ne change pas de signe sur I.
10. **Image d'un segment par une fonction continue .**
    Une fonction continue sur un segment est bornée sur ce segment et admet un minimum et un maximum sur ce segment.
11. **Théorème des bijections continues et strictement monotones**
    Si f est strictement monotone et continue sur un $\underline{intervalle\ I}$ alors
    - $f(I)$ est un intervalle de même nature que I et ses extrémités sont les limites de f aux bords de I
    - $f\ est\ bijective\ de\ I\ sur\ f(I)$ et sa bijection réciproque est continue et strictement monotone sur $f(J)$ de même monotonie que f.

Chap 13 Fonctions réelles dérivables - Fonctions convexes

I Généralités

1. **Définition d'une fonction dérivable en a, dérivable à gauche et à droite en a , dérivable sur un domaine**

- f est dérivable en $un\ réel\ a$ lorsque $a \in Df\ et\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ existe\ et\ est\ finie$. Dans ce cas, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = nombre\ dérivé\ de\ f\ a\ en\ a$ et la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ est la tangente à Cf en a.
- f est continue à droite en a lorsque $a \in Df\ et\ \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ existe\ et\ est\ finie$. Alors, $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f_d{}'(a) = nombre\ dérivé$ à $droite\ de\ f\ en\ a$ et la droite d'équation $y = f(a) + f_d{}'(a)(x-a)$ est la demi-tangente à droite de Cf en a.
- f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout point de I.

2. **Caractérisation de la dérivabilité par la dérivabilité à gauche et à droite**

f dérivable en a sietssi $f\ est\ dérivable$ à $droite\ et$ à $gauche\ en\ a\ et\ f_d{}'(a) = f_g{}'(a)$.

3. **Caractérisation de la dérivabilité par le DL**

f dérivable en $a\ et\ L = f'(a)$ sietssi $f\ \ admet\ le\ DL_1(a).: f(x) = f(a) + L(x-a) + o_a(x-a)$.

4. **Opérations sur les fonctions dérivables**

- Si f et g sont dérivables en a et λ est une constante alors $\lambda f, f+g\ et\ fg$ sont dérivables en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a), (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)\ et\ (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
- Si f et g sont dérivables en a et $g(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}\ et\ \frac{f}{g}$ sont dérivables en a et $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)}\ et\ \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$
- Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g\circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$
- Si f et g sont dérivables sur D et λ est une constante alors $\lambda f, f+g\ et\ fg$ sont dérivables sur D et $\forall a \in D, (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$
$$et\quad (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)\quad et\quad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$
- Si f et g sont dérivables sur D et $\forall a \in D, g(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}\ et\ \frac{f}{g}$ sont dérivables sur D et
$$\forall a \in D\ \left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)}\ et\ \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$
- Si f est dérivable sur D et g est dérivable sur E et $\forall a \in D, f(a) \in E$ alors $g\circ f$ est dérivable sur D et
$$\forall a \in D,\ (g\circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a)).$$

$$\forall a \in D,\ (g\circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a)).$$

5. **Dérivabilité et fonction dérivée des fonctions usuelles.** Parmi nos fonctions usuelles, seules les fonctions partie entière, Arcsin, Arccos, valeur absolue et racine nième ne sont pas dérivables sur leur propre domaine de définition.

Connaitre parfaitement toutes les dérivées usuelles.

II Propriétés des fonctions dérivables sur un intervalle

6. **Théorème de condition nécessaire d'extremum**

Si I est un intervalle et $a \in \mathring{I}\ et\ f: I \to \mathbb{R}$ est dérivable en a et admet un extremum (local ou global) en a alors $f'(a) = 0$.

7. **Théorème de Rolle.**

Si a et b sont des réels tq $a < b$ et f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et $f(a) = f(b)$ alors $\exists c \in]a,b[, f'(c) = 0$.

8. **Théorèmes d'égalité et d'inégalités des accroissements finis.**

Si a et b sont des réels tq $a < b$ et f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors $\exists c \in]a,b[, f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Si f est continue sur l'intervalle I et dérivable sur $\mathring{I}$ et il existe un réel M tel que : $\forall t \in \mathring{I}, |f'(t)| \leq M$ alors f est M-lipschitzienne sur I.

Applications à l'obtention d'inégalités, à l'estimation d'approximation et aux suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

9. **Théorème « monotonie et signe de la dérivée ».**

Si f est continue sur l'**intervalle** I et dérivable sur l'intérieur de I alors

f est croissante sur l'intervalle I sietssi f' est positive sur l'intérieur de I .
f est décroissante sur l'intervalle I sietssi f' est négative sur l'intérieur de I .
f est constante sur l'intervalle I sietssi f' est nulle sur l'intérieur de I .

Applications à l'obtention d'inégalités et à l'étude de fonctions.

10. **Théorème de critère de dérivabilité (ou critère de limite du taux d'accroissement).**

Si a est un élément de l' **intervalle** I et est continue en a et dérivable au moins sur $I\backslash\{a\}$ et $\lim_{x\to a} f'(x) = L$ alors $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L$.

Si a est un élément de l' intervalle I et f est continue en a et dérivable au moins sur $I\backslash\{a\}$ et $\lim_{x\to a} f'(x) = L \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = L$ et f' est continue en a.

Applications à l'étude de la dérivabilité

11. **Théorème de critère de classe C^n.**

$Soit\ n \in \mathbb{N}^*.$ I un intervalle, a un élément de I, $L_0\ un\ réel\ et\ f: \left(x \mapsto \begin{cases} g(x)\ si\ x \in I\backslash\{a\} \\ L_0\ si\ x = a \end{cases}\right)$.

Si g est continue en a et de classe C^n sur $I\backslash\{a\}$ et $\lim_{x\to a} g(x) = L_0\ et\ \ \forall k \in [\![1,n]\!], \lim_{x\to a} g^{(k)}(x) = L_k \in \mathbb{R}$

$$\text{alors } f\ est \text{ de classe } C^n \text{ sur } I \text{ et } \forall k \in [\![1,n]\!], f^{(k)}: \left(x \mapsto \begin{cases} g^{(k)}(x)\ si\ x \in I\backslash\{a\} \\ L_k\ si\ x = a \end{cases}\right).$$

III Formules de Taylor

12. Formule de Taylor reste- intégral

Si f est de classe C^{n+1} sur l'intervalle I alors $\forall (x,a) \in I^2, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$.

Application à l'obtention d'inégalités.

13. Inégalité de Taylor Lagrange.

Si f est de classe C^{n+1} sur l'intervalle I et il existe un réel M tel que : $\forall t \in I, \left|f^{(n+1)}(t)\right| \leq \underbrace{M}_{\substack{\text{Indépendant de } t \\ \text{mais dépendant} \\ \text{de } I \text{ et } n}}$ alors

$\forall (a,b) \in I^2,\ \left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Application à l'obtention d'inégalités, de valeurs approchées, aux calculs de limite de somme.

14. Application : pour tout réel x, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

15. Formule de Taylor-Young.

Si f est de classe C^n sur l'intervalle I et $a \in I$ alors $\forall (x,a) \in I^2, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o_a((x-a)^n)$.

Questions de Cours :

1) Théorème de limite d'une fonction monotone

2) Théorème des valeurs intermédiaires (première version).

3) Théorème de dérivation d'un produit de deux fonctions et théorème de dérivation d'une fonction composée.

4) Condition nécessaire d'extremum.

5) Théorème de Rolle.

6) Égalité des accroissements finis